CÁLCULO

GEORGE B. THOMAS

11ª EDIÇÃO

WEIR HASS GIORDANO

VOLUME 1

PEARSON
Addison Wesley

www.aw.com/thomas_br

Companion Website

Site com material de apoio para professores e estudantes

CÁLCULO

GEORGE B. THOMAS

Pearson Education

EMPRESA CIDADÃ

CÁLCULO

GEORGE B. THOMAS

11ª EDIÇÃO

VOLUME 1

Maurice D. Weir
NAVAL POSTGRADUATE SCHOOL

Joel Hass
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, DAVIS

Frank R. Giordano
NAVAL POSTGRADUATE SCHOOL

Tradução

Thelma Guimarães

Leila Maria Vasconcellos Figueiredo
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Revisão técnica

Claudio Hirofume Asano
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PEARSON
Addison Wesley

ABDR
EDITORA AFILIADA

São Paulo

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha Guatemala México Peru Porto Rico Venezuela

© 2009 by Pearson Education do Brasil

Tradução autorizada a partir da edição original em inglês Thomas' Calculus — Early Transcendentals, 11th ed., publicada pela Pearson Education Inc., sob o selo Addison Wesley.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Pearson Education do Brasil.

Diretor editorial: Roger Trimer
Gerente editorial: Sabrina Cairo
Supervisor de produção editorial: Marcelo Françozo
Editor: Henrique Zanardi de Sá
Preparação: Maria Luiza Favret e Érica Alvim
Revisão: Hebe Ester Lucas e Maria Alice da Costa
Capa: Rafael Mazzo (sobre o projeto original de © Benjamin Mendlowitz)
Projeto gráfico: ERJ Composição Editorial e Artes Gráficas Ltda.
Produção gráfica e diagramação: Lucas Godoy, Jordana Chaves, Tatiana Yamada e Bráulio Nogueira (Casa de Idéias)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Weir, Maurice D.
Cálculo (George B. Thomas Jr.), volume I / Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano ; tradução Thelma Guimarães e Leila Maria Vasconcellos Figueiredo ; revisão técnica Claudio Hirofume Asano. — São Paulo : Addison Wesley, 2009.

Título original: Cauculus.
11. ed. americana.
ISBN 978-85-88639-31-7

1. Cálculo I. Hass, Joel. II. Giordano, Frank R.. III. Asano, Cláudio Hirofume. IV. Título.

08-06054 CDD-515

Índices para catálogo sistemático:
1. Cálculo : Matemática 515

2008
Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos
à Pearson Education do Brasil Ltda.,
uma empresa do grupo Pearson Education.
Av. Ermano Marchetti, 1.435
CEP: 05038-001 – Lapa – São Paulo – SP
Tel.: (11) 2178-8686 – Fax: (11) 2178-8688
e-mail: vendas@pearsoned.com

Sumário

1 Funções 1

1.1 Funções e seus gráficos 1
1.2 Identificando funções; modelos matemáticos 10
1.3 Combinando funções; transladando e mudando a escala de gráficos 20
1.4 Construindo gráficos com calculadoras e computadores 29
1.5 Funções exponenciais 38
1.6 Funções inversas e logaritmos 45
Questões de revisão 59
Exercícios práticos 60
Exercícios adicionais 62
Exercícios avançados 64
Projetos de aplicação de tecnologia 65

2 Limites e continuidade 66

2.1 Taxas de variação e limites 66
2.2 Como calcular limites usando as leis do limite 78
2.3 Definição precisa de limite 85
2.4 Limites laterais e limites envolvendo o infinito 95
2.5 Limites infinitos e assíntotas verticais 109
2.6 Continuidade 118
2.7 Retas tangentes e derivadas 130
Questões de revisão 137
Exercícios práticos 138
Exercícios adicionais 139
Exercícios avançados 142
Projetos de aplicação de tecnologia 144

3 Derivação 145

3.1 A derivada como função 145
3.2 Regras de derivação para polinômios, exponenciais, produtos e quocientes 156
3.3 A derivada como taxa de variação 169
3.4 Derivadas de funções trigonométricas 180
3.5 A regra da cadeia e as equações paramétricas 187
3.6 Derivação implícita 202
3.7 Derivadas de funções inversas e logaritmos 211
3.8 Funções trigonométricas inversas 222
3.9 Taxas relacionadas 231
3.10 Linearização e diferenciais 240
Questões de revisão 253
Exercícios práticos 254
Exercícios adicionais 260
Exercícios avançados 263
Projetos de aplicação de tecnologia 264

4 Aplicações das derivadas 265

4.1 Extremos de funções 265
4.2 Teorema do valor médio 277
4.3 Funções monotônicas e o teste da primeira derivada 286
4.4 Concavidade e esboço de curvas 292
4.5 Problemas de otimização aplicada 303
4.6 Formas indeterminadas e a regra de L'Hôpital 317
4.7 O método de Newton 327
4.8 Primitivas 333
Questões de revisão 344
Exercícios práticos 345
Exercícios adicionais 349
Exercícios avançados 353
Projetos de aplicação de tecnologia 353

5 Integração 354

5.1 Estimando com somas finitas 354
5.2 Notação sigma e limites de somas finitas 365
5.3 A integral definida 373
5.4 O teorema fundamental do cálculo 387
5.5 Integrais indefinidas e a regra da substituição 399
5.6 Substituição e área entre curvas 407
Questões de revisão 418
Exercícios práticos 419
Exercícios adicionais 423
Exercícios avançados 427
Projetos de aplicação de tecnologia 428

6 Aplicações de integrais definidas 429

6.1 Volumes por fatiamento e rotação em torno de um eixo 429
6.2 Volume por cascas cilíndricas 441
6.3 Comprimento de curvas planas 449
6.4 Momentos e centros de massa 457
6.5 Áreas de superfícies de revolução e os teoremas de Pappus 468
6.6 Trabalho 480
6.7 Forças e pressões de fluido 489
Questões de revisão 495
Exercícios práticos 495
Exercícios adicionais 498
Exercícios avançados 500
Projetos de aplicação de tecnologia 501

7 Funções transcendentes e integrais 502

7.1 O logaritmo definido como uma integral 502
7.2 Crescimento e decaimento exponencial 515
7.3 Taxas relativas de crescimento 525
7.4 Funções hiperbólicas 531
Questões de revisão 542
Exercícios práticos 543
Exercícios adicionais 544
Exercícios avançados 545

8 Técnicas de integração 546

8.1 Fórmulas de integração básica 546
8.2 Integração por partes 553
8.3 Integração de funções racionais por frações parciais 563
8.4 Integrais trigonométricas 573
8.5 Substituições trigonométricas 578
8.6 Tabelas de integrais e sistemas de álgebra por computador 584
8.7 Integração numérica 595
8.8 Integrais impróprias 611
Questões de revisão 626
Exercícios práticos 626
Exercícios adicionais 630
Exercícios avançados 633
Projetos de aplicação de tecnologia 634

9 Outras aplicações da integração 635

9.1 Campos de direções e equações diferenciais separáveis 635
9.2 Equações diferenciais lineares de primeira ordem 643

9.3 Método de Euler 652
9.4 Soluções gráficas de equações diferenciais autônomas 658
9.5 Aplicações de equações diferenciais de primeira ordem 666
Questões de revisão 674
Exercícios práticos 675
Exercícios adicionais 677
Exercícios avançados 678
Projetos de aplicação da tecnologia 678

Apêndice A 679

A.1 Indução matemática 679
A.2 Provas dos teoremas dos limites 682
A.3 Limites que aparecem freqüentemente 685
A.4 Teoria dos números reais 686
A.5 Números complexos 690
A.6 A propriedade distributiva para produtos vetoriais 690
A.7 O teorema das derivadas mistas e o teorema do incremento 691
A.8 A área da projeção de um paralelogramo em um plano 696
A.9 Álgebra básica, geometria e fórmulas trigonométricas 697

Apêndice B 702

B.1 Números reais e a reta real 702
B.2 Retas, círculos e parábolas 708
B.3 Funções trigonométricas 718

Respostas selecionadas 726

Índice remissivo 769

Breve tabelas de integrais 778

Prefácio

Ao preparar a décima primeira edição de *Cálculo*, buscamos captar o estilo e os pontos fortes das edições anteriores. Nosso objetivo era recuperar as melhores características das clássicas edições da obra e, ao mesmo tempo, ouvir cuidadosamente as sugestões de nossos inúmeros usuários e revisores. Com esses padrões elevados em mente, reelaboramos os exercícios e esclarecemos alguns tópicos difíceis. Nas palavras de George Thomas, "tentamos escrever o livro da maneira mais clara e precisa possível". Além disso, reestruturamos o conteúdo, para que se tornasse mais lógico e adequado ao currículo universitário padrão. A experiência nos ensinou muitas coisas, que nos ajudaram a criar um livro útil e atraente para os estudantes.

Esta edição foi estruturada de maneira que a maioria das funções transcendentes é apresentada no Capítulo 1. Essas funções, e são esmiuçadas ao longo dos demais capítulos na forma de exemplos e exercícios. Essa abordagem dá aos alunos a oportunidade de trabalhar com funções transcendentes e, ao mesmo tempo, com as polinomiais e racionais, à medida que estudam limites, derivadas e integrais.

Ao terminar este livro, os alunos estarão familiarizados com a linguagem matemática — o suficiente para aplicar os conceitos de cálculo em inúmeros problemas da ciência e da engenharia. Estarão, também, bem preparados para cursos de equações diferenciais, álgebra linear ou cálculo avançado.

Inovações da décima primeira edição

EXERCÍCIOS Exercícios e exemplos desempenham papel crucial no aprendizado de cálculo. Nesta nova edição, incluímos muitos dos exercícios que constavam de edições anteriores — e que constituíam um de seus grandes trunfos. Ao final de cada seção, organizamos e agrupamos os exercícios por tópicos, progredindo de problemas de cálculo até problemas teóricos e aplicados. Essa estrutura permite aos alunos ganhar desenvoltura no uso dos métodos de cálculo, bem como aprofundar seu entendimento sobre suas aplicações e estrutura matemática correspondente.

Exercícios avaçados

A edição brasileira inclui, ao final de cada capítulo, a Seção "Exercícios avançados", a qual contempla uma série de questões que além de tornarem a obra ainda mais desafiadora, oferecem aos alunos mais uma oportunidade de aprimorarem sua compreensão das teorias e aplicações abordadas no capítulo. O conteúdo dessas seções foram desenvolvidos pelas professoras Helena Maria Ávila de Castro e Sônia Regina Leite Garcia, e suas respostas estão disponíveis no Companion Website do livro (**www.aw.com/thomas_br**).

RIGOR O nível de rigor, quando comparado ao das edições anteriores, é mais consistente ao longo de toda a obra. Oferecemos explicações formais e informais, deixando clara a diferença entre as duas, e incluímos definições precisas e provas acessíveis aos estudantes. O livro é organizado de modo que o conteúdo possa ser visto informalmente, dando ao professor certo grau de flexibilidade. Por exemplo, embora não provemos que uma função contínua em um intervalo limitado e fechado possua um máximo, enunciamos esse teorema cuidadosamente e o utilizamos para provar vários resultados subseqüentes. Além disso, o capítulo sobre limites foi substancialmente reorganizado, dando-se atenção bem maior à clareza e à precisão. Como nas edições anteriores, o conceito de limite ainda é impulsionado pela importante idéia de obter o coeficiente angular da reta tangente à curva em determinado ponto.

CONTEÚDO Durante a preparação desta edição, prestamos muita atenção às sugestões e comentários de leitores das edições anteriores e de nossos revisores. Isso resultou em extensas revisões e mudanças em vários capítulos.

- **Funções** O Capítulo 1 discute o conceito de função, assim como sua aplicação em operações e transformações. As funções exponenciais são apresentadas algebricamente, e os logaritmos, como suas inversas. As funções trigonométricas inversas são apresentadas rapidamente. Funções lineares e as seis funções trigonométricas básicas são discutidas no Apêndice B. O logaritmo natural, definido como uma integral, e a função exponencial como sua inversa são depois explanados no Capítulo 7, com base em nossa abordagem algébrica inicial.
- **Limites** O Capítulo 2 inclui definições épsilon-delta, provas de muitos teoremas, limites ao infinito e limites infinitos (e sua relação com as assíntotas de um gráfico).
- **Derivadas** Nos capítulos 3 e 4, apresentamos a derivada e suas importantes aplicações. A derivada da função exponencial é derivada junto com as de funções polinomiais e racionais, permitindo seu uso imediato com todas essas funções. Derivadas de funções inversas, de logaritmos e das funções trigonométricas inversas aparecem algumas seções depois. O Capítulo 4 encerra o assunto com o conceito de primitiva, preparando o terreno para a integração.
- **Integração** Depois de discutir vários exemplos de somas finitas, introduzimos, no Capítulo 5, a integral definida no contexto tradicional da área sob uma curva. Após discutir o teorema fundamental do cálculo, traçamos uma ponte entre derivadas e primitivas para apresentar a

integral indefinida, assim como a regra de substituição para integração. O tradicional capítulo sobre aplicações das integrais definidas vem a seguir.

- **Técnicas de integração** As principais técnicas de integração, inclusive a numérica, são apresentadas no Capítulo 8. Antes disso, está a abordagem formal das funções transcendentes, na qual definimos o logaritmo natural como uma integral e a função exponencial como sua inversa.
- **Equações diferenciais** A maior parte do conteúdo sobre resolução de equações diferenciais básicas está agora organizada em um único capítulo, o 9. Essa organização dá maior flexibilidade ao professor na abordagem desses tópicos.
- **Seções cônicas** A pedido de inúmeros leitores, o Capítulo 10, já no Volume II sobre seções cônicas, foi inteiramente recuperado. Esse capítulo completa o material sobre equações paramétricas, fornecendo parametrizações de parábolas, hipérboles e ciclóides.
- **Séries** No Capítulo 11, recuperamos a explicação mais completa dos testes de convergência para séries. Incluímos, também, uma breve seção apresentando a série de Fourier no fim do capítulo.
- **Vetores** Para evitar repetição das idéias algébricas e geométricas básicas, combinamos a discussão sobre vetores bi e tridimensionais em um único capítulo, o 12. Segue-se a essa explanação um capítulo sobre funções com valores vetoriais no plano e no espaço.
- **Os números reais** Preparamos um novo e conciso apêndice sobre a teoria dos números reais aplicada ao cálculo.

PROJETO GRÁFICO Percebemos que figuras e ilustrações são um componente crítico para o aprendizado do cálculo, por isso passamos a ver com outros olhos a parte gráfica do livro. Ao revisar as figuras preexistentes e criar novas, buscamos aumentar a clareza com que ilustram os conceitos a elas associados. Isso fica especialmente evidente no caso dos gráficos tridimensionais, em que conseguimos indicar melhor a profundidade, a sobreposição de camadas e a rotação (veja as figurasa seguir).

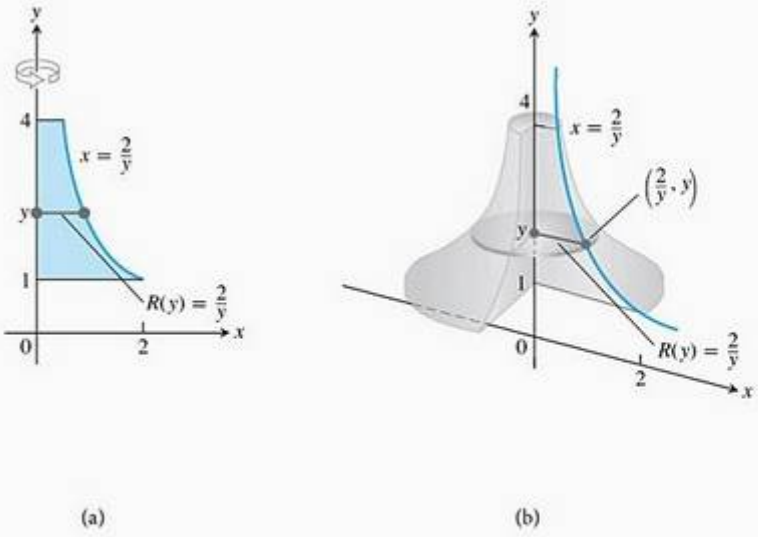


FIGURA 6.11 Determinando o volume do sólido gerado pela rotação da região (a) em torno do eixo y.

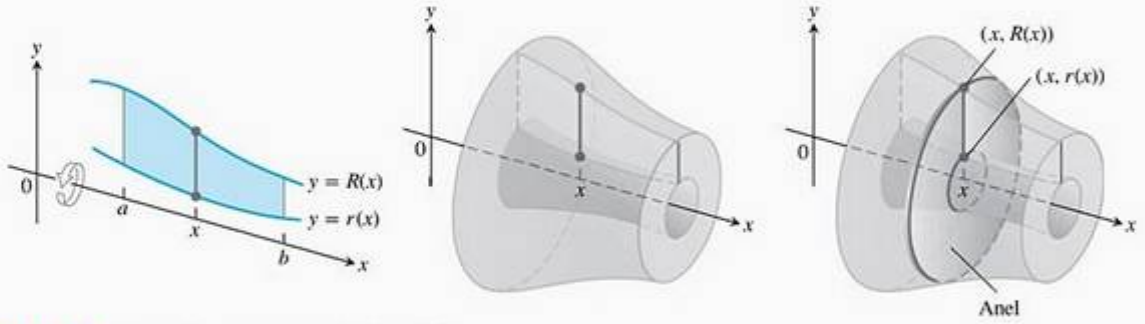


FIGURA 6.13 As seções transversais do sólido de revolução gerado aqui são anéis, não discos.

Características preservadas

PROJETOS E REVISÕES NO FIM DOS CAPÍTULOS Além dos problemas apresentados no fim das seções, cada capítulo se encerra com questões de revisão, exercícios práticos, abrangendo todo o conteúdo abordado e uma série de exercícios adicionais, que incluem problemas que sintetizam vários tópicos. A maioria dos capítulos também inclui sugestões de projetos que podem ser desenvolvidos pelos alunos, individualmente ou em grupo. Esses projetos exigem o uso de computador e material extra, que está disponível (em inglês) no Companion Website do livro (**www.aw.com/thomas_br**).

QUESTÕES DISCURSIVAS Ao longo de todo o livro, questões discursivas pedem aos alunos que explorem e expliquem uma série de conceitos e aplicações de cálculo. Além disso, no fim de cada capítulo consta uma lista de questões para os alunos revisarem e resumirem o que aprenderam. Muitas delas são um bom exercício de redação.

RESPOSTAS São apresentadas, quando apropriado, as respostas selecionadas dos exercícios de número ímpar do final das seções e dos exercícios práticos e adicionais.

CORREÇÃO MATEMÁTICA Como nas edições anteriores, tomamos o cuidado de afirmar apenas o que é verdadeira e matematicamente correto. Todas as definições, teoremas, corolários e provas foram revistos em termos de clareza e correção matemática.

REDAÇÃO E APLICAÇÕES Como sempre, este livro apresenta fácil leitura, com linguagem simplificada, e é matematicamente rico. Cada novo tópico parte de exemplos claros e fáceis de entender, sendo, em seguida, reforçado por sua aplicação em problemas do mundo real, que interessam de imedia-

to aos estudantes. Uma inovação da obra é a aplicação do cálculo à ciência e à engenharia. Nas últimas edições, esses problemas aplicados foram atualizados, aprimorados e tiveram seu número continuamente ampliado.

TECNOLOGIA Em um curso que adota este livro, a tecnologia pode ser incorporada ao gosto do professor. Todas as seções trazem exercícios que exigem o uso de tecnologia, que são apontados por um T, quando adequados ao uso de uma calculadora ou de um computador. Para os exercícios constantes da Seção "Usando o computador", um sistema de álgebra por computador (SAC, como o Maple ou o Mathematica) é necessário. Embora continuemos a dar apoio ao uso da tecnologia, diminuímos sua visibilidade dentro dos capítulos que vieram da décima edição.

Material adicional

Companion Website

No Companion Website deste livro (**www.aw.com/thomas_br**), professores e estudantes têm acesso a diversos materiais adicionais que facilitam tanto a exposição das aulas como o processo de aprendizagem.

Para o professor

Manual de soluções (em inglês): material que contém soluções para a maioria dos exercícios do livro.

Apresentação em PowerPoint: material que contém as principais ilustrações do livro e estão disponíveis em português.

Esses materiais são de uso exclusivo dos professores e são protegidos por senha. Para ter acesso a eles, os professores que adotam o livro devem entrar em contato com um representante Pearson ou diretamente com a Pearson Education do Brasil.

Para o aluno

Biografias históricas: informações históricas e ensaios relacionados à matemática. (Ícones na lateral do livro indicam os textos a serem consultados no site.)

Exercícios adicionais: exercícios de múltipla escolha que são corrigidos automaticamente. Quando necessário, os professores podem receber as respostas por e-mail.

Outros recursos

Manuais de tecnologia: módulos para o uso com o Mathematica e com o Maple, em inglês, foram cuidadosamente planejados para ajudar os alunos a desenvolver sua intuição geométrica e aprofundar sua compreensão dos conceitos e métodos estudados. Baseados em aplicações reais, eles ajudam o aluno a visualizar o cálculo e descobrir sua importância no cotidiano. É necessário o uso do Mathematica ou do Maple para acessar esses módulos.

Agradecimentos

Gostaríamos de expressar nosso agradecimento às pessoas que fizeram inúmeras contribuições valiosas para esta edição em todas as etapas do seu desenvolvimento:

Editores de desenvolvimento
Elka Block
David Chelton
Frank Purcell
Revisores de cálculos
William Ardis
Karl Kattchee
Douglas B. Meade
Robert Pierce
Frank Purcell
Marie Vanisko
Thomas Wegleitner
Supervisores
Harry Allen, *Ohio State University*
Rebecca Goldin, *George Mason University*
Christopher Heil, *Georgia Institute of Technology*
Dominic Naughton, *Purdue University*
Maria Terrell, *Cornell University*
Clifford Weil, *Michigan State University*
Revisores
Robert Andersen, University of Wisconsin–Eau Claire
Charles Ashley, Villanova University
David Bachman, California Polytechnic State University
Elizabeth Bator, University of North Texas
William Bogley, Oregon State University
Kaddour Boukaabar, California University of Pennsylvania
Deborah Brandon, Carnegie Mellon University
Mark Bridger, Northeastern University
Sean Cleary, City College of New York
Edward Crotty, University of Pennsylvania
Mark Davidson, Louisiana State University
Richard Davitt, University ofLouisville
Elias Deeba, University of Houston, Downtown Campus
Anne Dougherty, University of Colorado lege
Tim Flood, Pittsburg State University
Robert Gardner, East Tennessee State University
John Gilbert, University of Texas at Austin
Ian Gladwell, Southern Methodist University
Mark Hanisch, Calvin College
Zahid Hasan, California State University, San Bernardino
Jo W. Heath, Auburn University
Ken Holladay, University of New Orleans
Hugh Howards, Wake Forest University
Dwayne Jennings, Union University
Matthias Kawaski, Arizona State University
Bill Kincaid, Wilmington College
Mark M. Maxwell, Robert Morris University
Jack Mealy, Austin College
Richard Mercer, Wright State University
Victor Nistor, Pennsylvania State University
Michael O'Leary, Towson University
Bogdan Oporowski, Louisiana State University
Erik Plahte, Agricultural University of Norway
Troy Riggs, Union University
Ferdinand Rivera, San Jose State University
Mohammed Saleem, San Jose State University
Paul Seeburger, Monroe Community College
Tatiana Shubin, San Jose State University
Alex Smith, University of Wisconsin-Eau Claire
Donald Solomon, University of Wisconsin–Milwaukee
Chia Chi Tung, Minnesota State University
William L. Van Alstine, Aiken Technical College
Bobby Winters, Pittsburg State University
Dennis Wortman, University of Massachusetts at Boston
Participantes de pesquisas
Omar Adawi, *Parkland College*
Siham Alfred, *Raritan Valley Community College*
Donna J. Bailey, *Truman State University*
Rajesh K. Barnwal, *Middle Tennessee State University*
Robert C. Brigham, *University of Central Florida*
Thomas A. Carnevale, *Valdosta State University*
Leonard Chastkofsky, *University of Georgia*
Richard Dalrymple, *Minnesota West Community & Technical College*
W. Lloyd Davis, *College of San Mateo*
Will-Matthis Dunn III, *Montgomery College*
George F. Feissner, *SUNY College at Cortland*
Bruno Harris, *Brown University*
Celeste Hernandez, *Richland College*
Wei-Min Huang, *Lehigh University*
Herbert E. Kasube, *Bradley University*
Frederick W. Keene, *Pasadena City College*
Michael Kent, *Borough of Manhattan Community College*
Robert Levine, *Community College of Allegheny County, Boyce Campus*
John Martin, *Santa Rosa Junior College*
Michael Scott McClendon, *University of Central Oklahoma*
Ching-Tsuan Pan, *Northern Illinois University*
Emma Previato, *Boston University*
S.S. Ravindran, *University of Alabama*
Dan Rothe, *Alpena Community College*
John T. Saccoman, *Seton Hall University*
Mansour Samimi, *Winston-Salem State University*
Ned W. Schillow, *Lehigh Carbon Community College*
W.R. Schrank, *Angelina College*
Mark R. Woodard, *Furman University*

1 Funções

RESUMO Este capítulo aborda as idéias básicas que você precisa conhecer para iniciar o aprendizado do cálculo. Funções são fundamentais para o estudo do cálculo, e aqui discutiremos o que elas são, seus gráficos, como se combinam e transformam e várias maneiras de classificá-las. Uma função pode ser representada por uma equação, uma tabela numérica, um gráfico ou, ainda, ser descrita verbalmente. O gráfico de uma função é uma maneira particularmente útil de visualizar seus atributos e seu comportamento geral; discutiremos várias maneiras de obter um gráfico, incluindo o uso de calculadoras gráficas e software gráfico. Examinaremos os principais tipos de função que aparecem em cálculo, com ênfase especial, neste capítulo, para as funções exponenciais e suas inversas, as funções logarítmicas. As funções trigonométricas aparecem resumidas no Apêndice B, com vários outros assuntos básicos, incluindo o sistema de números reais, as coordenadas cartesianas no plano, retas, parábolas e círculos.

1.1 Funções e seus gráficos

As funções são o elemento-chave para descrever o mundo real em termos matemáticos. Nesta seção, são discutidas as idéias básicas das funções, seus gráficos e métodos para representá-los.

Funções; domínio e imagem

A temperatura de ebulição da água depende da altitude (o ponto de ebulição diminui quando a altitude aumenta). Os juros pagos sobre um investimento dependem do tempo que o dinheiro permanece investido. A área de um círculo depende do raio desse círculo. A distância que um objeto percorre a uma velocidade constante, a partir de um ponto inicial, ao longo de uma trajetória reta, depende do tempo transcorrido.

Em todos os casos, o valor de uma variável, que podemos chamar y, depende do valor de outra, que podemos denominar x. Uma vez que o valor de y é completamente determinado pelo valor de x, dizemos que y é uma função de x. Muitas vezes, o valor de y é dado por uma *regra* ou fórmula que diz como calculá-lo a partir da variável x. Por exemplo, a equação $A = \pi r^2$ é uma regra que calcula a área A de um círculo a partir de seu raio r.

Em cálculo, também podemos querer nos referir a uma função não especificada sem ter qualquer fórmula particular em mente. Uma maneira simbólica de dizer "y é função de x" é escrever

$$y = f(x) \qquad (\text{"}y \text{ é igual a } f \text{ de } x\text{"})$$

Nessa notação, o símbolo f representa a função. A letra x, chamada **variável independente**, representa o valor de entrada de f, e y, a **variável dependente**, representa o valor de saída de f em x.

Definição **Função**

Uma **função** de um conjunto D para um conjunto Y é uma regra que associa um *único* elemento $f(x) \in Y$ a cada elemento $x \in D$.

O conjunto D de todas os possíveis valores de entrada chama-se **domínio** da função. O conjunto de todos os valores $f(x)$ enquanto x varia ao longo de D denomina-se **imagem** da função. A imagem não inclui necessariamente todos os elementos do conjunto Y.

O domínio e a imagem de uma função podem ser quaisquer conjuntos de objetos, mas normalmente, em cálculo, os conjuntos são de números reais. (Nos capítulos 13–16, Volume II veremos funções de várias variáveis.)

Pense numa função f como num tipo de máquina que produz um valor $f(x)$ em sua imagem sempre que a alimentamos com um valor de entrada x oriundo de seu domínio (Figura 1.1). As teclas de função das calculadoras nos permitem visualizar uma função como se fosse uma máquina. Por exemplo, a tecla $\sqrt{x}$ nos retorna um produto (a raiz quadrada) sempre que inserimos um número x não negativo e apertamos essa tecla. O resultado que aparece no visor geralmente é uma aproximação decimal da raiz quadrada de x. Se inserirmos um número $x < 0$, a calculadora indicará erro, pois $x < 0$ não está no domínio da função e não pode ser aceito como valor de entrada. A tecla $\sqrt{x}$ da calculadora não é exatamente igual à função matemática f definida por $f(x) = \sqrt{x}$, pois se limita a resultados decimais e tem apenas uma quantidade grande, porém finita, de resultados.

FIGURA 1.1 Diagrama que mostra a função como uma espécie de "máquina".

Uma função também pode ser ilustrada como um **diagrama de setas** (Figura 1.2). Cada seta associa um elemento do domínio D a um único elemento do conjunto Y. Na Figura 1.2, as setas indicam que $f(a)$ está associada a a, $f(x)$ está associada a x e assim por diante.

O domínio de uma função pode ser restrito pelo contexto. Por exemplo, o domínio da função área dada por $A = \pi r^2$ exige que o raio r seja positivo. Quando definimos uma função $y = f(x)$ com uma fórmula e o domínio não é citado explicitamente ou restrito pelo contexto, considera-se que o domínio seja o maior conjunto de valores de x para os quais a fórmula fornece valores reais de y, o chamado **domínio natural**. Se queremos restringir o domínio de algum modo, devemos explicitá-lo. O domínio de $y = x^2$ é o conjunto de todos os números reais. Por exemplo, para restringirmos a função a valores positivos de x, deveríamos escrever "$y = x^2, x > 0$".

Se o domínio ao qual aplicamos a fórmula mudar, normalmente a imagem também mudará. A imagem de $y = x^2$ é $[0, \infty)$. A imagem de $y = x^2$, $x \geq 2$, é o conjunto de todos os números obtidos elevando-se ao quadrado números maiores ou iguais a 2. Em notação de conjuntos, a imagem será $\{x^2 \mid x \geq 2\}$ ou $\{y \mid y \geq 4\}$ ou $[4, \infty)$.

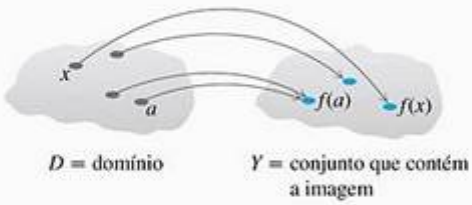


FIGURA 1.2 Uma função do conjunto D para o conjunto Y associa um único elemento de Y a cada elemento de D.

Quando a imagem de uma função é um conjunto de números reais, dizemos que a função é uma **função a valores reais**. Os domínios e as imagens de muitas funções a valores reais de uma variável real são intervalos ou combinações de intervalos. Os intervalos podem ser abertos, fechados ou semiabertos, além de finitos ou infinitos.

EXEMPLO 1 Identificando domínios e imagens

Verifique os domínios e as imagens destas funções.

Função	Domínio (x)	Imagem (y)
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$	$(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4-x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

SOLUÇÃO A fórmula $y = x^2$ fornece um valor real de y para qualquer número real x, então o domínio é $(-\infty, \infty)$. A imagem de $y = x^2$ é $[0, \infty)$, porque o quadrado de qualquer número real é não negativo e qualquer número não negativo y é o quadrado da própria raiz quadrada, $y = (\sqrt{y})^2$ para $y \geq 0$.

A fórmula $y = 1/x$ fornece um valor real de y para cada valor real de x, exceto $x = 0$. *Não podemos dividir qualquer número por* 0. A imagem de $y = 1/x$, o conjunto de recíprocos de todos os números reais diferentes de zero, é o conjunto de todos os números reais diferentes de zero, uma vez que $y = 1/(1/y)$.

A fórmula $y = \sqrt{x}$ fornece um valor real de y somente quando x é positivo ou zero. A imagem de $y = \sqrt{x}$ é $[0, \infty)$, porque qualquer número não negativo é a raiz quadrada de algum número (especificamente, é a raiz quadrada do próprio quadrado).

Em $y = \sqrt{4-x}$, a quantidade $4 - x$ não pode ser negativa. Ou seja, $4 - x \geq 0$ ou $x \leq 4$. A fórmula fornece valores reais de y para qualquer $x \leq 4$. A imagem de $\sqrt{4-x}$ é $[0, \infty)$, o conjunto de todos os números não negativos.

A fórmula $y = \sqrt{1-x^2}$ fornece um valor real de y para cada valor de x no intervalo fechado de -1 a 1. Fora desse intervalo, $1 - x^2$ é negativo e sua raiz quadrada não é um número real. Os valores de $1 - x^2$ variam de 0 a 1 no domínio dado, assim como as raízes quadradas desses valores. A imagem de $\sqrt{1-x^2}$ é $[0, 1]$.

Gráficos de funções

Também é possível visualizar uma função por meio de seu gráfico. Se f é uma função com domínio D, seu **gráfico** é formado pelos pontos do plano cartesiano cujas coordenadas sejam os pares "entrada-saída" para f. Em notação de conjunto, o gráfico é

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

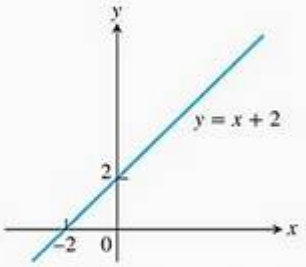


FIGURA 1.3 O gráfico de $f(x) = x + 2$ é o conjunto de pontos (x, y) para os quais y tem o valor $x + 2$.

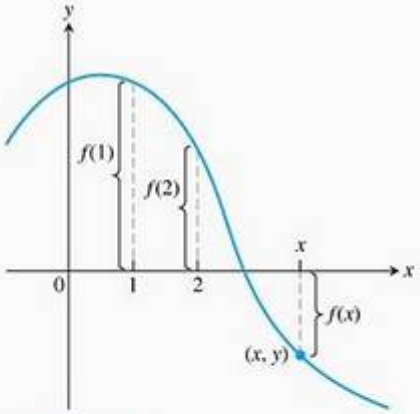


FIGURA 1.4 Se (x, y) está no gráfico de f, então o valor $y = f(x)$ é a altura do gráfico acima do ponto x (ou abaixo de x, se $f(x)$ for negativo).

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

Computadores e calculadoras gráficas constroem gráficos de funções basicamente dessa maneira — unindo pontos —, e a mesma pergunta surge.

O gráfico da função $f(x) = x + 2$ é o conjunto de pontos com coordenadas (x, y) para os quais $y = x + 2$. Seu gráfico é a reta traçada na Figura 1.3.

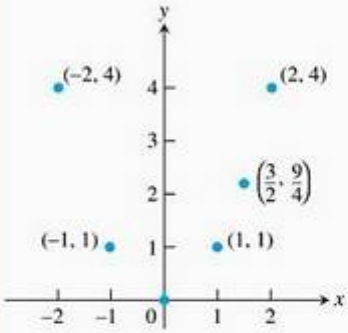
O gráfico de uma função f é um retrato útil de seu comportamento. Se (x, y) é um ponto no gráfico, então $y = f(x)$ é a altura do gráfico acima do ponto x. A altura pode ser positiva ou negativa, dependendo do sinal de $f(x)$ (Figura 1.4).

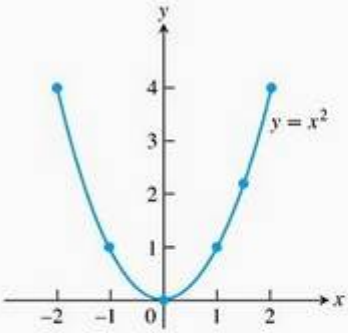
EXEMPLO 2 Traçando um gráfico

Trace o gráfico da função $y = x^2$ no intervalo $[-2, 2]$.

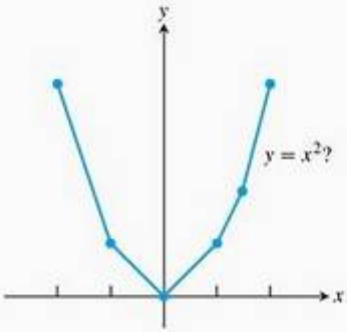
SOLUÇÃO

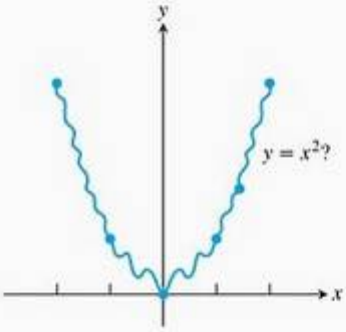
1. Faça uma tabela de pares xy que satisfaçam a regra da função, nesse caso, a equação $y = x^2$.
2. Insira no gráfico os pontos (x, y) cujas coordenadas apareçam na tabela. Use frações quando for mais conveniente ao cálculo.
3. Trace uma curva contínua unindo os pontos. Identifique a curva por sua equação.





Como sabemos que o gráfico $y = x^2$ não se parece com uma destas curvas?





Para descobrir, podemos inserir mais pontos no gráfico. Mas como conseguiríamos *uni-los*? A pergunta básica permanece: como podemos saber com certeza a aparência do gráfico entre os pontos que inserimos? A resposta está no cálculo, como veremos no Capítulo 4. Neste capítulo, usaremos a *derivada* para encontrar o formato de uma curva entre os pontos do gráfico. Por enquanto, vamos nos limitar a inserir pontos no gráfico e uni-los da melhor maneira possível.

EXEMPLO 3 Avaliando uma função a partir de seu gráfico

A Figura 1.5 mostra o gráfico de uma população p de moscas-das-frutas.

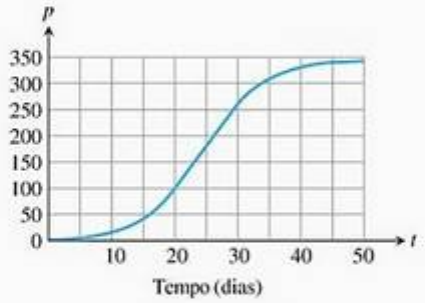


FIGURA 1.5 Gráfico de uma população de moscas-das-frutas *versus* tempo (Exemplo 3).

(a) Determine as populações após 20 e 45 dias.

(b) Qual é a variação (aproximada) da função da população no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 50$?

SOLUÇÃO

(a) Vimos, na Figura 1.5, que o ponto (20, 100) encontra-se no gráfico, portanto o valor da população p em 20 é $p(20) = 100$. Da mesma maneira, $p(45)$ é aproximadamente 340.

(b) A imagem da função da população em $0 \leq t \leq 50$ é aproximadamente [0, 345]. Observamos também que a população parece aproximar-se cada vez mais do valor $p = 350$, à medida que o tempo corre.

Representando numericamente uma função

Já vimos que uma função pode ser representada algebricamente por uma fórmula (a função área) e visualmente por um gráfico (exemplos 2 e 3). É possível, ainda, representar uma função **numericamente**, por meio de uma tabela de valores. Em geral, representações numéricas são usadas por engenheiros e cientistas aplicados. A partir de uma tabela de valores apropriada, é possível obter um gráfico da função usando o método ilustrado no Exemplo 2, possivelmente com a ajuda de um computador. O gráfico que representa apenas os pontos tabelados é chamado **gráfico de dispersão**.

EXEMPLO 4 Uma função definida por uma tabela de valores

Notas musicais são ondas de pressão no ar e podem ser registradas. Os dados da Tabela 1.1 registram o deslocamento da pressão *versus* tempo em segundos de uma nota musical produzida por um diapasão. A tabela fornece uma representação da função pressão ao longo do tempo. Se primeiro fizermos um gráfico de dispersão e, depois, unirmos os pontos (t, p) dados pela tabela, obteremos o gráfico mostrado na Figura 1.6.

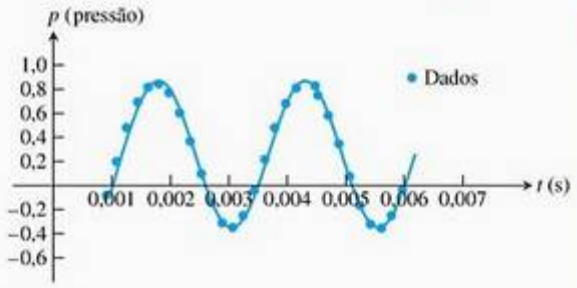


FIGURA 1.6 Uma curva contínua unindo os pontos forma o gráfico da função pressão representada na Tabela 1.1.

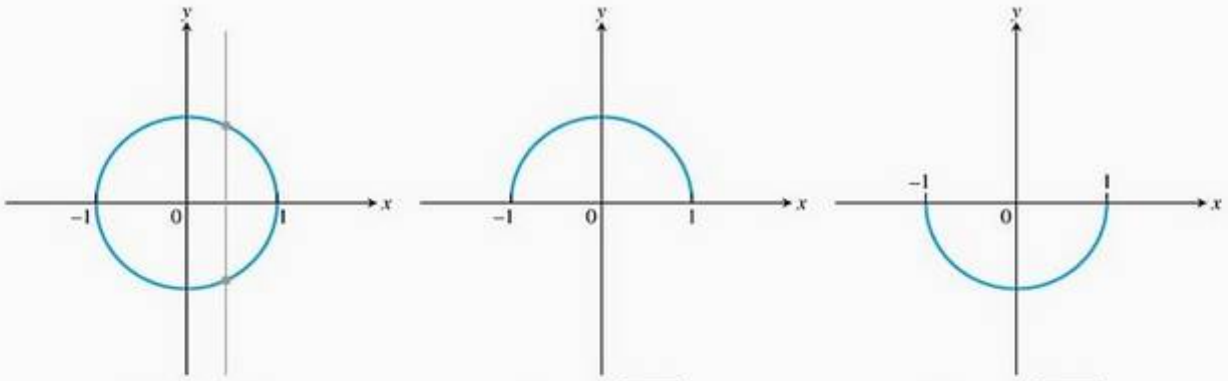
TABELA 1.1 Dados do diapasão

Tempo	Pressão	Tempo	Pressão
0,00091	−0,080	0,00362	0,217
0,00108	0,200	0,00379	0,480
0,00125	0,480	0,00398	0,681
0,00144	0,693	0,00416	0,810
0,00162	0,816	0,00435	0,827
0,00180	0,844	0,00453	0,749
0,00198	0,771	0,00471	0,581
0,00216	0,603	0,00489	0,346
0,00234	0,368	0,00507	0,077
0,00253	0,099	0,00525	−0,164
0,00271	−0,141	0,00543	−0,320
0,00289	−0,309	0,00562	−0,354
0,00307	−0,348	0,00579	−0,248
0,00325	−0,248	0,00598	−0,035
0,00344	−0,041		

O teste da reta vertical

Nem toda curva que você traçar será o gráfico de uma função. Uma função f pode ter apenas um valor $f(x)$ para cada x em seu domínio, portanto nenhuma *reta vertical* poderá cruzar a curva da função mais de uma vez. Conseqüentemente, o gráfico de uma função não pode ter forma de círculo, já que algumas retas verticais cruzam o círculo duas vezes (Figura 1.7a). Se a estiver no domínio de uma função f, a reta vertical $x = a$ vai cruzar a curva de f em um único ponto, $(a, f(a))$.

O círculo da Figura 1.7a, no entanto, contém os gráficos de *duas* funções de x: o semicírculo superior, definido pela função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, e o semicírculo inferior, definido pela função $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ (figuras 1.7b e 1.7c).



(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $y = \sqrt{1 - x^2}$ (c) $y = -\sqrt{1 - x^2}$

FIGURA 1.7 (a) Um círculo não pode ser o gráfico de uma função; ele não passa no teste da reta vertical. (b) O semicírculo superior é o gráfico de uma função $f(x) = \times\sqrt{1-x^2}$. (c) O semicírculo inferior é o gráfico de uma função $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

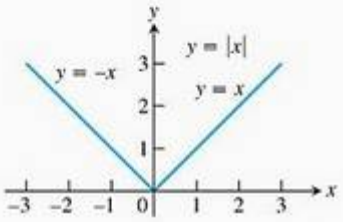


FIGURA 1.8 A função valor absoluto tem domínio $(-\infty, \infty)$ e imagem $[0, \infty)$.

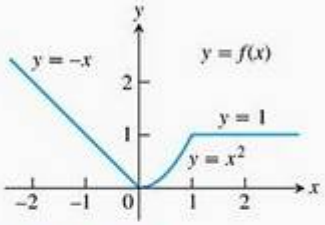


FIGURA 1.9 Para fazer o gráfico da função $y = f(x)$ mostrada aqui, aplicamos diferentes fórmulas a diferentes partes do domínio (Exemplo 5).

Funções definidas em partes

Às vezes, descrevemos uma função aplicando fórmulas diferentes a partes diferentes de seu domínio. Um exemplo é a **função do valor absoluto**

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

cujo gráfico é dado na Figura 1.8. Veja outros exemplos.

EXEMPLO 5 Fazendo gráficos de funções definidas em partes

A função

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

é definida em toda reta real, mas apresenta valores dados por diferentes fórmulas, conforme a posição de x. Os valores de f são dados por $y = -x$ quando $x < 0$, $y = x^2$ quando $0 \leq x \leq 1$ e $y = 1$ quando $x > 1$. Entretanto, a função é *apenas uma função* cujo domínio é o conjunto todo de números reais (Figura 1.9).

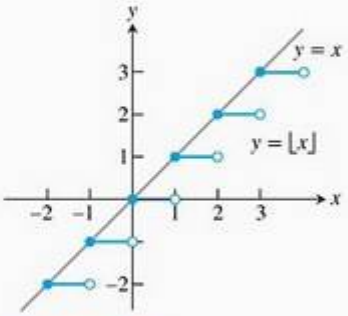


FIGURA 1.10 O gráfico da função maior inteiro $y = [[x]]$ (ou $y = \lfloor x \rfloor$) fica na reta $y = x$ ou abaixo dela, proporcionando um "piso" inteiro para x (Exemplo 6).

EXEMPLO 6 A função maior inteiro

A função cujo valor em qualquer número x é o *maior inteiro menor ou igual a x* é chamada **função maior inteiro** ou **função piso**. É denotada por $\lfloor x \rfloor$ ou, em alguns livros, $[x]$, $[[x]]$ ou int x. A Figura 1.10 mostra seu gráfico. Observe que

$$\lfloor 2,4 \rfloor = 2, \quad \lfloor 1,9 \rfloor = 1, \quad \lfloor 0 \rfloor = 0, \quad \lfloor -1,2 \rfloor = -2,$$
$$\lfloor 2 \rfloor = 2, \quad \lfloor 0,2 \rfloor = 0, \quad \lfloor -0,3 \rfloor = -1 \quad \lfloor -2 \rfloor = -2$$

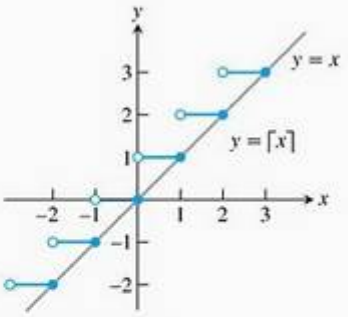


FIGURA 1.11 O gráfico da função menor inteiro $y = \lceil x \rceil$ fica na reta $y = x$ ou acima dela, proporcionando um "teto" inteiro para x (Exemplo 7).

EXEMPLO 7 A função menor inteiro

A função cujo valor em qualquer número x é o *menor inteiro maior ou igual a x* é denominada de **função menor inteiro** ou **função teto**. É denotada por $\lceil x \rceil$. A Figura 1.11 mostra seu gráfico. Para valores positivos de x, essa função pode representar, por exemplo, o custo *versus* horas passadas em um estacionamento que cobra 1 dólar por hora ou fração de hora.

EXEMPLO 8 Escrevendo fórmulas para funções definidas em partes

Escreva uma fórmula para a função $y = f(x)$ cujo gráfico é formado pelos dois segmentos de reta da Figura 1.12.

SOLUÇÃO Encontramos fórmulas para os segmentos de (0, 0) a (1, 1) e de (1, 0) a (2, 1) e as colocamos juntas como no Exemplo 5.

Segmento de (0, 0) a (1, 1) A reta que passa por (0, 0) e (1, 1) tem coeficiente angular $m = (1 - 0)/(1 - 0) = 1$ e coeficiente linear $b = 0$. Sua equação reduzida é $y = x$. O segmento de (0, 0) a (1, 1), que inclui o ponto (0, 0), mas não o ponto (1, 1), é o gráfico da função $y = x$ restrita ao intervalo semi-aberto $0 \le x < 1$, isto é,

$$y = x \qquad 0 \le x < 1$$

Segmento de (1, 0) a (2, 1) A reta que passa por (1, 0) e (2, 1) tem coeficiente angular $m = (1 - 0)/(2 - 1) = 1$ e passa pelo ponto (1, 0). A equação reduzida correspondente para a reta é

$$y = 0 + 1(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = x - 1$$

O segmento de (1, 0) a (2, 1) que inclui os dois pontos finais é o gráfico da função $y = x - 1$ restrita ao intervalo fechado $1 \le x \le 2$, isto é,

$$y = x - 1 \qquad 1 \le x \le 2$$

Fórmula em partes Combinando as fórmulas para as duas partes do gráfico, obtemos

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ x - 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

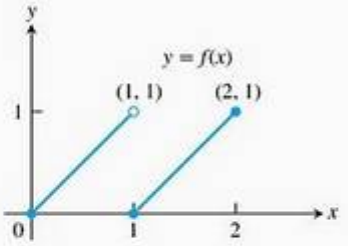


FIGURA 1.12 O segmento da esquerda contém (0, 0), mas não (1, 1). O segmento da direita contém as duas extremidades (Exemplo 8).

Exercícios 1.1

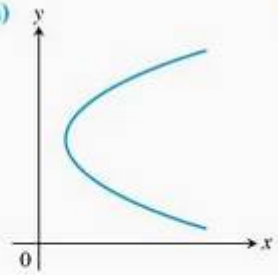
Funções

Nos exercícios 1–6, encontre o domínio e a imagem de cada função.

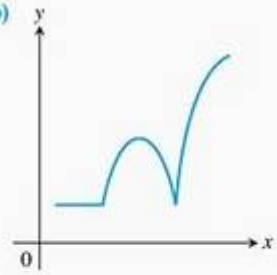
1. $f(x) = 1 + x^2$
2. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$
3. $F(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$
4. $F(t) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{t}}$
5. $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$
6. $g(z) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - z^2}}$

Nos exercícios 7 e 8, quais dos gráficos são gráficos de funções de x e quais não são? Justifique suas respostas.

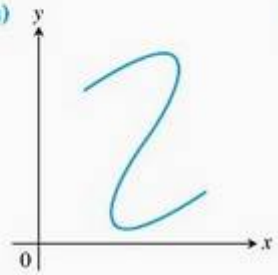
7. (a)



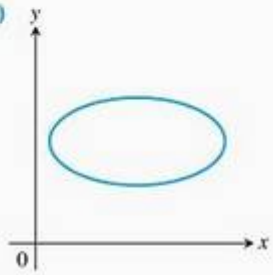
(b)



8. (a)



(b)



9. Considere a função $y = \sqrt{(1/x) - 1}$.
   (a) x pode ser negativo?
   (b) x pode ser igual a 0?
   (c) x pode ser maior que 1?
   (d) Qual é o domínio da função?
10. Considere a função $y = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$.
   (a) x pode ser negativo?
   (b) $\sqrt{x}$ pode ser maior que 2?
   (c) Qual é o domínio da função?

Encontrando fórmulas para funções

11. Expresse a área e o perímetro de um triângulo eqüilátero em função do comprimento x do lado do triângulo.
12. Expresse o comprimento do lado de um quadrado em função do comprimento d da diagonal do quadrado. Depois expresse a área do quadrado em função do comprimento da diagonal.
13. Expresse o comprimento da aresta de um cubo em função do comprimento da diagonal d. Depois expresse a área da superfície e o volume do cubo em função do comprimento da diagonal.
14. Um ponto P do primeiro quadrante está no gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$. Expresse as coordenadas de P em função do coeficiente angular da reta que liga P à origem.

Funções e gráficos

Faça o gráfico das funções nos exercícios 15–20.

15. $f(x) = 5 - 2x$
16. $f(x) = 1 - 2x - x^2$
17. $g(x) = \sqrt{|x|}$
18. $g(x) = \sqrt{-x}$
19. $F(t) = t/|t|$
20. $G(t) = 1/|t|$

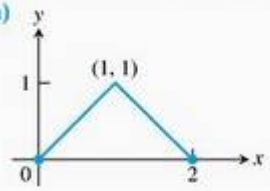
21. Faça o gráfico das equações a seguir e explique por que não são gráficos de funções de x.
   (a) $|y| = x$ (b) $y^2 = x^2$
22. Faça o gráfico das equações a seguir e explique por que não são gráficos de funções de x.
   (a) $|x| + |y| = 1$ (b) $|x + y| = 1$

Funções definidas em partes

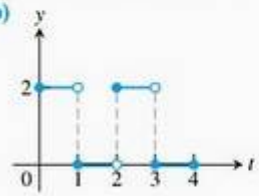
Faça o gráfico das funções nos exercícios 23–26.

23. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$
24. $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$
25. $F(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$
26. $G(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \end{cases}$
27. Encontre uma fórmula para cada função representada.

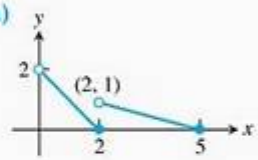
(a)



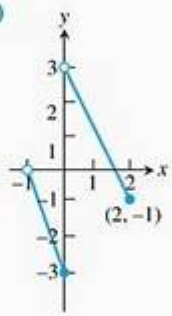
(b)



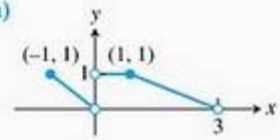
28. (a)



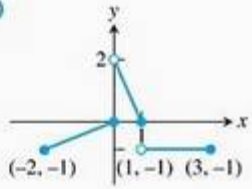
(b)



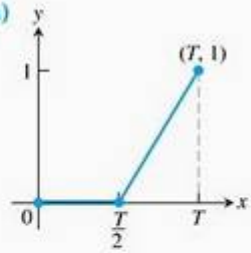
29. (a)



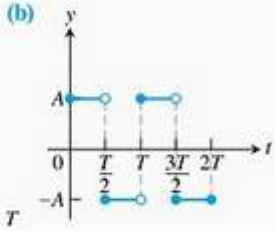
(b)



30. (a)



(b)



31. (a) Faça o gráfico das funções $f(x) = x/2$ e $g(x) = 1 + (4/x)$ juntas e identifique os valores de x para os quais

T

$$\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$$

(b) Confirme algebricamente sua resposta ao item (a).

32. (a) Faça o gráfico das funções $f(x) = 3/(x - 1)$ e $g(x) = 2/(x + 1)$ juntas e identifique os valores de x para os quais

T

$$\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$$

(b) Confirme algebricamente sua resposta ao item (a).

Funções maior e menor inteiro

33. Para quais valores de x

(a) $\lfloor x \rfloor = 0$? (b) $\lceil x \rceil = 0$?

34. Quais números reais x satisfazem a equação $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$?

35. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$ para todos os x reais? Justifique sua resposta.

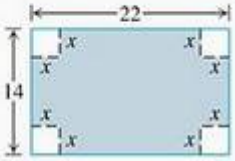
36. Faça o gráfico da função

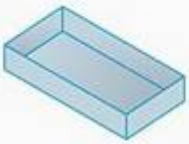
$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0 \\ \lceil x \rceil, & x < 0 \end{cases}$$

Por que $f(x)$ é chamada *parte inteira* de x?

Teoria e exemplos

37. Uma caixa sem tampa será feita com um pedaço retangular de papelão medindo 14 × 22 polegadas. Em cada canto, serão cortados quadrados iguais de lado x e, depois, as laterais serão levantadas como mostra a figura. Expresse o volume V da caixa em função de x.

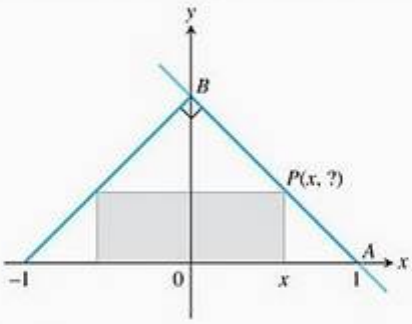




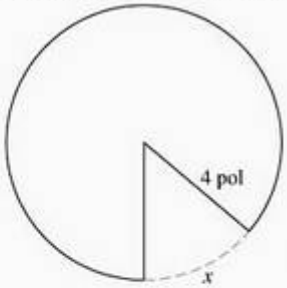
38. A figura a seguir mostra um retângulo inscrito num triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa tem 2 unidades de comprimento.

(a) Expresse a ordenada y, de P em função de x. (Você pode começar escrevendo uma equação para a reta AB.)

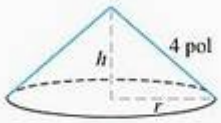
(b) Expresse a área do retângulo em função de x.



39. **O problema do cone** Comece com um pedaço de papel com 4 polegadas de raio, como está esquematizado no ítem (a). Corte um setor com um comprimento de arco x. Junte as duas extremidades da parte remanescente para formar um cone com raio r e altura h, como está indicado no ítem (b).



(a)



(b)

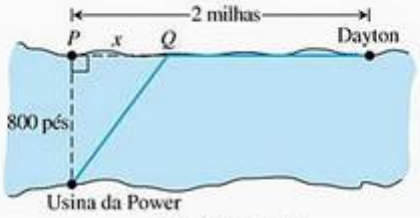
(a) Explique por que o comprimento da circunferência da base do cone é $8\pi - x$.

(b) Expresse o raio r em função de x.

(c) Expresse a altura h em função de x.

(d) Expresse o volume V do cone em função de x.

40. Custos industriais A Dayton Power and Light, Inc. tem uma usina conversora no rio Miami no lugar onde a largura do rio é de 800 pés. Os custos para passar um cabo novo da usina até um ponto na cidade localizado 2 milhas rio abaixo, no lado oposto do rio, são: 180 dólares por pé de cabo que passar sobre o rio e 100 dólares por pé de cabo estendido por terra.



(Fora de escala)

(a) Suponha que o cabo saia da usina e chegue ao ponto Q, no lado oposto, que fica x pés distante do ponto P na margem oposta à usina. Escreva uma função $C(x)$ que forneça o custo para passar o cabo em função da distância x.

(b) Gere uma tabela com valores para determinar se a distância PQ de menor custo é maior ou menor que 2.000 pés.

41. Para uma curva ser *simétrica em relação ao eixo x*, o ponto (x, y) deverá estar na curva se e somente se o ponto $(x, -y)$ estiver na curva. Explique por que uma curva que é simétrica em relação ao eixo x não é o gráfico de uma função, a menos que a função seja $y = 0$.

42. Um truque Você já deve ter ouvido falar sobre um truque que funciona assim: escolha um número. Some 5. Dobre o resultado. Subtraia 6. Divida por 2. Subtraia 2. Agora, diga o resultado e eu direi o número que você escolheu.

Você vai entender o que acontece se considerar seu número original como x e seguir os passos até montar uma fórmula $f(x)$ para o número final.

1.2 Identificando funções; modelos matemáticos

Existe uma série de tipos importantes de funções freqüentemente encontrados em cálculo. Vamos identificá-los e resumi-los brevemente nesta seção.

FUNÇÕES LINEARES Uma função com a forma $f(x) = mx + b$, para constantes m e b, é chamada **função linear**. A Figura 1.13 mostra um conjunto de retas $f(x) = mx$ onde $b = 0$, de modo que todas passam pela origem. Funções constantes ocorrem quando o coeficiente angular $m = 0$ (Figura 1.14).

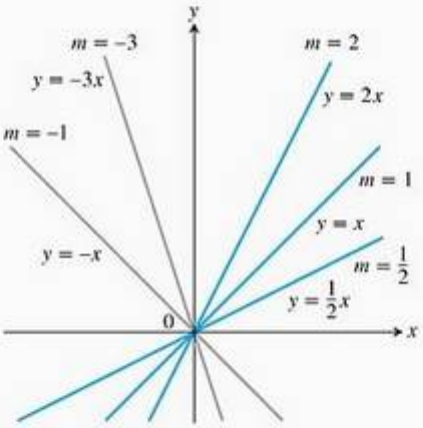


FIGURA 1.13 O conjunto de retas $y = mx$ tem coeficiente angular m e todas as retas passam pela origem.

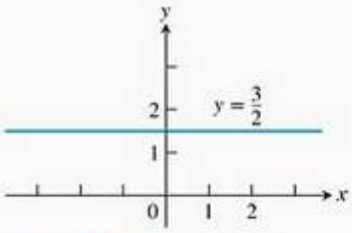


FIGURA 1.14 Uma função constante tem coeficiente angular $m = 0$.

FUNÇÕES DE POTÊNCIA Uma função $f(x) = x^a$, onde a é uma constante, é chamada **função de potência**. Existem vários casos importantes a considerar.

(a) $a = n$, um inteiro positivo

Os gráficos de $f(x) = x^n$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$, são mostrados na Figura 1.15. Essas funções são definidas para todos os valores reais de x. Observe que, à

medida que a potência n fica maior, as curvas tendem a se achatar sobre o eixo x no intervalo $(-1, 1)$ e também a subir mais repentinamente em $|x| > 1$. Todas as curvas passam pelo ponto $(1, 1)$ e pela origem.

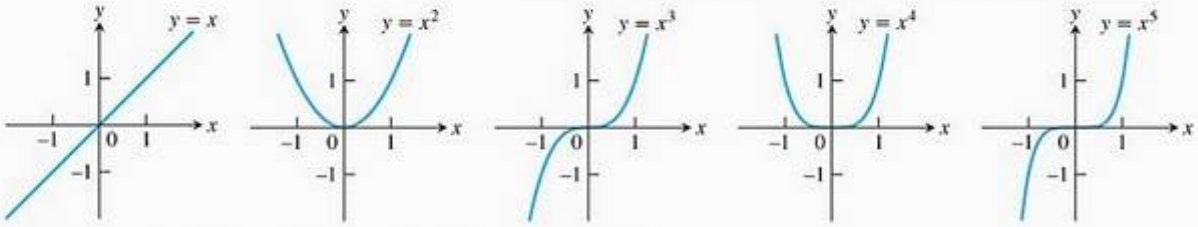


FIGURA 1.15 Gráficos de $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$, definidos para $-\infty < x < \infty$.

(b) $a = -1$ ou $a = -2$

Os gráficos das funções $f(x) = x^{-1} = 1/x$ e $g(x) = x^{-2} = 1/x^2$ são mostrados na Figura 1.16. As duas funções são definidas para todos os $x \neq 0$ (nunca se pode dividir por zero). O gráfico de $y = 1/x$ é a hipérbole $xy = 1$, que se aproxima dos eixos das coordenadas longe da origem. O gráfico de $y = 1/x^2$ também se aproxima dos eixos das coordenadas.

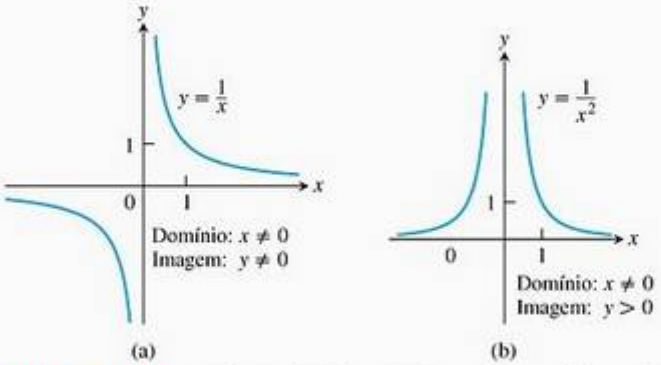


FIGURA 1.16 Gráficos das funções de potência $f(x) = x^a$ para (a) $a = -1$ e para (b) $a = -2$.

(c) $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ e $\frac{2}{3}$

As funções $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ são as funções **raiz quadrada** e **raiz cúbica**, respectivamente. O domínio da função raiz quadrada é $[0, \infty]$, mas a função raiz cúbica é definida para todos os x reais. Seus gráficos são mostrados na Figura 1.17 junto com os gráficos de $y = x^{3/2}$ e $y = x^{2/3}$. (Relembre-se de que $x^{3/2} = (x^{1/2})^3$ e $x^{2/3} = (x^{1/3})^2$.)

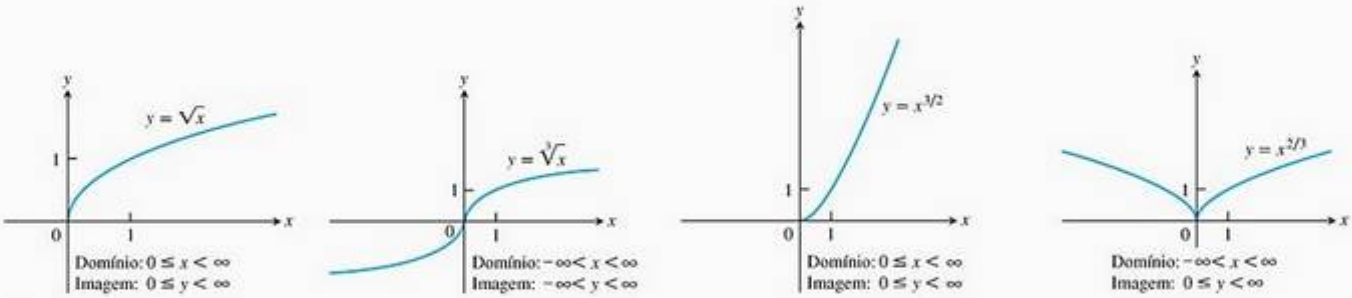


FIGURA 1.17 Gráficos das funções de potência $f(x) = x^a$ para $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ e $\frac{2}{3}$

POLINÔMIOS Uma função p é um **polinômio** se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde n é um inteiro não negativo e os números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são constantes reais (chamadas **coeficientes** do polinômio). Todos os polinômios têm domínio $(-\infty, \infty)$. Se o coeficiente dominante $a_n \neq 0$ e $n > 0$, então n é denominado **grau** do polinômio. Funções lineares com $m \neq 0$ são polinômios de grau 1. Polinômios de grau 2, normalmente indicados por $p(x) = ax^2 + bx + c$, são chamados **funções quadráticas**. De modo análogo, **funções cúbicas** são polinômios $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ de grau 3. A Figura 1.18 mostra os gráficos de três polinômios. Você aprenderá a fazer gráficos de polinômios no Capítulo 4.

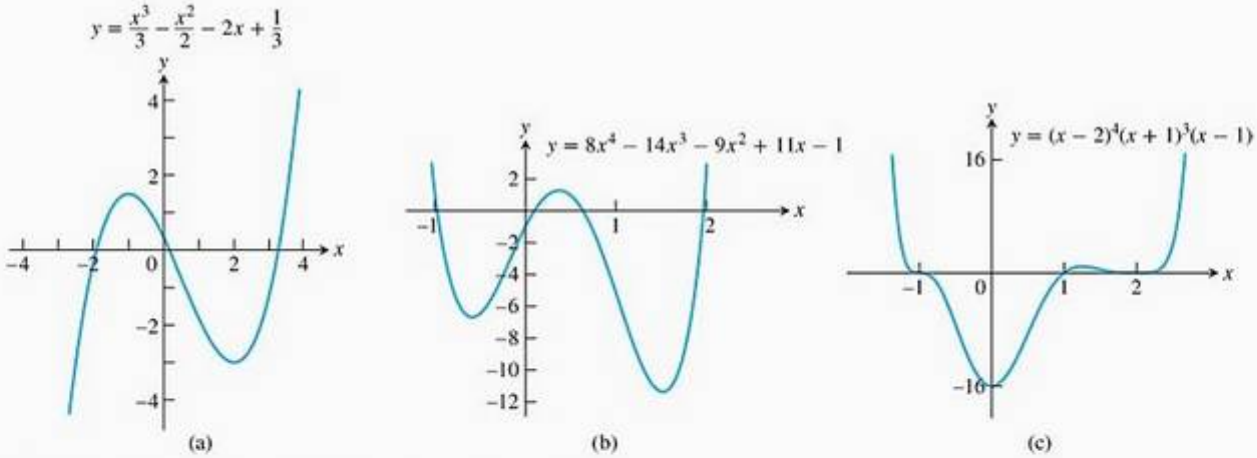


FIGURA 1.18 Gráficos de três funções polinomiais.

FUNÇÕES RACIONAIS Uma **função racional** é o quociente ou razão de dois polinômios:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

onde p e q são polinômios. O domínio de uma função racional é o conjunto de todos os x reais para os quais $q(x) \neq 0$. Por exemplo, a função

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

é uma função racional com domínio $\{x \mid x \neq -4/7\}$. Seu gráfico é mostrado na Figura 1.19a, ao lado dos gráficos de duas outras funções racionais (figuras 1.19b e 1.19c).

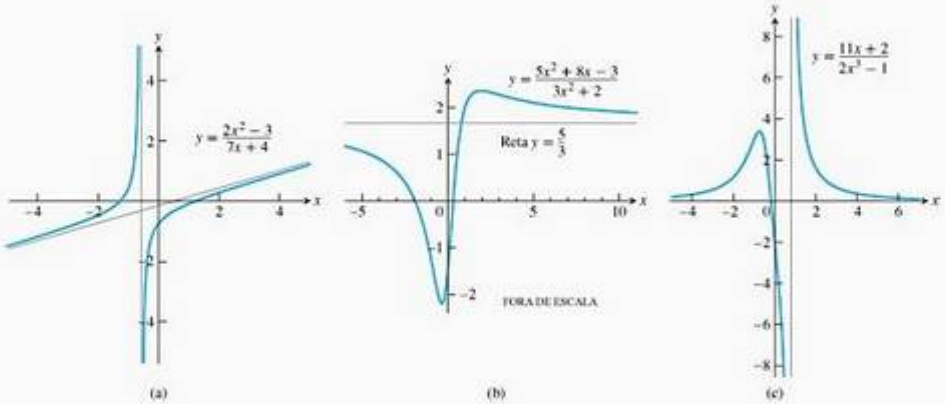


FIGURA 1.19 Gráficos de três funções racionais.

FUNÇÕES ALGÉBRICAS Uma **função algébrica** é uma função construída a partir de polinômios por meio de operações algébricas (adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes). Funções racionais são casos especiais de funções algébricas. A Figura 1.20 mostra os gráficos de três funções algébricas.

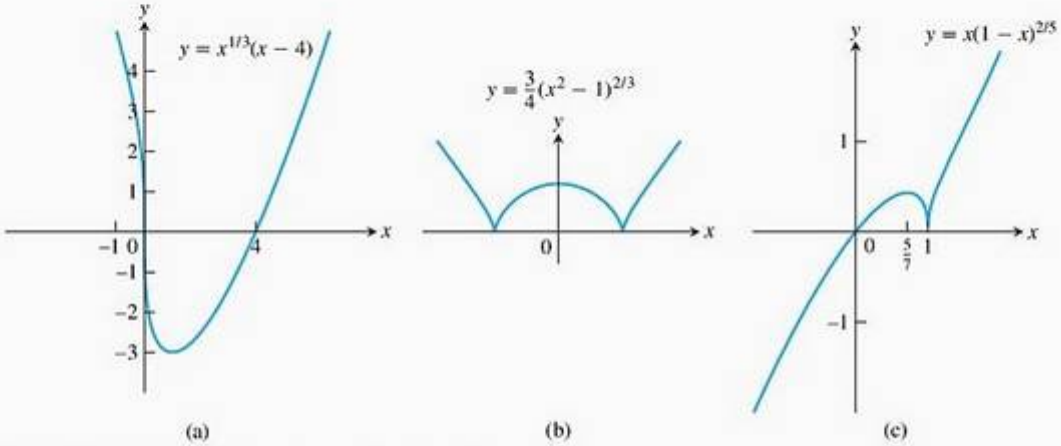


FIGURA 1.20 Gráficos de três funções algébricas.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS Discutimos as funções trigonométricas no Apêndice B.3. Os gráficos das funções seno e cosseno são mostrados na Figura 1.21.

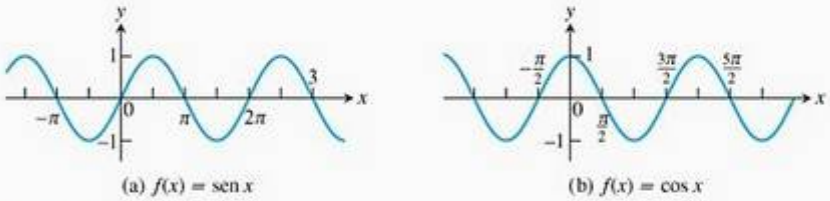


FIGURA 1.21 Gráficos das funções seno e cosseno.

FUNÇÕES EXPONENCIAIS Funções com a forma $f(x) = a^x$, onde a base $a > 0$ é uma constante positiva e $a \neq 1$, são chamadas **funções exponenciais**. Todas as funções exponenciais têm domínio $(-\infty, \infty)$ e imagem $(0, \infty)$. Logo, uma função exponencial nunca assume o valor 0. Os gráficos de algumas funções exponenciais são mostrados na Figura 1.22. O cálculo das funções exponenciais será estudado nos capítulos 3 e 5.

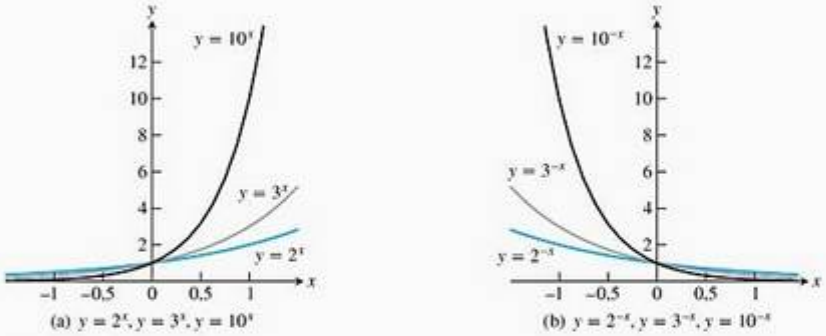


FIGURA 1.22 Gráficos de funções exponenciais.

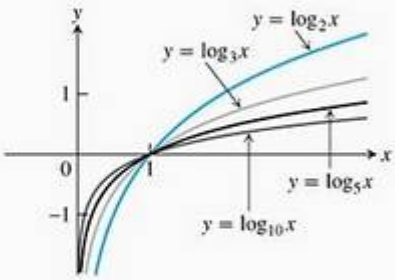


FIGURA 1.23 Gráficos de quatro funções logarítmicas.

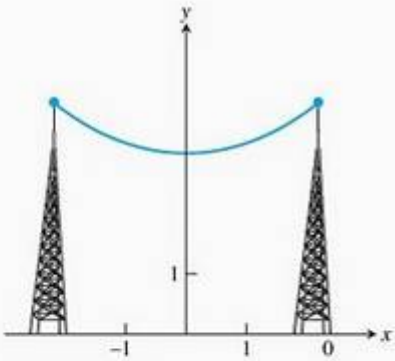


FIGURA 1.24 Gráfico de uma catenária ou cabo pendente. (A palavra latina *catena* significa "corrente".)

FUNÇÕES LOGARÍTMICAS São as funções $f(x) = \log_a x$, onde a base $a \neq 1$ é uma constante positiva. Elas são as *funções inversas* das funções exponenciais, e seu cálculo será estudado nos capítulos 3 e 7. A Figura 1.23 mostra os gráficos de quatro funções logarítmicas com bases variadas. Em todos os casos, o domínio é $(0, \infty)$ e a imagem é $(-\infty, \infty)$.

FUNÇÕES TRANSCENDENTES São as funções que não são algébricas. Incluem a trigonométrica, a trigonométrica inversa, a exponencial e a logarítmica, além de muitas outras funções (por exemplo, as hiperbólicas, estudadas no Capítulo 7). Um exemplo de função transcendente é a **catenária**. Seu gráfico assume a forma de um cabo, como um cabo telefônico ou de TV, estendido entre um suporte e outro e pendendo livremente devido a seu peso (Figura 1.24).

EXEMPLO 1 Reconhecendo funções

Classifique cada função dada a seguir como um dos tipos descritos. Tenha em mente que algumas funções podem ser classificadas em mais de uma categoria. Por exemplo, $f(x) = x^2$ é tanto uma função de potência quanto um polinômio de segundo grau.

(a) $f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^5$ **(b)** $g(x) = 7^x$ **(c)** $h(z) = z^7$

(d) $y(t) = \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

SOLUÇÃO

(a) $f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^5$ é um polinômio de grau 5.

(b) $g(x) = 7^x$ é uma função exponencial com base 7. Note que a variável x é o expoente.

(c) $h(z) = z^7$ é uma função de potência. (A variável z é a base.)

(d) $y(t) = \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ é uma função trigonométrica.

Funções crescentes *versus* decrescentes

Se o gráfico de uma função *sobe* ou *aumenta* da esquerda para a direita, dizemos que a função é *crescente*. Se o grá fico *desce* ou *diminui* também da esquerda para a direita, a função é *decrescente*. Na Seção 4.3 damos definições formais de funções crescentes e decrescentes. Nesta seção, você aprenderá como encontrar os intervalos em que uma função é crescente ou decrescente. Veja alguns exemplos extraídos das figuras 1.15, 1.16 e 1.17.

Função	Onde cresce	Onde decresce
$y = x^2$	$0 \leq x < \infty$	$-\infty < x \leq 0$
$y = x^3$	$-\infty < x < \infty$	Não decresce

Função	Onde cresce	Onde decresce
$y = 1/x$	Não cresce	$-\infty < x < 0$ e $0 < x < \infty$
$y = 1/x^2$	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$y = \sqrt{x}$	$0 \le x < \infty$	Não decresce
$y = x^{2/3}$	$0 \le x < \infty$	$-\infty < x \le 0$

Funções pares e ímpares: simetria

Os gráficos de funções *pares* e *ímpares* têm propriedades de simetria características.

Definições Função par, função ímpar

Uma função $y = f(x)$ é uma

função par de x se $f(-x) = f(x)$
função ímpar de x se $f(-x) = -f(x)$

para qualquer x dentro do domínio da função.

Os nomes par e ímpar vêm das potências de x. Se y é uma potência par de x, como em $y = x^2$ ou $y = x^4$, então é uma função par de x (pois $(-x)^2 = x^2$ e $(-x)^4 = x^4$). Se y é uma potência ímpar de x, como em $y = x$ ou $y = x^3$, então é uma função ímpar de x (pois $(-x)^1 = -x$ e $(-x)^3 = -x^3$).

O gráfico de uma função par é **simétrico em relação ao eixo y.** Uma vez que $f(-x) = f(x)$, um ponto (x, y) estará no gráfico se e somente se o ponto $(-x, y)$ estiver no gráfico (Figura 1.25a). Uma reflexão ao longo do eixo y não altera o gráfico.

O gráfico de uma função ímpar é **simétrico em relação à origem.** Uma vez que $f(-x) = -f(x)$, um ponto (x, y) estará no gráfico se e somente se o ponto $(-x, -y)$ estiver no gráfico (Figura 1.25b). De maneira equivalente, um gráfico será simétrico em relação à origem se uma rotação de 180° em relação à origem não alterar o gráfico. Observe que as definições implicam que x e $-x$ estejam ambos no domínio de f.

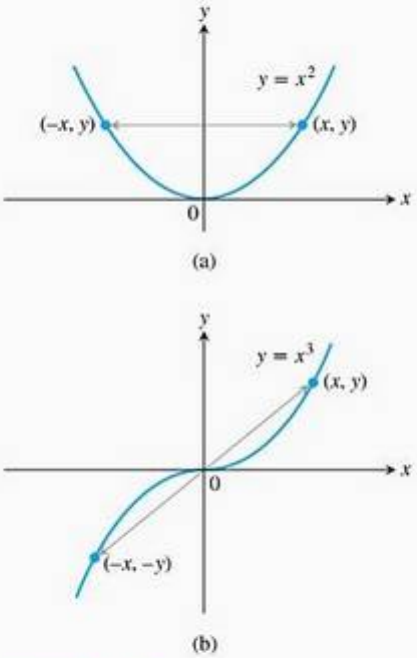


FIGURA 1.25 (a) O gráfico de $y = x^2$ (função par) é simétrico em relação ao eixo y. (b) O gráfico de $y = x^3$ (função ímpar) é simétrico em relação à origem.

EXEMPLO 2 Reconhecendo funções pares e ímpares

$f(x) = x^2$ — Função par: $(-x)^2 = x^2$ para qualquer x; simetria em relação ao eixo y.

$f(x) = x^2 + 1$ — Função par: $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$ para qualquer x; simetria em relação ao eixo y (Figura 1.26a).

$f(x) = x$ — Função ímpar: $(-x) = -x$ para qualquer x; simetria em relação à origem.

$f(x) = x + 1$ — Não é par: $f(-x) = -x + 1$, mas $-f(x) = -x - 1$. As duas não são iguais.
Não é ímpar: $(-x) + 1 \neq x + 1$ para qualquer $x \neq 0$ (Figura 1.26b).

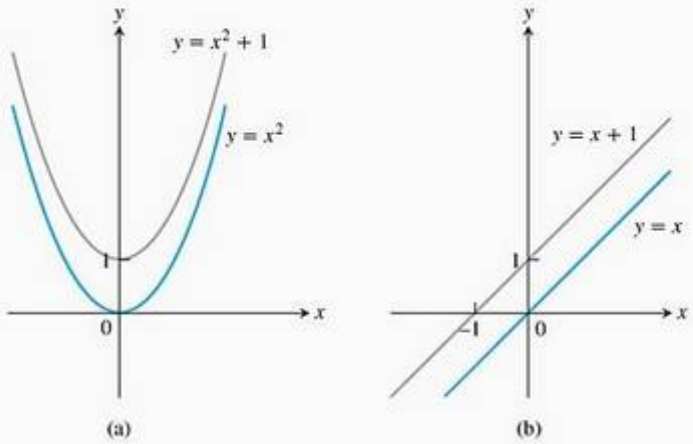


FIGURA 1.26 (a) Quando adicionamos o termo constante 1 à função $y = x^2$, a função resultante $y = x^2 + 1$ ainda é par e seu gráfico ainda é simétrico em relação ao eixo y. (b) Quando adicionamos o termo constante 1 à função $y = x$, a função resultante $y = x + 1$ não é mais ímpar. A simetria em relação à origem deixa de existir (Exemplo 2).

Modelos matemáticos

Para podermos entender melhor nosso mundo, geralmente descrevemos dado fenômeno em termos matemáticos (por exemplo, por meio de uma função ou de uma equação). Esse tipo de **modelo matemático** é uma idealização dos fenômenos do mundo real e quase nunca uma representação completamente precisa. Embora qualquer modelo tenha suas limitações, um bom modelo pode fornecer resultados e conclusões valiosas. Um modelo nos permite chegar a conclusões, conforme ilustrado na Figura 1.27.

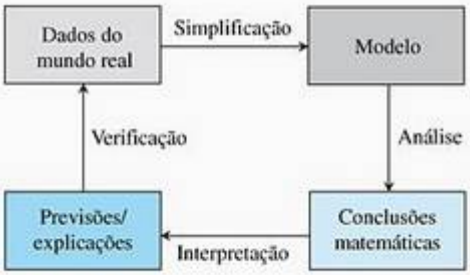


FIGURA 1.27 Um fluxo do processo de modelagem, começando com um exame dos dados do mundo real.

A maioria dos modelos simplifica a realidade e só consegue se *aproximar* do comportamento do mundo real. Uma relação que serve para simplificar é a *proporcionalidade*.

Definição Proporcionalidade

Duas variáveis y e x são **proporcionais** (uma à outra) se uma é sempre múltipla constante da outra; isto é, se

$$y = kx$$

para alguma constante k diferente de zero.

A definição significa que o gráfico de y por x fica ao longo de uma reta que passa pela origem. Essa observação gráfica é útil para testar se dada coleção de dados assume razoavelmente uma relação de proporcionalidade. Se uma proporcionalidade for razoável, o gráfico de uma variável em relação à outra deverá ser aproximadamente uma reta que passa pela origem.

EXEMPLO 3 Terceira lei de Kepler

Uma proporcionalidade famosa, postulada pelo astrônomo alemão Johannes Kepler no início do século XVII, é sua terceira lei. Kepler postulou que, se T é o tempo em dias que um planeta leva para completar uma órbita completa em torno do Sol, e R é a distância média do planeta ao Sol, então T é proporcional a R elevado à potência 3/2. Ou seja, para uma constante k,

$$T = kR^{3/2}$$

Vamos comparar sua lei com os dados da Tabela 1.2, extraídos do *World Almanac* de 1993.

TABELA 1.2 Tempo de órbita e distância média dos planetas em relação ao Sol

Planeta	T Tempo (dias)	R Distância média (milhões de milhas)
Mercúrio	88,0	36
Vênus	224,7	67,25
Terra	365,3	93
Marte	687,0	141,75
Júpiter	4.331,8	483,80
Saturno	10.760,0	887,97
Urano	30.684,0	1.764,50
Netuno	60.188,3	2.791,05
Plutão	90.466,8	3.653,90

O princípio gráfico deste exemplo pode ser novo para você. Para fazer um gráfico de T por $R^{3/2}$, primeiro, calculamos o valor de $R^{3/2}$ para cada valor da Tabela 1.2. Por exemplo, $3.653{,}90^{3/2} \approx 220.869{,}1$ e $36^{3/2} = 216$. O eixo horizontal representa $R^{3/2}$ (não os valores de R) e colocamos os pares ordenados $(R^{3/2}, T)$ no sistema de coordenadas da Figura 1.28. Esse gráfico de pares ordenados, ou gráfico de dispersão, fornece um gráfico do tempo por distância média à potência 3/2. Observamos que o gráfico de dispersão da figura fica aproximadamente ao longo de uma reta que nasce na origem. A partir de dois pontos dessa linha, podemos facilmente estimar o coeficiente angular, que é a constante de proporcionalidade (em dias por milhas $\times 10^{-4}$).

$$k = \textit{coeficiente angular} = \frac{90.466{,}8 - 88}{220.869{,}1 - 216} \approx 0{,}410$$

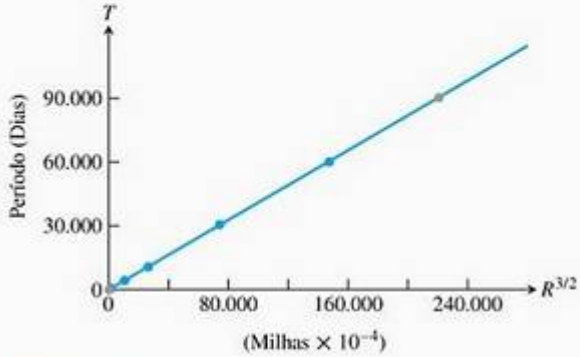


FIGURA 1.28 Gráfico da terceira lei de Kepler na forma de uma proporcionalidade: $T = 0{,}410R^{3/2}$ (Exemplo 3).

Estimamos que o modelo da terceira lei de Kepler seja $T = 0{,}410R^{3/2}$ (o que depende de nossa escolha de unidades). É preciso ter o cuidado de salientar que isso *não é uma prova* da terceira lei de Kepler. Não podemos provar ou verificar um teorema apenas observando alguns exemplos. Ainda assim, a Figura 1.28 sugere que a terceira lei de Kepler é razoável.

O conceito de proporcionalidade é uma maneira de testar a razoabilidade de uma relação hipotética entre duas variáveis, como no Exemplo 3. Também pode proporcionar a base para um **modelo empírico**, totalmente construído a partir de uma tabela de dados coletados.

Exercícios 1.2

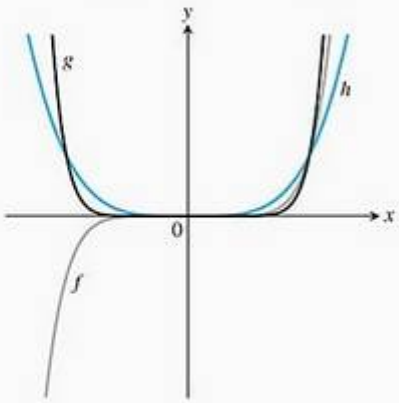
Reconhecendo funções

Nos exercícios 1–4, identifique cada função como uma função constante, linear, de potência, polinômio (estabeleça seu grau), racional, algébrica, trigonométrica, exponencial ou logarítmica. Lembre-se de que algumas funções podem se encaixar em mais de uma categoria.

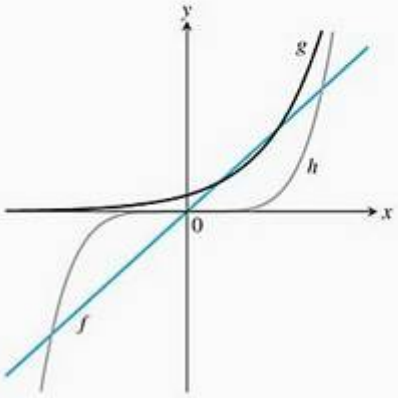
1. (a) $f(x) = 7 - 3x$ (b) $g(x) = \sqrt[5]{x}$
   (c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ (d) $r(x) = 8^x$
2. (a) $F(t) = t^4 - t$ (b) $G(t) = 5^t$
   (c) $H(z) = \sqrt{z^3 + 1}$ (d) $R(z) = \sqrt[3]{z^7}$
3. (a) $y = \dfrac{3 + 2x}{x - 1}$ (b) $y = x^{5/2} - 2x + 1$
   (c) $y = \operatorname{tg} \pi x$ (d) $y = \log_7 x$
4. (a) $y = \log_5\left(\dfrac{1}{t}\right)$ (b) $f(z) = \dfrac{z^5}{\sqrt{z} + 1}$
   (c) $g(x) = 2^{1/x}$ (d) $w = 5\cos\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$

Nos exercícios 5 e 6, descubra a qual gráfico corresponde cada equação. Não use um dispositivo gráfico e justifique sua resposta.

5. (a) $y = x^4$ (b) $y = x^7$ (c) $y = x^{10}$



6. **(a)** $y = 5x$ **(b)** $y = 5^x$ **(c)** $y = x^5$



Funções crescentes e decrescentes

Represente graficamente as funções dos exercícios 7–18. Existem simetrias entre os gráficos? Em caso positivo, quais são elas? Especifique os intervalos dentro dos quais a função é crescente e aqueles em que ela é decrescente.

7. $y = -x^3$

8. $y = -\dfrac{1}{x^2}$

9. $y = -\dfrac{1}{x}$

10. $y = \dfrac{1}{|x|}$

11. $y = \sqrt{|x|}$

12. $y = \sqrt{-x}$

13. $y = x^3/8$

14. $y = -4\sqrt{x}$

15. $y = -x^{3/2}$

16. $y = (-x)^{3/2}$

17. $y = (-x)^{2/3}$

18. $y = -x^{2/3}$

Funções pares e ímpares

Nos exercícios 19–30, diga se a função é par, ímpar ou nenhuma delas.

19. $f(x) = 3$

20. $f(x) = x^{-5}$

21. $f(x) = x^2 + 1$

22. $f(x) = x^2 + x$

23. $g(x) = x^3 + x$

24. $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

25. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

26. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

27. $h(t) = \dfrac{1}{t - 1}$

28. $h(t) = |t^3|$

29. $h(t) = 2t + 1$

30. $h(t) = 2|t| + 1$

Proporcionalidade

Nos exercícios 31 e 32, verifique se os dados seguintes sustentam a proporcionalidade admitida. Construa um gráfico de dispersão apropriado para sua investigação e se a hipótese parecer razoável, então estime a constante de proporcionalidade.

31. **(a)** y é proporcional a x

y	1	2	3	4	5	6	7	8
x	5,9	12,1	17,9	23,9	29,9	36,2	41,8	48,2

(b) y é proporcional a $x^{1/2}$

y	3,5	5	6	7	8
x	3	6	9	12	15

32. **(a)** y é proporcional a 3^x

y	5	15	45	135	405	1.215	3.645	10.935
x	0	1	2	3	4	5	6	7

(b) y é proporcional a $\ln x$

y	2	4,8	5,3	6,5	8,0	10,5	14,4	15,0
x	2,0	5,0	6,0	9,0	14,0	35,0	120,0	150,0

33. T A tabela a seguir mostra a distância que um carro percorre durante o tempo que o motorista leva para reagir antes de acionar o freio, e a distância que o carro percorre depois que o freio foi acionado. As distâncias (em pés) dependem da velocidade do carro (em milhas por hora). Teste a razoabilidade das proporcionalidades conjecturadas a seguir e estime as constantes de proporcionalidade.

(a) a distância de reação é proporcional à velocidade.

(b) a distância de frenagem é proporcional ao quadrado da velocidade.

Velocidade (mph)	20	25	30	35	40	45	50
Distância de reação (pés)	22	28	33	39	44	50	55
Distância de frenagem (pés)	20	28	41	53	72	93	118

Velocidade (mph)	55	60	65	70	75	80
Distância de reação (pés)	61	66	72	77	83	88
Distância de frenagem (pés)	149	182	221	266	318	376

34. Em outubro de 2002, astrônomos descobriram um miniplaneta rochoso e gelado provisoriamente batizado de "Quaoar". O novo planeta, que circundava o Sol bem depois de Netuno, está a cerca de 4 bilhões de milhas da Terra, numa região periférica do sistema solar conhecida como Cinturão de Kuiper. Usando a terceira lei de Kepler, estime o tempo T que Quaoar leva para completar uma órbita completa em volta do Sol.

35. T **Alongamento de molas** A resposta de uma mola a várias cargas deve ser modelada para se projetar um veículo

(como um tanque, caminhão de carga, utilitário ou carro de luxo) que responda a condições de rodagem de maneira desejada. Realizamos uma experiência para medir o alongamento y (em polegadas) de uma mola em função de um número x de unidades de massa colocadas na mola.

x (nº de unidades de massa)	0	1	2	3	4	5
y (alongamento em polegadas)	0	0,875	1,721	2,641	3,531	4,391

x (nº de unidades de massa)	6	7	8	9	10
y (alongamento em polegadas)	5,241	6,120	6,992	7,869	8,741

(a) Construa um gráfico de dispersão dos dados para testar a razoabilidade da hipótese de que o alongamento y é proporcional à massa x.

(b) Estime a constante de proporcionalidade a partir do gráfico obtido no item (a).

(c) Preveja o alongamento da mola para 13 unidades de massa.

36. **Pinheiros** Na tabela, x representa a circunferência (perímetro) de um pinheiro, medida em polegadas (pol), na altura do ombro; y representa o volume expresso em bf (1 bf equivale a 144 pol^3) de madeira serrada obtida no final.

x (pol)	17	19	20	23	25	28	32	38	39	41
y (bf)	19	25	32	57	71	113	123	252	259	294

Formule e avalie os dois modelos seguintes: que o volume utilizável é proporcional (a) ao quadrado da circunferência e (b) ao cubo da circunferência. Qual é o melhor? Algum modelo fornece "explicação" melhor que o outro?

1.3 Combinando funções; transladando e mudando a escala de gráficos

Nesta seção, vamos conhecer os principais modos de combinar funções ou transformá-las a fim de construir novas funções.

Somas, diferenças, produtos e quocientes

Assim como números, funções podem ser somadas, subtraídas, multiplicadas e divididas (exceto quando o denominador for zero) para produzir novas funções. Se f e g são funções, então para qualquer x que pertença aos domínios de ambos (isto é, para $x \in D(f) \cap D(g)$), definimos funções $f + g$, $f - g$ e fg por meio das fórmulas:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

Observe que o sinal de + no lado esquerdo da primeira equação representa a operação de adição de *funções*, enquanto o sinal de + no lado direito da equação significa adição dos números reais $f(x)$ e $g(x)$.

Em qualquer ponto de $D(f) \cap D(g)$ no qual $g(x) \neq 0$, também podemos definir a função f/g pela fórmula

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (onde } g(x) \neq 0)$$

Funções também podem ser multiplicadas por constantes: se c for um número real, a função cf será definida para qualquer x no domínio de f por meio de

$$(cf)(x) = cf(x)$$

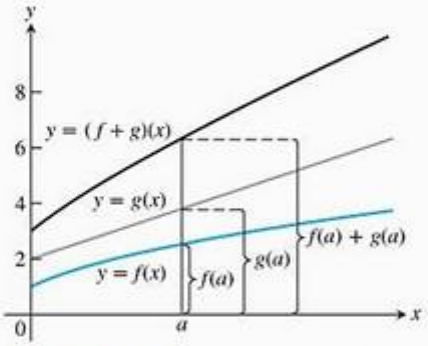


FIGURA 1.29 Soma gráfica de duas funções.

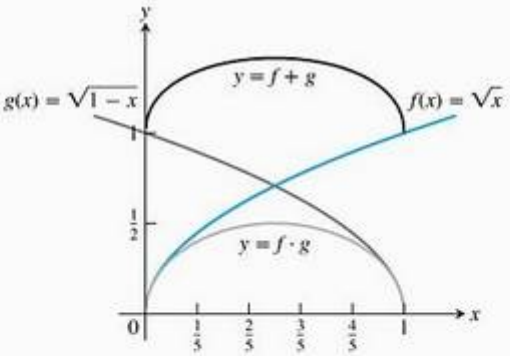


FIGURA 1.30 O domínio da função $f + g$ é a interseção dos domínios de f e g — ou seja, o intervalo $[0, 1]$ no eixo x onde esses domínios se sobrepõem. Esse intervalo também é o domínio da função $f \cdot g$ (Exemplo 1).

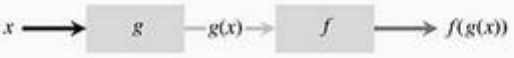


FIGURA 1.31 Duas funções podem ser combinadas em x sempre que o valor de uma delas em x estiver dentro do domínio da outra. A composição tem a notação $f \circ g$.

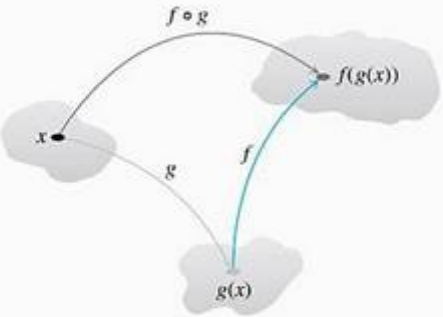


FIGURA 1.32 Diagrama de setas para $f \circ g$.

EXEMPLO 1 Combinando funções algebricamente

As funções definidas pelas fórmulas

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sqrt{1 - x}$$

têm domínios $D(f) = [0, \infty)$ e $D(g) = (-\infty, 1]$. Os pontos comuns a esses domínios são

$$[0, \infty) \cap (-\infty, 1] = [0, 1].$$

A tabela a seguir resume as fórmulas e os domínios para as diversas combinações algébricas das duas funções. Também escrevemos $f \cdot g$ para a função produto fg.

Função	Fórmula	Domínio
$f + g$	$(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$	$[0, 1] = D(f) \cap D(g)$
$f - g$	$(f - g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1 - x}$	$[0, 1]$
$g - f$	$(g - f)(x) = \sqrt{1 - x} - \sqrt{x}$	$[0, 1]$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1 - x)}$	$[0, 1]$
f/g	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1 - x}}$	$[0, 1)$ ($x = 1$ excluído)
g/f	$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1 - x}{x}}$	$(0, 1]$ ($x = 0$ excluído)

Obtemos o gráfico da função $f + g$ a partir dos gráficos de f e g. Para isso, somamos as ordenadas $f(x)$ e $g(x)$ a cada ponto $x \in D(f) \cap D(g)$, como mostra a Figura 1.29. Os gráficos de $f + g$ e $f \cdot g$ do Exemplo 1 são apresentados na Figura 1.30.

Funções compostas

A composição é outro método para combinar funções.

Definição Composição de funções

Se f e g são funções, a função **composta** $f \circ g$ ("f composta com g") é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O domínio de $f \circ g$ consiste nos números x do domínio de g para os quais $g(x)$ fica no domínio de f.

A definição diz que $f \circ g$ pode ser formada quando a imagem de g fica no domínio de f. Para determinar $(f \circ g)(x)$, *primeiro*, determine $g(x)$ e, *depois*, $f(g(x))$. A Figura 1.31 ilustra $f \circ g$ como um diagrama de máquina, enquanto a Figura 1.32 mostra a composição como um diagrama de setas.

EXEMPLO 2 Vendo uma função como uma composta

A função $y = \sqrt{1 - x^2}$ pode ser pensada calculando-se, primeiro, $1 - x^2$ e, depois, tomando a raiz quadrada do resultado. A função y é a composta da função $g(x) = 1 - x^2$ com a função $f(x) = \sqrt{x}$. Note que $1 - x^2$ não pode ser negativa. O domínio da composta é $[-1, 1]$.

Para avaliar a função composta $g \circ f$ (quando definida), invertemos a ordem, determinando $f(x)$, primeiro, e, depois, $g(f(x))$. O domínio de $g \circ f$ é o

conjunto de números x no domínio de f para os quais $f(x)$ fica no domínio de g. As funções $f \circ g$ e $g \circ f$ costumam ser bem diferentes.

EXEMPLO 3 Encontrando fórmulas para compositas

Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x + 1$, determine

(a) $(f \circ g)(x)$ **(b)** $(g \circ f)(x)$ **(c)** $(f \circ f)(x)$ **(d)** $(g \circ g)(x)$

SOLUÇÃO

Composta	**Domínio**
(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$	$[0, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x) + 1 = (x + 1) + 1 = x + 2$	$(-\infty, \infty)$

Para entender por que o domínio de $f \circ g$ é $[-1, \infty)$, observe que $g(x) = x + 1$ é definida para qualquer x real, mas pertence ao domínio de f somente se $x + 1 \geq 0$, ou seja, quando $x \geq -1$.

Observe que, se $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$, então $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$. No entanto, o domínio de $f \circ g$ é $[0, \infty)$, não $(-\infty, \infty)$.

Como transladar um gráfico

Para transladar o gráfico de uma função $y = f(x)$ para cima, adicione uma constante positiva do lado direito da fórmula $y = f(x)$.

Para transladar o gráfico de uma função $y = f(x)$ para baixo, adicione uma constante negativa do lado direito da fórmula $y = f(x)$.

Para transladar o gráfico de $y = f(x)$ para a esquerda, adicione uma constante positiva a x.

Para transladar o gráfico de $y = f(x)$ para a direita, adicione uma constante negativa a x.

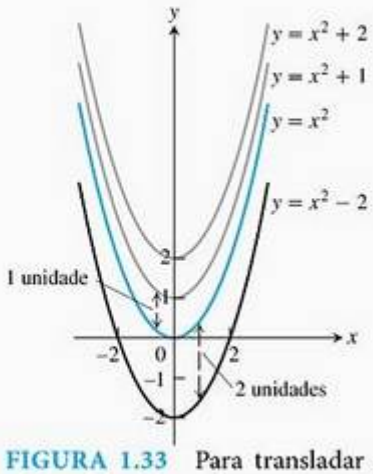


FIGURA 1.33 Para transladar o gráfico de $f(x) = x^2$ para cima (ou para baixo), adicionamos constantes positivas (ou negativas) à fórmula de f (exemplos 4a e 4b).

Fórmulas para translação

Translação vertical

$y = f(x) + k$ Translada o gráfico k unidades *para cima* se $k > 0$
Translada o gráfico $|k|$ unidades *para baixo* se $k < 0$

Translação horizontal

$y = f(x + h)$ Translada o gráfico h unidades *para a esquerda* se $h > 0$
Translada o gráfico $|h|$ unidades *para a direita* se $h < 0$

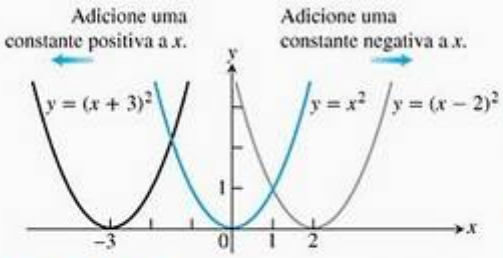


FIGURA 1.34 Para transladar o gráfico de $y = x^2$ para a esquerda, adicionamos uma constante positiva a x. Para transladar o gráfico para a direita, adicionamos uma constante negativa a x (Exemplo 4c).

EXEMPLO 4 Transladando um gráfico

(a) A adição de 1 ao lado direito da fórmula $y = x^2$ para obter $y = x^2 + 1$ translada o gráfico para cima em 1 unidade (Figura 1.33).

(b) A adição de -2 ao lado direito da fórmula $y = x^2$ para obter $y = x^2 - 2$ translada o gráfico para baixo em 2 unidades (Figura 1.33).

(c) A adição de 3 a x em $y = x^2$ para obter $y = (x + 3)^2$ translada o gráfico 3 unidades para a esquerda (Figura 1.34).

(d) A adição de -2 a x em $y = |x|$, e depois a adição de -1 ao resultado, dá $y = |x - 2| - 1$ e translada o gráfico 2 unidades para a direita e 1 unidade para baixa (Figura 1.35).

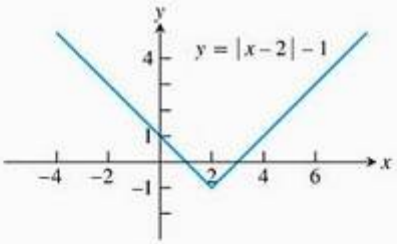


FIGURA 1.35 Como transladar o gráfico de $y = |x|$ 2 unidades para a direita e 1 unidade para baixo (Exemplo 4d).

Como mudar a escala ou refletir o gráfico de uma função

Mudar a escala de um gráfico de uma função $y = f(x)$ significa alongá-lo ou comprimi-lo, vertical ou horizontalmente. Para tanto, multiplica-se a função f, ou a variável independente x, por uma constante c apropriada. Reflexões em torno dos eixos das coordenadas são casos especiais em que $c = -1$.

Fórmulas para mudança vertical ou horizontal e para reflexão

Para $c > 1$:

$y = cf(x)$	Alonga o gráfico de f verticalmente por um fator de c.
$y = \frac{1}{c} f(x)$	Comprime o gráfico de f verticalmente por um fator de c.
$y = f(cx)$	Comprime o gráfico de f horizontalmente por um fator de c.
$y = f(x/c)$	Alonga o gráfico de f horizontalmente por um fator de c.

Para $c = -1$:

$y = -f(x)$	Reflete o gráfico de f em torno do eixo x.
$y = f(-x)$	Reflete o gráfico de f em torno do eixo y.

EXEMPLO 5 Mudando a escala e refletindo um gráfico

(a) **Vertical:** Multiplicar o lado direito de $y = \sqrt{x}$ por 3 para obter $y = 3\sqrt{x}$ alonga o gráfico verticalmente por um fator de 3, ao passo que multiplicar por 1/3 comprime-o por um fator de 3 (Figura 1.36).

(b) **Horizontal:** O gráfico de $y = \sqrt{3x}$ é uma compressão horizontal do gráfico de $y = \sqrt{x}$ por um fator de 3, e $y = \sqrt{x/3}$ é um alongamento horizontal por um fator de 3 (Figura 1.37). Observe que $y = \sqrt{3x} = \sqrt{3}\sqrt{x}$, portanto uma compressão horizontal *pode* corresponder a um alongamento vertical por um fator de escala diferente. De modo análogo, um alongamento horizontal pode corresponder a uma compressão vertical por um fator de escala diferente.

(c) **Reflexão:** O gráfico de $y = -\sqrt{x}$ é uma reflexão de $y = \sqrt{x}$ em torno do eixo x, e $y = \sqrt{-x}$ é uma reflexão em torno do eixo y (Figura 1.38).

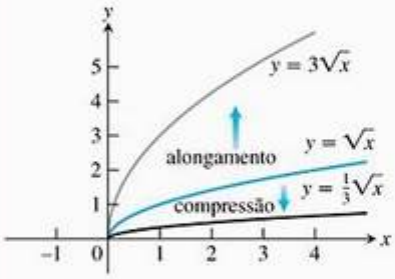


FIGURA 1.36 Alongando e comprimindo verticalmente o gráfico $y = \sqrt{x}$ por um fator de 3 (Exemplo 5a).

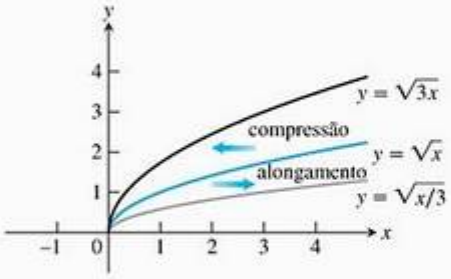


FIGURA 1.37 Alongando e comprimindo horizontalmente o gráfico $y = \sqrt{x}$ por um fator de 3 (Exemplo 5b).

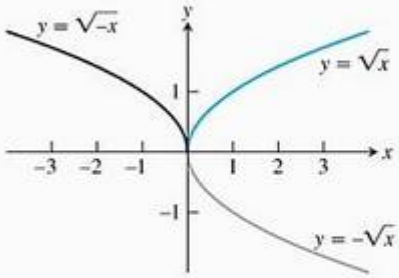


FIGURA 1.38 Reflexões do gráfico $y = \sqrt{x}$ em torno dos eixos das coordenadas (Exemplo 5c).

EXEMPLO 6 Combinando reescalonamentos e reflexões

Dada a função $f(x) = x^4 - 4x^3 = 10$ (Figura 1.39a), determine fórmulas para

(a) comprimir o gráfico horizontalmente por um fator de 2 e, em seguida, refleti-lo em torno do eixo y (Figura 1.39b).

(b) comprimir o gráfico verticalmente por um fator de 2 e, em seguida, refleti-lo em torno do eixo x (Figura 1.39c).

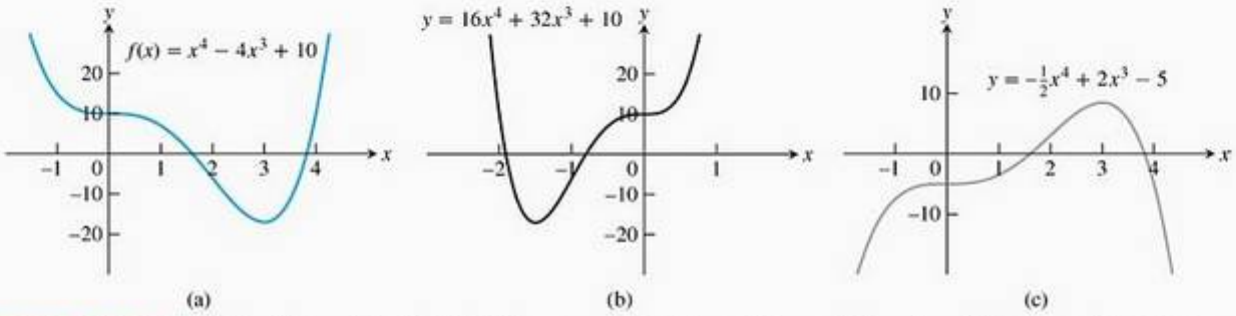


FIGURA 1.39 (a) O gráfico original de f. (b) Compressão horizontal de $y = f(x)$ no item (a) por um fator de 2, seguida por uma reflexão em torno do eixo y. (c) Compressão vertical de $y = f(x)$ no item (a) por um fator de 2, seguida por uma reflexão em torno do eixo x (Exemplo 6).

SOLUÇÃO

(a) Obtém-se a fórmula substituindo x por $-2x$ no lado direito da equação de f

$$\begin{aligned} y &= f(-2x) = (-2x)^4 - 4(-2x)^3 + 10 \\ &= 16x^4 + 32x^3 + 10 \end{aligned}$$

(b) A fórmula é

$$y = -\frac{1}{2}f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 5.$$

Elipses

A equação-padrão do círculo é apresentada no Apêndice B.2. Substituindo x por cx na equação-padrão de um círculo de raio r, centrado na origem (Figura 1.40a), temos

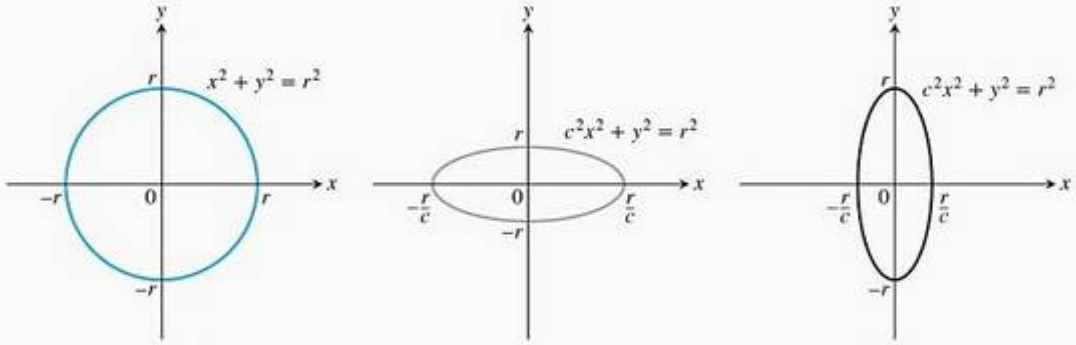
$$c^2x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

Se $0 < c < 1$, o gráfico da Equação (1) alonga horizontalmente o círculo; se $c > 1$, o círculo é comprimido horizontalmente. Em ambos os casos, o gráfico da Equação (1) é uma elipse (Figura 1.40). Observe que, na Figura 1.40, os interceptores lineares do eixo y dos três gráficos são sempre $-r$ e r. Na Figura 1.40b, o segmento de reta que une os pontos $(\pm r/c, 0)$ é denominado **eixo principal** da elipse; o **eixo secundário** é o segmento de reta que une $(0, \pm r)$. Os eixos da elipse são invertidos na Figura 1.40c: o eixo principal é o segmento de reta que une os pontos $(0, \pm r)$, e o secundário é o que une os pontos $(\pm r/c, 0)$. Nos dois casos, o eixo principal é o segmento que tem o maior comprimento.

Se dividimos os dois lados da Equação (1) por r^2, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

onde $a = r/c$ e $b = r$. Se $a > b$, o eixo principal é horizontal; se $a < b$, o eixo principal é vertical. O **centro** da elipse dado pela Equação (2) é a origem (Figura 1.41).



(a) círculo (b) elipse, $0 < c < 1$ (c) elipse, $c > 1$

FIGURA 1.40 Alongamentos ou compressões horizontais de um círculo produzem gráficos de elipses.

Substituindo x por $x - h$ e y por $y - k$ na Equação (2), temos que

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

A Equação (3) é a **equação-padrão da elipse** com centro em (h, k). A definição e as propriedades geométricas das elipses serão apresentadas na Seção 10.1, Volume II.

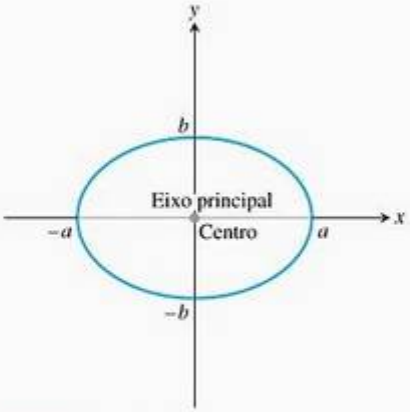
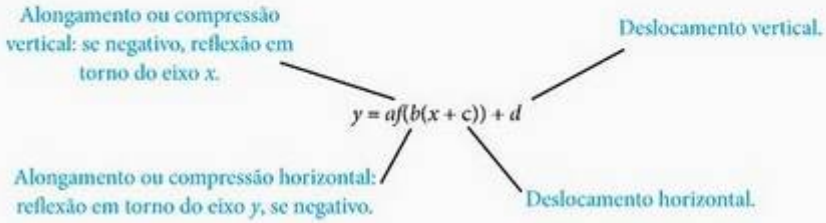


FIGURA 1.41 Gráfico da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, onde o eixo maior é horizontal.

Transformações de gráficos trigonométricos

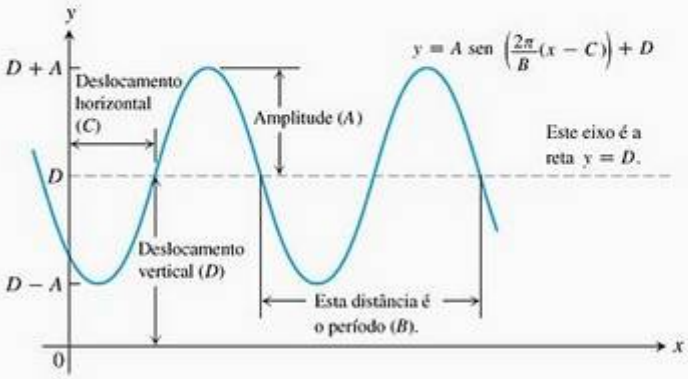
As regras para translação, alongamento, compressão e reflexão do gráfico de uma função também se aplicam às funções trigonométricas abordadas no Apêndice B.3. O diagrama a seguir resume tais regras.



Quando aplicadas à função seno, as regras de transformação são expressas como a **função geral seno** ou fórmula **senóide**.

$$f(x) = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{B}(x - C)\right] + D$$

onde $|A|$ é a *amplitude*, $|B|$ é o *período*, C é o *deslocamento horizontal* e D é o *deslocamento vertical*. Apresentamos a seguir uma interpretação gráfica desses termos, por ser esclarecedora.



Exercícios 1.3

Somas, diferenças, produtos e quocientes

Nos exercícios 1 e 2, determine os domínios e imagens de $f, g, f + g$ e $f \circ g$.

1. $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$
2. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$

Nos exercícios 3 e 4, determine os domínios e imagens de $f, g, f/g, g/f$.

3. $f(x) = 2, \quad g(x) = x^2 + 1$
4. $f(x) = 1, \quad g(x) = 1 + \sqrt{x}$

Funções compostas

5. Se $f(x) = x + 5$ e $g(x) = x^2 - 3$, resolva:

(a) $f(g(0))$ (b) $g(f(0))$
(c) $f(g(x))$ (d) $g(f(x))$
(e) $f(f(-5))$ (f) $g(g(2))$
(g) $f(f(x))$ (h) $g(g(x))$

6. Se $f(x) = x - 1$ e $g(x) = 1/(x + 1)$, resolva:

(a) $f(g(1/2))$ (b) $(f(1/2))$
(c) $f(g(x))$ (d) $g(f(x))$
(e) $f(f(2))$ (f) $g(g(2))$
(g) $f(f(x))$ (h) $g(g(x))$

7. Se $u(x) = 4x - 5$, $v(x) = x^2$ e $f(x) = 1/x$, encontre as fórmulas para as seguintes funções:

(a) $u(v(f(x)))$ (b) $u(f(v(x)))$
(c) $v(u(f(x)))$ (d) $v(f(u(x)))$
(e) $f(u(v(x)))$ (f) $f(v(u(x)))$

8. Se $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x/4$ e $h(x) = 4x - 8$, encontre as fórmulas para as seguintes funções:

(a) $h(g(f(x)))$ (b) $h(f(g(x)))$
(c) $g(h(f(x)))$ (d) $g(f(h(x)))$
(e) $f(g(h(x)))$ (f) $f(h(g(x)))$

Sejam $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^3$ e $j(x) = 2x$. Nos exercícios 9 e 10, expresse cada uma das funções como função composta envolvendo uma ou mais funções de f, g, h e j.

9. (a) $y = \sqrt{x} - 3$ (b) $y = 2\sqrt{x}$
(c) $y = x^{1/4}$ (d) $y = 4x$
(e) $y = \sqrt{(x - 3)^3}$ (f) $y = (2x - 6)^3$

10. (a) $y = 2x - 3$ (b) $y = x^{3/2}$
(c) $y = x^9$ (d) $y = x - 6$
(e) $y = 2\sqrt{x - 3}$ (f) $y = \sqrt{x^3 - 3}$

11. Copie e complete a tabela a seguir.

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(a)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	?
(b)	$x + 2$	$3x$	?
(c)	?	$\sqrt{x - 5}$	$\sqrt{x^2 - 5}$
(d)	$\frac{x}{x - 1}$	$\frac{x}{x - 1}$	?
(e)	?	$1 + \frac{1}{x}$	x
(f)	$\frac{1}{x}$	?	x

12. Copie e complete a tabela a seguir.

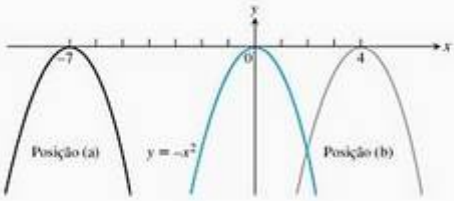
	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(a)	$\frac{1}{x - 1}$	$\lvert x \rvert$	?
(b)	?	$\frac{x - 1}{x}$	$\frac{x}{x + 1}$
(c)	?	$\sqrt{x}$	$\lvert x \rvert$
(d)	$\sqrt{x}$	?	$\lvert x \rvert$

Nos exercícios 13 e 14, (a) escreva uma fórmula para $f \circ g$ e $g \circ f$ e determine (b) o domínio e (c) a imagem de cada uma.

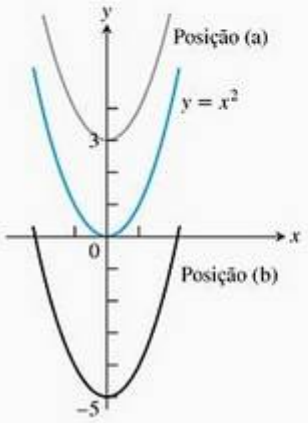
13. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$
14. $f(x) = x^2, \quad g(x) = 1 - \sqrt{x}$

Transladando gráficos

15. A figura a seguir mostra o gráfico de $y = -x^2$ transladado para duas novas posições. Escreva equações para os novos gráficos.



16. A figura a seguir mostra o gráfico de $y = x^2$ transladado para duas novas posições. Escreva equações para os novos gráficos.



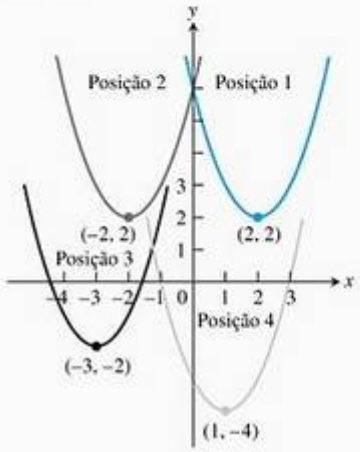
17. Associe as equações listadas de **(a)** a **(d)** com as posições dos gráficos na figura seguinte.

(a) $y = (x - 1)^2 - 4$

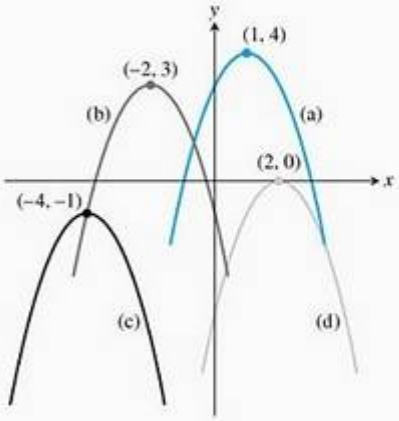
(b) $y = (x - 2)^2 + 2$

(c) $y = (x + 2)^2 + 2$

(d) $y = (x + 3)^2 - 2$



18. A figura mostra o gráfico de $y = -x^2$ transladado para quatro novas posições. Escreva uma equação para cada novo gráfico.



Nos exercícios 19–28, diga quantas unidades e em que direção os gráficos das equações dadas serão deslocados. Dê uma equação para cada gráfico deslocado. Faça então um esboço dos gráficos originais e deslocados juntos, identificando cada gráfico com sua equação.

19. $x^2 + y^2 = 49$ Abaixo 3, esquerda 2

20. $x^2 + y^2 = 25$ Acima 3, esquerda 4

21. $y = x^3$ Esquerda 1, abaixo 1

22. $y = x^{2/3}$ Direita 1, abaixo 1

23. $y = \sqrt{x}$ Esquerda 0,81

24. $y = -\sqrt{x}$ Direita 3

25. $y = 2x - 7$ Acima 7

26. $y = \frac{1}{2}(x + 1) + 5$ Abaixo 5, direita 1

27. $y = 1/x$ Acima 1, direita 1

28. $y = 1/x^2$ Esquerda 2, abaixo 1

Nos exercícios 29–48, faça os gráficos das funções

29. $y = \sqrt{x + 4}$

30. $y = \sqrt{9 - x}$

31. $y = |x - 2|$

32. $y = |1 - x| - 1$

33. $y = 1 + \sqrt{x - 1}$

34. $y = 1 - \sqrt{x}$

35. $y = (x + 1)^{2/3}$

36. $y = (x - 8)^{2/3}$

37. $y = 1 - x^{2/3}$

38. $y + 4 = x^{2/3}$

39. $y = \sqrt[3]{x - 1} - 1$

40. $y = (x + 2)^{3/2} + 1$

41. $y = \frac{1}{x - 2}$

42. $y = \frac{1}{x} - 2$

43. $y = \frac{1}{x} + 2$

44. $y = \frac{1}{x + 2}$

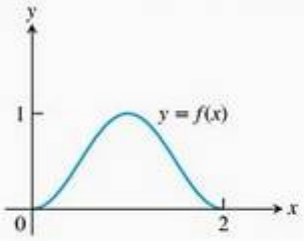
45. $y = \frac{1}{(x - 1)^2}$

46. $y = \frac{1}{x^2} - 1$

47. $y = \frac{1}{x^2} + 1$

48. $y = \frac{1}{(x + 1)^2}$

49. A figura a seguir mostra o gráfico de uma função $f(x)$ com domínio $[0, 2]$ e imagem $[0, 1]$. Encontre o domínio e a imagem das funções a seguir e esboce os gráficos correspondentes.



(a) $f(x) + 2$

(b) $f(x) - 1$

(c) $2f(x)$

(d) $-f(x)$

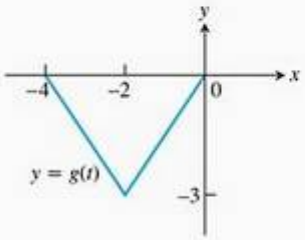
(e) $f(x + 2)$

(f) $f(x - 1)$

(g) $f(-x)$

(h) $-f(x + 1) + 1$

50. A figura seguinte mostra o gráfico de uma função $g(t)$ com domínio $[-4, 0]$ e imagem $[-3, 0]$. Encontre o domínio e a imagem das funções a seguir e esboce os gráficos correspondentes.



(a) $g(-t)$ **(b)** $-g(t)$
(c) $g(t) + 3$ **(d)** $1 - g(t)$
(e) $g(-t + 2)$ **(f)** $g(t - 2)$
(g) $g(1 - t)$ **(h)** $-g(t - 4)$

Mudando de escala vertical e horizontal

Os exercícios 51–60 dizem o fator pelo qual os gráficos das funções dadas são alongados ou comprimidos, bem como a direção em que o fazem. Construa uma equação para o gráfico alongado ou comprimido.

51. $y = x^2 - 1$, alongado verticalmente por um fator de 3

52. $y = x^2 - 1$, comprimido horizontalmente por um fator de 2

53. $y = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, comprimido verticalmente por um fator de 2

54. $y = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, alongado horizontalmente por um fator de 3

55. $y = \sqrt{x+1}$, comprimido horizontalmente por um fator de 4

56. $y = \sqrt{x+1}$, alongado verticalmente por um fator de 3

57. $y = \sqrt{4-x^2}$, alongado horizontalmente por um fator de 2

58. $y = \sqrt{4-x^2}$, comprimido verticalmente por um fator de 3

59. $y = 1 - x^3$, comprimido horizontalmente por um fator de 3

60. $y = 1 - x^3$, alongado horizontalmente por um fator de 2

Construindo gráficos

Nos exercícios 61–68, represente graficamente cada função, mas não coloque seus pontos num sistema de coordenadas; em vez disso, comece com o gráfico de uma das funções-padrão apresentadas nas figuras 1.15–1.17 e, em seguida, aplique a transformação adequada.

61. $y = -\sqrt{2x + 1}$ **62.** $y = \sqrt{1 - \dfrac{x}{2}}$

63. $y = (x - 1)^3 + 2$ **64.** $y = (1 - x)^3 + 2$

65. $y = \dfrac{1}{2x} - 1$ **66.** $y = \dfrac{2}{x^2} + 1$

67. $y = -\sqrt[3]{x}$ **68.** $y = (-2x)^{2/3}$

69. Represente graficamente a função $y = |x^2 - 1|$.

70. Represente graficamente a função $y = \sqrt{|x|}$.

Elipses

Os exercícios 71–76 apresentam equações de elipses. Coloque cada equação na forma-padrão e esboce a elipse.

71. $9x^2 + 25y^2 = 225$ **72.** $16x^2 + 7y^2 = 112$

73. $3x^2 + (y - 2)^2 = 3$ **74.** $(x + 1)^2 + 2y^2 = 4$

75. $3(x - 1)^2 + 2(y + 2)^2 = 6$

76. $6\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 54$

77. Escreva uma equação para a elipse $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$, transladada 4 unidades para a esquerda e 3 unidades para cima. Esboce a elipse e identifique seu centro e seu eixo principal.

78. Escreva uma equação para a elipse $(x^2/4) + (y^2/25) = 1$ transladada 3 unidades para a direita e 2 unidades para baixo. Esboce a elipse e identifique seu centro e seu eixo principal.

Funções pares e ímpares

79. Suponha que f seja uma função par, g seja uma função ímpar e ambas sejam definidas na reta real $\mathbb{R}$. Quais das funções a seguir (onde definidas) são pares? E ímpares?

(a) fg **(b)** f/g **(c)** g/f
(d) $f^2 = ff$ **(e)** $g^2 = gg$ **(f)** $f \circ g$
(g) $g \circ f$ **(h)** $f \circ f$ **(i)** $g \circ g$

80. Uma função pode ser simultaneamente par e ímpar? Justifique sua resposta.

81. *(Continuação do Exemplo 1.)* Represente graficamente
T as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{1-x}$, bem como **(a)** sua soma **(b)** seu produto, **(c)** suas duas diferenças, **(d)** seus dois quocientes.

82. Seja $f(x) = x - 7$ e $g(x) = x^2$. Represente graficamente f e g,
T bem como $f \circ g$ e $g \circ f$.

Curvas senóides gerais

Para

$$f(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{B}(x-C)\right)+D$$

identifique A, B, C e D para as funções seno dos exercícios 83–86 e esboce seus gráficos.

83. $y = 2 \operatorname{sen}(x + \pi) - 1$

84. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$

85. $y = -\frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} t\right) + \frac{1}{\pi}$

86. $y = \frac{L}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{L}, \quad L > 0$

USANDO O COMPUTADOR

Nos exercícios 87–90, você vai explorar graficamente a função seno geral

$$f(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{B}(x-C)\right)+D$$

enquanto altera os valores das constantes A, B, C e D. Use um SAC ou um software de gráficos para cumprir as instruções dos exercícios.

87. O período B Defina as constantes $A = 3$, $C = D = 0$.

(a) Desenhe o gráfico de $f(x)$ no sistema de coordenadas para os valores $B = 1, 3, 2\pi, 5\pi$ no intervalo $-4\pi \le x \le 4\pi$. Descreva o que acontece com o gráfico da função seno geral à medida que o período aumenta.

(b) O que acontece com o gráfico quando B assume valores negativos? Experimente com $B = -3$ e $B = -2\pi$.

88. O deslocamento horizontal C Defina as constantes $A = 3$, $B = 6$, $D = 0$.

(a) Desenhe o gráfico de $f(x)$ no sistema de coordenadas para os valores $C = 0$, 1 e 2 no intervalo $-4\pi \le x \le 4\pi$. Descreva o que acontece com o gráfico da função seno geral à medida que C aumenta e assume valores positivos.

(b) O que acontece com o gráfico quando C assume valores negativos?

(c) Qual é o menor valor positivo que pode ser atribuído a C para que o gráfico não exiba translação horizontal? Confirme sua resposta com um gráfico.

89. O deslocamento vertical D Defina as constantes $A = 3$, $B = 6$, $C = 0$.

(a) Desenhe o gráfico de $f(x)$ no sistema de coordenadas para os valores $D = 0$, 1 e 3 no intervalo $-4\pi \le x \le 4\pi$. Descreva o que acontece com o gráfico da função seno geral à medida que D aumenta e assume valores positivos.

(b) O que acontece com o gráfico quando D assume valores negativos?

90. A amplitude A Defina as constantes $B = 6$, $C = D = 0$.

(a) Descreva o que acontece com o gráfico da função seno geral à medida que A aumenta e assume valores positivos. Confirme sua resposta desenhando o gráfico de $f(x)$ no sistema de coordenadas para os valores $A = 1$, 5 e 9.

(b) O que acontece com o gráfico quando A assume valores negativos?

1.4 Construindo gráficos com calculadoras e computadores

Uma calculadora gráfica ou um computador com software gráfico permitem construir, de maneira muito precisa, gráficos para funções altamente complexas. Sem eles, muitas dessas funções não poderiam ser representadas graficamente com facilidade. No entanto, é preciso cuidado ao usar tais ferramentas — e este é o assunto desta seção. No Capítulo 4, veremos como o cálculo nos ajuda a ter certeza de estar observando com precisão todas as características importantes do gráfico de uma função.

Janelas gráficas

Quando usamos uma calculadora gráfica ou um computador como ferramenta gráfica, uma parte do gráfico é mostrada numa **janela de**

visualização ou **tela** retangular. Muitas vezes, a janela-padrão fornece uma visualização incompleta ou enganadora do gráfico. Usamos o termo *janela quadrada* quando as unidades ou escalas nos dois eixos são as mesmas. Esse termo não significa que a janela de visualização em si seja quadrada (normalmente, ela é retangular), mas significa que a escala do eixo x é igual à do eixo y.

Quando um gráfico aparece na janela-padrão, a unidade do eixo x pode ser diferente da unidade de escala do eixo y, a fim de se adequar ao gráfico que está sendo mostrado. Para estabelecer a janela de visualização, o usuário especifica os valores mínimos e máximos das variáveis independentes e dependentes. Ou seja, especifica um intervalo $a \le x \le b$, bem como um contradomínio $c \le y \le d$. A máquina seleciona determinado número de valores de x entre a e b, a intervalos regulares. Começando com um primeiro valor de x, se ele estiver dentro do domínio da função f cujo gráfico está sendo construído, e se $f(x)$ estiver dentro de $[c, d]$, então o ponto $(x, f(x))$ será representado no sistema de coordenadas. Se x estiver fora do domínio de f, ou se $f(x)$ estiver fora do contradomínio especificado $[c, d]$, então a máquina simplesmente passará para o próximo valor de x, já que não pôde representar $(x, f(x))$ naquele caso. Agindo desse modo, a máquina insere um grande número de pontos $(x, f(x))$ e consegue, assim, uma curva que representa aproximadamente o gráfico; para isso, traça um pequeno segmento de reta entre cada ponto inserido e o próximo ponto contíguo a ele, como faríamos manualmente. Em geral, pontos adjacentes são tão próximos que a representação gráfica tem a aparência de uma curva contínua. Alguns erros podem acontecer durante esse processo computacional; nos exemplos a seguir, ilustraremos os problemas mais comuns.

EXEMPLO 1 Escolhendo uma janela de visualização

Construa o gráfico da função $f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ em cada janela de visualização ou tela a seguir:

(a) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$ **(b)** $[-4, 4]$ por $[-50, 10]$ **(c)** $[-4, 10]$ por $[-60, 60]$

SOLUÇÃO

(a) Selecionamos $a = -10$, $b = 10$, $c = -10$ e $d = 10$ para especificar o intervalo de valores de x e a imagem de valores de y para a janela. O gráfico resultante é mostrado na Figura 1.42a. Parece que a janela está cortando a parte inferior do gráfico e que o intervalo de valores de x é grande demais. Vamos tentar a próxima janela.

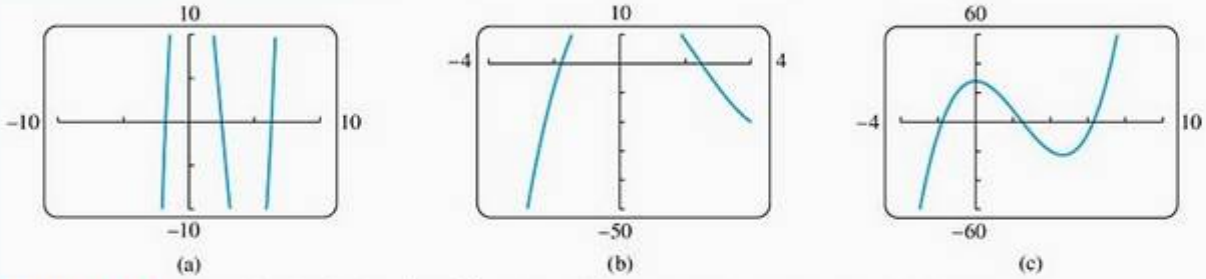


FIGURA 1.42 O gráfico de $f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ em diferentes janelas de visualização (Exemplo 1).

(b) Agora, visualizamos melhor o gráfico (Figura 1.42b), mas a parte de cima está faltando e também precisamos ver à direita de $x = 4$. Talvez a próxima janela ajude.

(c) A Figura 1.42c mostra o gráfico nessa nova janela de visualização. Observe que temos uma visão mais completa e agora o desenho parece de fato o gráfico de um polinômio de terceiro grau. Escolher uma boa janela de visualização é um processo de tentativa e erro que também pode exigir alguns ajustes.

EXEMPLO 2 Janelas quadradas

Quando um gráfico é mostrado, a unidade do eixo x pode ser diferente da unidade do eixo y, como nos gráficos apresentados nas figuras 1.42b e 1.42c. O resultado é uma distorção no desenho, o que pode ser enganador. Podemos tornar quadrada a janela de visualização comprimindo ou alongando as unidades em um dos eixos, de modo que se ajustem à escala do outro; com isso, obteremos o gráfico verdadeiro. Muitos sistemas possuem funções para tornar a janela "quadrada" Se o seu não as possui, você terá de fazer alguns cálculos e definir manualmente o tamanho da janela até conseguir uma janela quadrada, ou inserir na sua visualização uma previsão do desenho verdadeiro.

A Figura 1.43a mostra os gráficos das retas perpendiculares $y = x$ e $y = -x + 3\sqrt{2}$, junto com o semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$, em uma janela não quadrada de $[-6, 6]$ por $[-6, 8]$. Observe a distorção. As linhas não parecem perpendiculares, e o semicírculo parece ter forma elíptica.

A Figura 1.43b mostra os gráficos das mesmas funções em uma janela quadrada, na qual as unidades do eixo x foram convertidas para ficarem iguais às do eixo y. Observe que a janela de visualização de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$ tem o mesmo eixo x nas duas figuras, mas a escala desse eixo foi comprimida na Figura 1.43b para tornar a janela quadrada. A Figura 1.43c apresenta uma visão ampliada com uma janela quadrada de $[-3, 3]$ por $[0, 4]$.

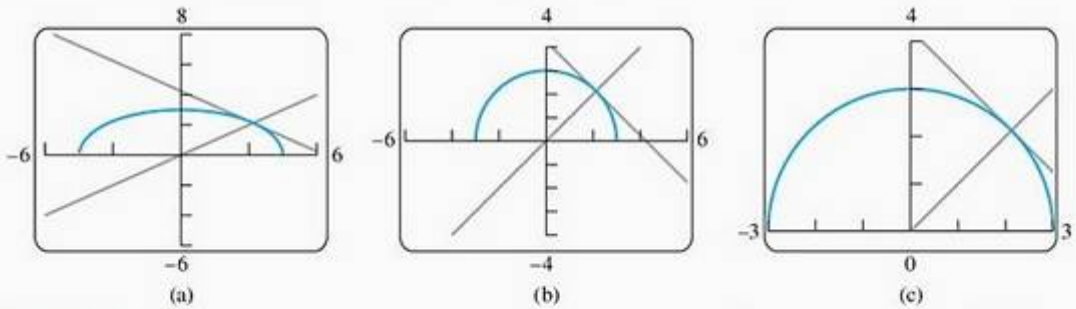


FIGURA 1.43 Gráficos das retas perpendiculares $y = x$ e $y = -x + 3\sqrt{2}$ e o semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$, em (a) uma janela não quadrada e em (b) e (c) uma janela quadrada (Exemplo 2).

Se o denominador de uma função racional for zero em algum valor de x dentro da janela de visualização, a calculadora ou o software gráfico poderão produzir um segmento de reta bem inclinado, quase vertical, indo da parte superior à inferior da janela. Veja um exemplo.

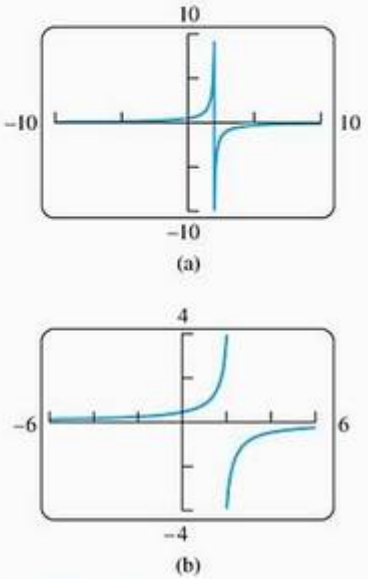


FIGURA 1.44 Gráficos da função $y = \dfrac{1}{2-x}$ (Exemplo 3).

EXEMPLO 3 Gráfico de uma função racional

Construa o gráfico da função $y = \dfrac{1}{2-x}$

SOLUÇÃO A Figura 1.44a mostra o gráfico traçado por nosso software na janela quadrada padrão de [−10, 10] por [−10, 10]. Observe o segmento de reta quase vertical em $x = 2$. Na verdade, esse segmento não faz parte do gráfico, e $x = 2$ não pertence ao domínio da função. Por tentativa e erro, podemos eliminar a reta mudando a janela de visualização para uma exibição menor, de [−6, 6] por [−4, 4], o que nos proporcionará um gráfico melhor (Figura 1.44b).

Às vezes, o gráfico de uma função trigonométrica oscila muito rapidamente. Quando uma calculadora ou software insere os pontos do gráfico no sistema de coordenadas e os conecta, muitos dos pontos máximos e mínimos são, na verdade, omitidos. Logo, o gráfico resultante é enganador.

EXEMPLO 4 Gráfico de uma função rapidamente oscilante

Construa o gráfico da função $f(x) = \text{sen } 100x$.

SOLUÇÃO A Figura 1.45a mostra o gráfico de f na janela de visualização de [−12, 12] por [−1, 1]. Vemos que o gráfico parece estranho, pois a curva senóide deve oscilar periodicamente entre −1 e 1. Esse comportamento não é exibido na Figura 1.45a. Podemos tentar com uma janela de visualização menor, digamos, [−6, 6] por [−1, 1], mas o gráfico não melhora (Figura 1.45b). A dificuldade é que o período da função trigonométrica $y = \text{sen } 100x$ é muito pequeno ($2\pi/100 \approx 0{,}063$). Se escolhemos uma janela de visualização bem menor, de [−0,1, 0,1] por [−1, 1], obtemos o gráfico mostrado na Figura 1.45c. Esse gráfico, sim, revela as oscilações esperadas de uma curva senóide.

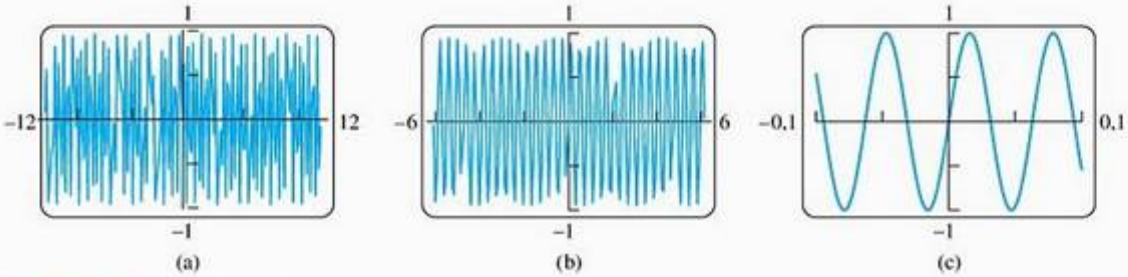


FIGURA 1.45 Gráficos da função $y = \text{sen } 100x$ em três janelas de visualização. Como o período é $2\pi/100 \approx 0{,}063$, a janela menor vista em (c) exibe com mais fidelidade as características dessa função rapidamente oscilante (Exemplo 4).

EXEMPLO 5 Outra função rapidamente oscilante

Construa o gráfico da função $y = \cos x + \dfrac{1}{50} \text{sen } 50x$.

SOLUÇÃO Na janela de visualização [−6, 6] por [−1, 1] o gráfico assemelha-se muito à função cosseno, mas com algumas pequenas oscilações pontiagudas ao longo da curva (Figura 1.46a). Conseguimos uma visualização melhor quando reduzimos significativamente a janela para [−0,6, 0,6] por [0,8, 1,02], obtendo o gráfico da Figura 1.46b. Agora, vemos

as oscilações pequenas, porém rápidas, do segundo termo, 1/50 sen $50x$, ao lado dos valores comparativamente maiores da curva de cosseno.

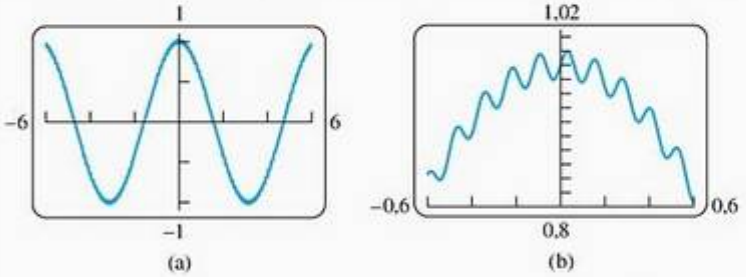


FIGURA 1.46 Em (b) vemos de perto a função $y = \cos x + \frac{1}{50}\,\text{sen}\,50x$ representada graficamente em (a). O termo $\cos x$ claramente domina o segundo termo, $\frac{1}{50}\,\text{sen}\,50x$, que produz as rápidas oscilações ao longo da curva de cosseno (Exemplo 5).

EXEMPLO 6 Construindo o gráfico de uma potência fracionária ímpar

Construa o gráfico da função $y = x^{1/3}$.

SOLUÇÃO Muitas ferramentas gráficas exibem o gráfico mostrado na Figura 1.47a. Comparado com o gráfico de $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ da Figura 1.17, vemos que o segmento da esquerda, correspondente a $x < 0$, está faltando. A razão para essa diferença entre os gráficos é que muitas calculadoras e softwares calculam $x^{1/3}$ como $e^{(1/3)\ln x}$. (As funções exponencial e logarítmica serão apresentadas nas seções 1.5 e 1.6.) Como a função logarítmica não é definida para valores negativos de x, a ferramenta só consegue produzir o segmento da direita, onde $x > 0$.

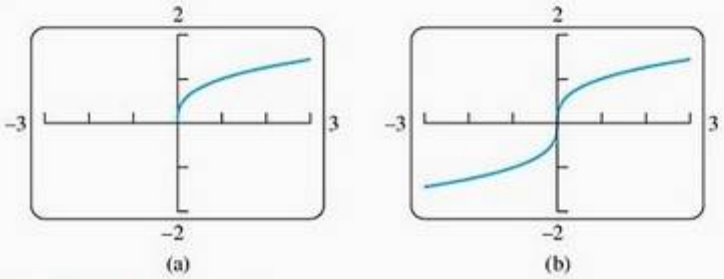


FIGURA 1.47 No gráfico de $y = x^{1/3}$ em (a) está faltando o ramo da esquerda. Em (b), representamos graficamente a função $f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$, obtendo ambos os ramos. (Exemplo 6.)

Para obter o desenho completo, com os dois lados, podemos grafar a função

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$$

Essa função corresponde a $x^{1/3}$, exceto em $x = 0$ (onde f é indefinida, embora $0^{1/3} = 0$). O gráfico de f é mostrado na Figura 1.47b.

Modelagem empírica: captando a tendência de dados coletados

No Exemplo 3 da Seção 1.2, verificamos a razoabilidade da hipótese de Kepler de que o tempo de órbita de um planeta seja proporcional à sua distância média do Sol elevada à potência 3/2. Quando não é possível levantar uma hipótese sobre a relação entre uma variável dependente e uma independente, podemos coletar os dados e encontrar uma curva que "se ajuste" a eles para, depois, captar a tendência do gráfico de dispersão. O processo para encontrar uma curva que se ajuste aos dados é chamado **análise de regressão**, sendo a curva resultante uma **curva de regressão**. Um computador ou uma calculadora gráfica determina a curva de regressão encontrando aquela curva específica que minimiza a soma dos quadrados das distâncias verticais entre os dados e a curva. Esse método dos **mínimos quadrados** será discutido nos exercícios da Seção 14.7, Volume II.

Há muitos tipos úteis de curvas de regressão, como curvas de potência, polinomial, exponencial, logarítmica e senoidal. Muitos computadores ou calculadoras gráficas possuem um recurso de análise de regressão que se ajusta a uma série de tipos de curva de regressão. No exemplo a seguir, usamos um recurso de regressão linear das calculadoras gráficas para ajustar a equação de uma reta aos dados da Tabela 1.3.

TABELA 1.3 Preço do selo postal nos Estados Unidos

Ano x	Custo y
1968	0,06
1971	0,08
1974	0,10
1975	0,13
1977	0,15
1981	0,18
1981	0,20
1985	0,22
1987	0,25
1991	0,29
1995	0,32
1998	0,33
2002	0,37

EXEMPLO 7 Ajustando uma reta de regressão

Começando com os dados da Tabela 1.3, construa um modelo para o preço do selo postal em função do tempo. Depois de verificar se o modelo é "razoável", use-o para predizer o preço em 2010.

SOLUÇÃO

Estamos construindo um modelo para o preço do selo desde 1968. Houve dois aumentos em 1981, um de três centavos de dólar seguido de outro de dois centavos de dólar. Para tornar 1981 comparável aos outros anos, consideramos os dois aumentos como um aumento único de cinco centavos de dólar, o que nos forneceu os dados na Tabela 1.4. A Figura 1.48 mostra o gráfico de dispersão para os dados da Tabela 1.4.

TABELA 1.4 Preço de um selo postal nos Estados Unidos desde 1968

x	0	3	6	7	9	13	17	19	23	27	30	34
y	6	8	10	13	15	20	22	25	29	32	33	37

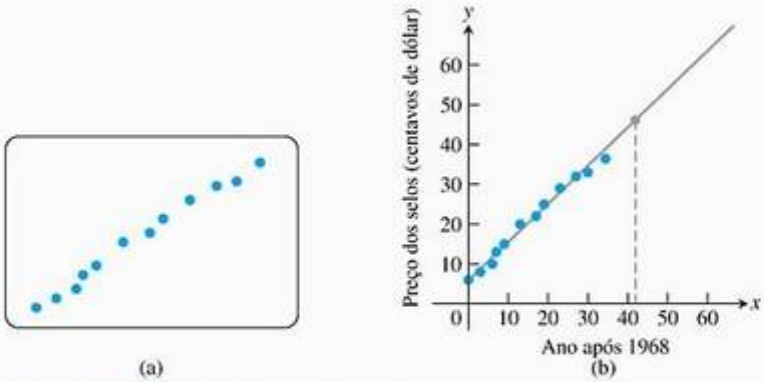


FIGURA 1.48 (a) Gráfico de dispersão dos dados (x, y) da Tabela 1.4. (b) Uso da reta de regressão para estimar o preço do selo em 2010 (Exemplo 7).

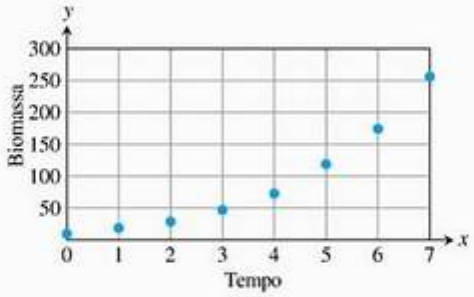


FIGURA 1.49 Biomassa de uma cultura de levedura em função do tempo (Exemplo 8). (Dados de PEARL, R., "The growth of population", *Quart. Rev. Biol.*, v. 2, p. 532-548, 1927.)

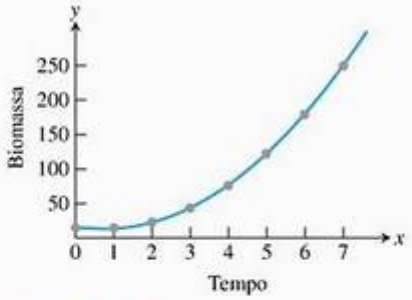


FIGURA 1.50 Ajustando uma curva quadrática aos dados de Pearl, obtemos a equação $y = 6{,}10x^2 - 9{,}28x + 16{,}43$ e a predição $y(17) = 1.622{,}65$ (Exemplo 8).

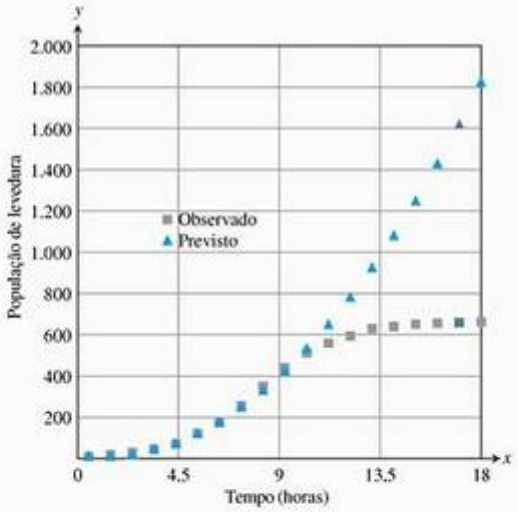


FIGURA 1.51 O restante dos dados de Pearl (Exemplo 8).

Como o gráfico é satisfatoriamente linear, investigamos um modelo linear. Colocando os dados em uma calculadora gráfica (ou planilha) e selecionando a opção "regressão linear", obtemos a equação da reta de regressão

$$y = 0{,}94x + 6{,}10$$

A Figura 1.48b mostra a reta e o gráfico juntos. O ajuste mostra-se significativamente adequado, então o modelo parece razoável.

Analisando a reta de regressão, concluímos que em 2010 ($x = 42$), um selo postal custará

$$y = 0{,}94(42) + 6{,}10 \approx 46 \text{ centavos de dólar.}$$

Essa previsão aparece como um ponto cinza na reta de regressão da Figura 1.48b.

EXEMPLO 8 Encontrando uma curva para predizer níveis populacionais

Talvez queiramos predizer o tamanho futuro de uma população, como o número de trutas ou bagres vivendo em uma propriedade onde se criam peixes. A Figura 1.49 mostra um gráfico de dispersão dos dados coletados por R. Pearl para uma cultura de células de levedura (medidas como **biomassa**) crescendo em um meio de cultura ao longo do tempo (medido em horas).

Em um sistema de coordenadas cartesianas, os pontos parecem estar em uma curva lisa com uma tendência ascendente. Podemos tentar captar essa tendência ajustando um polinômio (por exemplo, uma curva quadrática $y = ax^2 + bx + c$), uma curva de potência ($y = ax^b$) ou uma curva exponencial ($y = ae^{bx}$). A Figura 1.50 mostra o resultado de uma calculadora para ajustar um modelo quadrático.

O modelo quadrático $y = 6{,}10x^2 - 9{,}28x + 16{,}43$ parece ajustar-se razoavelmente bem aos dados coletados (Figura 1.50). Usando esse modelo, predizemos que, depois de 17 horas, a população será $y(17) = 1.622{,}65$. Vamos examinar melhor os dados de Pearl para verificar se nosso modelo quadrático continua a ser uma boa escolha.

Na Figura 1.51, apresentamos todos os dados de Pearl. Agora você vê que a predição de $y(17) = 1.622{,}65$ superestima exageradamente a população observada de 659,6. Por que o modelo quadrático não conseguiu predizer um valor mais exato?

O problema está no perigo de fazer previsões além do conjunto de dados usados para construir o modelo empírico. (A faixa de dados que permitiu criar nosso modelo foi $0 \le x \le 7$.) Esse tipo de *extrapolação* é especialmente perigoso quando o modelo escolhido não está baseado em algum fundamento racional que sugira a forma do modelo. Em nosso exemplo, por que esperaríamos uma função quadrática como base do crescimento populacional? Por que não uma função exponencial? Em vista disso, como então podemos predizer os valores futuros? Geralmente, o cálculo pode ajudar e, no Capítulo 9, vamos utilizá-lo para fazer a modelagem do crescimento populacional.

Análise de regressão

A análise de regressão tem quatro partes:

1. Registre os dados (gráfico de dispersão).
2. Encontre uma equação de regressão. Para uma reta, ela tem a forma $y = mx + b$ e, para uma curva quadrática, a forma $y = ax^2 + bx + c$.
3. Sobreponha o gráfico da equação de regressão ao de dispersão para ver o ajuste.
4. Se o ajuste for satisfatório, então use a equação de regressão para predizer valores de y em função de valores de x não apresentados na tabela.

Exercícios 1.4

Escolhendo uma janela de visualização

Nos exercícios 1–4, use uma calculadora gráfica ou um computador para determinar qual das janelas de visualização exibe o gráfico mais adequado da função especificada.

1. $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$
   (a) $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$ (b) $[-2, 2]$ por $[-5, 5]$
   (c) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$ (d) $[-5, 5]$ por $[-25, 15]$
2. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$
   (a) $[-1, 1]$ por $[-5, 5]$ (b) $[-3, 3]$ por $[-10, 10]$
   (c) $[-5, 5]$ por $[-10, 20]$ (d) $[-20, 20]$ por $[-100, 100]$
3. $f(x) = 5 + 12x - x^3$
   (a) $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$ (b) $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
   (c) $[-4, 4]$ por $[-20, 20]$ (d) $[-4, 5]$ por $[-15, 25]$
4. $f(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$
   (a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ (b) $[-2, 6]$ por $[-1, 4]$
   (c) $[-3, 7]$ por $[0, 10]$ (d) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

Determinando uma janela de visualização

Nos exercícios 5–30, determine uma janela de visualização adequada para a função dada e utilize-a para exibir o gráfico da função.

5. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 15$
6. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1$
7. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10$
8. $f(x) = 4x^3 - x^4$
9. $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$
10. $f(x) = x^2(6 - x^3)$
11. $y = 2x - 3x^{2/3}$
12. $y = x^{1/3}(x^2 - 8)$
13. $y = 5x^{2/5} - 2x$
14. $y = x^{2/3}(5 - x)$
15. $y = |x^2 - 1|$
16. $y = |x^2 - x|$
17. $y = \frac{x + 3}{x + 2}$
18. $y = 1 - \frac{1}{x + 3}$
19. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$
20. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
21. $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x - 6}$
22. $f(x) = \frac{8}{x^2 - 9}$
23. $f(x) = \frac{6x^2 - 15x + 6}{4x^2 - 10x}$
24. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$
25. $y = \text{sen } 250x$
26. $y = 3 \cos 60x$
27. $y = \cos\left(\frac{x}{50}\right)$
28. $y = \frac{1}{10} \text{sen}\left(\frac{x}{10}\right)$
29. $y = x + \frac{1}{10} \text{sen } 30x$
30. $y = x^2 + \frac{1}{50} \cos 100x$
31. Faça o gráfico da metade inferior do círculo definido pela equação $x^2 + 2x = 4 + 4y - y^2$.
32. Faça o gráfico do ramo superior da hipérbole $y^2 - 16x^2 = 1$.
33. Faça o gráfico para quatro períodos da função $f(x) = -\text{tg } 2x$.
34. Faça o gráfico para dois períodos da função $f(x) = 3 \text{ cotg } \frac{x}{2} + 1$.
35. Faça o gráfico da função $f(x) = \text{sen } 2x + \cos 3x$.
36. Faça o gráfico da função $f(x) = \text{sen}^3 x$.

Construindo gráficos no modo pontilhado

Outra maneira de evitar conexões incorretas quando se está usando uma ferramenta gráfica é utilizar o "modo pontilhado", no qual somente os pontos são desenhados. Se sua ferramenta permite esse modo, use-o para desenhar no sistema de coordenadas os pontos das funções apresentadas nos exercícios 37–40.

37. $y = \dfrac{1}{x-3}$

38. $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

39. $y = x\lfloor x \rfloor$

40. $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

Análise de regressão

41. A Tabela 1.5 mostra a remuneração anual média dos trabalhadores da área de construção.

TABELA 1.5 Remuneração anual média paga aos trabalhadores da área de construção

Ano	Remuneração anual (dólares)
1980	22,033
1985	27,581
1988	30,466
1990	32,836
1992	34,815
1995	37,996
1999	42,236
2002	45,413

Fonte: U.S. Bureau of Economic Analysis.

(a) Encontre uma equação de regressão linear para os dados.

(b) Encontre o coeficiente angular da reta de regressão. O que esse coeficiente representa?

(c) Sobreponha o gráfico da equação da regressão ao de dispersão dos dados.

(d) Use a equação de regressão para predizer a média anual da remuneração paga aos trabalhadores da área de construção em 2010.

42. O preço médio das residências nos Estados Unidos tem aumentado muito desde 1970. Entretanto, a Tabela 1.6 mostra que há diferenças em várias partes do país.

(a) Encontre uma equação de regressão linear para o custo da moradia no Nordeste.

(b) O que o coeficiente angular da reta de regressão representa?

(c) Encontre uma equação de regressão linear para o custo da moradia no Meio-Oeste.

(d) Onde o preço médio está subindo mais rapidamente, no Nordeste ou no Meio-Oeste?

TABELA 1.6 Preço médio das residências nos Estados Unidos

Ano	Nordeste (dólares)	Meio-Oeste (dólares)
1970	25.200	20.100
1975	39.300	30.100
1980	60.800	51.900
1985	88.900	58.900
1990	141.200	74.000
1995	197.100	88.300
2000	264.700	97.000

Fonte: National Association of Realtors®.

43. **Distância de frenagem de um veículo** A Tabela 1.7 mostra a distância total de frenagem de um carro em função de sua velocidade.

(a) Encontre a equação da regressão quadrática para os dados da Tabela 1.7.

(b) Sobreponha o gráfico da equação de regressão quadrática ao de dispersão dos dados.

(c) Use o gráfico da equação de regressão quadrática para predizer a distância total média de frenagem para as velocidades de 72 e 85 milhas/hora. Confirme algebricamente.

(d) Agora use a regressão *linear* para predizer a distância total média de frenagem para as velocidades de 72 e 85 milhas/hora. Sobreponha a regressão linear a um gráfico de dispersão dos dados. Qual se ajusta melhor: a reta deste item ou o gráfico do ítem (b)?

TABELA 1.7 Distância de frenagem do veículo

Velocidade (milhas/hora)	Distância total média de frenagem (pés)
20	42
25	56
30	73,5
35	91,5
40	116
45	142,5
50	173
55	209,5
60	248
65	292,5
70	343
75	401
80	464

Fonte: U.S. Bureau of Public Roads.

44. **Ondas de popa** Observando-se as ondas que acompanham os barcos formando ângulos retos em relação a

seu percurso, verificou-se que a distância entre as cristas dessas ondas (*comprimento de onda*) aumenta com a velocidade do barco. A Tabela 1.8 mostra a relação entre o comprimento de onda e a velocidade do barco.

TABELA 1.8 Comprimentos de onda

Comprimento de onda (m)	Velocidade (km/h)
0,20	1,8
0,65	3,6
1,13	5,4
2,55	7,2
4,00	9,0
5,75	10,8
7,80	12,6
10,20	14,4
12,90	16,2
16,00	18,0
18,40	19,8

(a) Encontre uma equação de regressão exponencial $y = ax^b$ para os dados da Tabela 1.8, em que x é o comprimento de onda e y, a velocidade do barco.

(b) Sobreponha os gráficos da equação de regressão e de dispersão dos dados.

(c) Use o gráfico da equação da regressão exponencial para predizer a velocidade do barco quando o comprimento de onda for 11 m. Confirme algebricamente.

(d) Agora use a regressão *linear* para predizer a velocidade do barco quando o comprimento de onda for 11 m. Sobreponha o gráfico de regressão linear ao de dispersão dos dados. Qual se ajusta melhor: a reta deste item ou a curva do item **(b)**?

1.5 Funções exponenciais

Esta seção aborda as funções exponenciais, importantes na ciência, na engenharia e em outras áreas. Veremos que a teoria matemática por trás dessas funções é de certo modo sutil, assim como a teoria das funções logarítmicas, intimamente relacionadas a elas. Neste primeiro momento, observaremos as funções exponenciais de maneira mais intuitiva, a fim de apresentar seus usos e propriedades essenciais; mas, no Capítulo 7, quando já tivermos desenvolvido importantes idéias e resultados de cálculo, elas receberão uma abordagem rigorosa.

Comportamento exponencial

Quando uma quantidade positiva P dobra, ela cresce por um fator de 2 e a quantidade se torna $2P$. Se ela dobrar de novo, vai se tornar $2(2P) = 2^2P$, ao passo que uma terceira duplicação resultará em $2(2^2P) = 2^3P$. Continuando a duplicar dessa maneira, chegaremos à função $f(x) = 2^x$, onde x é um inteiro positivo. Chamamos essa função *exponencial* porque a variável x aparece no expoente de 2^x. Funções do tipo $g(x) = 10^x$ e $h(x) = (1/2)^x$ são outros exemplos de funções exponenciais. Em geral, se $a \neq 1$ é uma constante positiva, a função

$$f(x) = a^x$$

é a **função exponencial com base a.**

EXEMPLO 1 Rendimento de uma conta de poupança

Em 2000, 100 dólares foram depositados numa conta de poupança, sendo a partir de então remunerados com juros cumulativos pagos anualmente (uma vez ao ano), a uma taxa de 5,5%. Pressupondo que não se tenha depositado mais nada na conta nem se tenha sacado nada depois, determine uma fórmula para a função que descreva a quantia A na conta em função de x anos transcorridos.

SOLUÇÃO Se $P = 100$, no fim do primeiro ano, a quantia na conta é a quantia original mais os juros recebidos, ou:

$$P + \left(\frac{5{,}5}{100}\right)P = (1 + 0{,}055)P = (1{,}055)P$$

No fim do segundo ano, a conta recebe juros novamente e passa a ter a seguinte quantia:

$$(1 + 0{,}055) \cdot (1{,}055P) = (1{,}055)^2P = 100 \cdot (1{,}055)^2 \qquad P = 100$$

Continuando esse processo, depois de x anos, o valor da conta é

$$A = 100 \cdot (1{,}055)^x$$

Surge, então, nesse problema um múltiplo da função exponencial com base 1,055. A Tabela 1.9 mostra as quantias acumuladas nos quatro primeiros anos. Observe que, a cada ano, a quantia é sempre 1,055 vez maior que no ano anterior.

TABELA 1.9 Rendimento de uma conta de poupança

Ano	Saldo (dólares)	Rendimento (dólares)
2000	100	
2001	$100(1{,}055) = 105{,}50$	5,50
2002	$100(1{,}055)^2 = 111{,}30$	5,80
2003	$100(1{,}055)^3 = 117{,}42$	6,12
2004	$100(1{,}055)^4 = 123{,}88$	6,46

Para expoentes racionais e inteiros, o valor de uma função exponencial $f(x) = a^x$ é obtido aritmeticamente como se segue. Se $x = n$ é um inteiro positivo, obtém-se o número a^n multiplicando a por si mesmo n vezes:

$$a^2 = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}.$$

Se $x = 0$, então $a^0 = 1$, e se $x = -n$ para algum inteiro positivo n, então

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Se $x = 1/n$ para algum inteiro positivo n, então

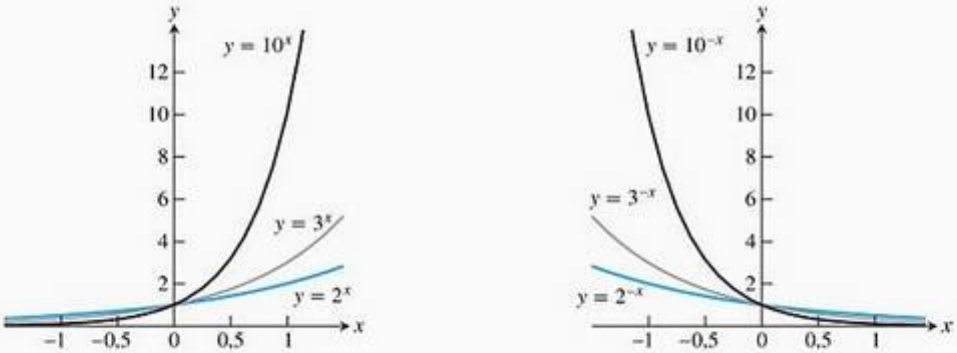
$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

que é o número positivo que, quando multiplicado por si n vezes, resulta em a. Se $x = p/q$ é um número racional qualquer, então

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$$

Se x é *irracional*, o significado exato de a^x não é tão claro, mas podemos definir seu valor considerando valores para números racionais que se aproximem cada vez mais de x. Esse processo envolve a propriedade de completude dos números reais (discutida no Apêndice A.4) e outros assuntos abordados em cursos mais avançados. O significado de a^x para x irracionais ficará claro no Capítulo 7, em que usaremos os métodos de cálculo para definir as funções exponenciais e logarítmicas. Por ora, trataremos esse significado informalmente, usando o gráfico da função exponencial.

Na Seção 1.2 mostramos os gráficos de várias funções exponenciais; aqui, tornamos a fazê-lo na Figura 1.52. Esses gráficos descrevem os valores das funções exponenciais para todos os valores reais de x. O valor para um número irracional x é escolhido de modo que o gráfico de a^x não apresente "buracos" ou "saltos". Obviamente, essas palavras não são termos matemáticos, mas transmitem informalmente a idéia. De modo mais preciso, o valor de a^x, quando x é irracional, é escolhido de modo que a função $f(x) = a^x$ seja *contínua*, uma noção que será detalhadamente discutida no próximo capítulo. Essa escolha garante que o gráfico exiba comportamento crescente quando $a > 1$, ou comportamento decrescente quando $0 < a < 1$ (ver Figura 1.52).



(a) $y = 2^x, y = 3^x, y = 10^x$ (b) $y = 2^{-x}, y = 3^{-x}, y = 10^{-x}$

FIGURA 1.52 Gráficos de funções exponenciais

As funções exponenciais seguem as já conhecidas regras de exponenciação, relacionadas a seguir. Quando os expoentes são números racionais ou inteiros, é fácil verificar essas regras usando álgebra. No Capítulo 7, nós as provaremos de modo geral para todos os números reais.

Regras de exponenciação

Se $a > 0$ e $b > 0$, as afirmações a seguir são verdadeiras para quaisquer x e y reais.

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$
4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
5. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

EXEMPLO 2 Usando as regras de exponenciação

1. $3^{1,1} \cdot 3^{0,7} = 3^{1,1+0,7} = 3^{1,8}$
2. $\dfrac{\left(\sqrt{10}\right)^3}{\sqrt{10}} = \left(\sqrt{10}\right)^{3-1} = \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10$
3. $\left(5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 5^2 = 25$
4. $7^{\pi} \cdot 8^{\pi} = (56)^{\pi}$
5. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{1/2} = \dfrac{4^{1/2}}{9^{1/2}} = \dfrac{2}{3}$

A função exponencial natural e^x

A função exponencial mais importante para a modelagem de fenômenos naturais, físicos e econômicos é a **função exponencial natural**, cuja base é o número especial e. Esse número é irracional e seu valor é de aproximadamente 2,718281828 para nove casas decimais. Pode parecer estranho usar como base o número e, e não um número simples, como 2 ou 10. A vantagem de usar e como base é que ele simplifica muitos dos cálculos e computações feitos na área de cálculo, como será visto nos próximos capítulos.

Se você observar a Figura 1.52a verá que as curvas das funções exponenciais $y = a^x$ tornam-se mais inclinadas conforme a base a aumenta. Essa idéia de inclinação é transmitida pelo coeficiente angular da reta que tangencia a curva em dado ponto. Retas tangentes a curvas em gráficos de funções serão definidas de modo preciso no próximo capítulo, mas intuitivamente podemos dizer que a reta que tangencia a curva em dado ponto é uma reta que apenas a toca nesse ponto, como uma reta tangente a um círculo. A Figura 1.53 mostra o coeficiente angular do gráfico de $y = a^x$ quando ele cruza o eixo y para diversos valores de a. Observe que o coeficiente angular é exatamente igual a 1 quando a é igual a e. O coeficiente angular é menor que 1 se $a < e$, e maior que 1 se $a > e$. Essa é a propriedade que torna o número e tão útil em cálculo: **o gráfico de $y = e^x$ tem coeficiente angular 1 quando cruza o eixo y.**

No Capítulo 3, usaremos essa propriedade do coeficiente angular para provar que e é o número para o qual tende a quantidade $(1 + 1/x)^x$ quando x aumenta indefinidamente. Esse resultado permite calcular o valor de e, pelo menos de maneira aproximada. O gráfico e a tabela da Figura 1.54 mostram o comportamento dessa expressão e como ela se aproxima cada vez mais da reta $y = e \approx 2{,}718281828$ à medida que x aumenta. (Essa idéia de limite será definida de modo preciso no próximo capítulo.) Uma definição rigorosa de e será dada no Capítulo 7, quando desenvolveremos as funções exponenciais e logarítmicas usando métodos de cálculo.

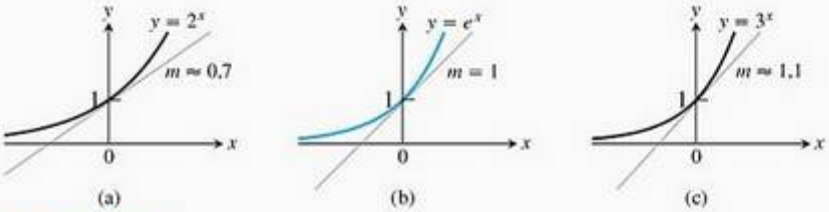


FIGURA 1.53 Entre as funções exponenciais, o gráfico de $y = e^x$ tem a seguinte propriedade: o coeficiente angular m da reta que tangencia a curva é exatamente 1 quando ela cruza o eixo y. O coeficiente angular é menor para uma base inferior a e, como 2^x, e maior para uma base maior que e, como 3^x.

x	$(1 + 1/x)^x$
1.000	2,7169
2.000	2,7176
3.000	2,7178
4.000	2,7179
5.000	2,7180
6.000	2,7181
7.000	2,7181

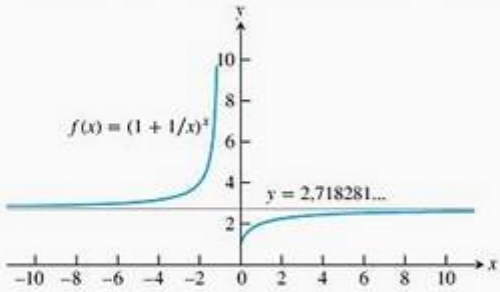


FIGURA 1.54 O gráfico e a tabela de valores para $f(x) = (1 + 1/x)^x$ sugerem que, à medida que x aumenta, $f(x)$ se aproxima cada vez mais de $e \approx 2{,}7182818...$

Crescimento e decaimento exponenciais

As funções exponenciais $y = e^{kx}$, onde k é uma constante diferente de zero, são freqüentemente usadas como modelos de crescimento ou decaimento exponencial. A função $y = y_0\, e^{kx}$ é um modelo para **crescimento exponencial** quando $k > 0$ e um modelo para **decaimento exponencial** quando $k < 0$. Um exemplo do crescimento exponencial são os juros **compostos continuamente**, que usam o modelo $y = P \cdot e^{rt}$, onde P é o investimento inicial, r é a taxa de juros em forma decimal e t é o tempo em anos. Um exemplo de decaimento exponencial é o modelo $y = A \cdot e^{-1{,}2 \cdot 10r^{-4}t}$, que representa como o elemento radioativo carbono 14 decai ao longo do tempo. Aqui, A é a quantidade inicial de carbono 14 e t é o tempo em anos. O carbono 14 é usado para estimar a idade de restos de organismos mortos, como conchas, sementes e artefatos de madeira. A Figura 1.55 mostra gráficos de crescimento e decaimento exponenciais.

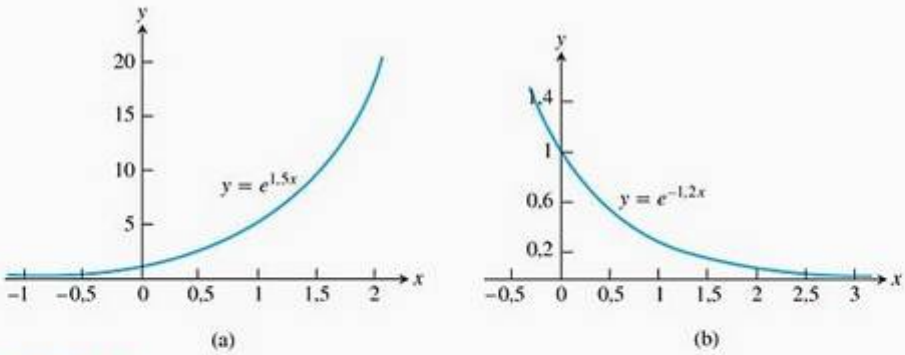


FIGURA 1.55 Gráficos de (a) crescimento exponencial, $k = 1{,}5 > 0$ e (b) decaimento exponencial, $k = -1{,}2 < 0$.

EXEMPLO 3 Revendo o rendimento da conta de poupança

As companhias de investimentos com freqüência usam o modelo de juros compostos continuamente para calcular o rendimento de um investimento. Use esse modelo para rastrear o rendimento de 100 dólares investidos em 2000 a uma taxa de juros anual de 5,5%, em composição contínua.

SOLUÇÃO Vamos considerar que $t = 0$ represente o ano 2000, $t = 1$ represente o ano 2001 e assim por diante. Então o modelo para crescimento exponencial em composição contínua é $y(t) = Pe^{rt}$, onde $P = 100$ (investimento inicial), $r = 0{,}055$ (taxa anual de juros expressa em decimais) e t é o tempo decorrido em anos. Para predizer o total na conta em 2004, por exemplo, fazemos $t = 4$ e calculamos

$$\begin{aligned} y(4) &= 100 \cdot e^{0{,}055(4)} \\ &= 100 \cdot e^{0{,}22} \\ &= 124{,}61 \end{aligned}$$

Arredondado para o centavo mais próximo

Comparando esse resultado com os 123,88 dólares obtidos com o cômputo anual de juros (Tabela 1.10), notamos que o investidor ganha mais quando os juros são computados com mais freqüência (nesse caso, *continuamente*). Na Tabela 1.10, comparamos os valores acumulados na conta de poupança de 2000 até 2004 com os juros computados anual (Tabela 1.9) e continuamente.

TABELA 1.10 Comparando os diferentes crescimentos na conta de poupança

Ano	Soma (dólares), computando anualmente	Soma (dólares), computando continuamente
2000	100,00	100,00
2001	105,50	105,65
2002	111,30	111,63
2003	117,42	117,94
2004	123,88	124,61

EXEMPLO 4 Decaimento radioativo

Experimentos laboratoriais indicam que alguns átomos emitem parte de sua massa na forma de radiação, com o restante do átomo formando outro novo elemento. Por exemplo, o carbono 14 radioativo decai para nitrogênio; o rádio acaba por decair para chumbo. Se y_0 é o número de núcleos radioativos presentes no instante zero, o número remanescente em qualquer tempo t posterior será

$$y = y_0 e^{-rt}, \quad r > 0$$

O número r é chamado **taxa de decaimento** da substância radioativa. Para o carbono 14, a taxa de decaimento determinada de modo experimental é de cerca de $r = 1{,}2 \times 10^{-4}$ quando t é medido em anos. Faça a previsão da porcentagem de carbono 14 presente depois de 866 anos.

SOLUÇÃO Se começarmos com determinada quantidade y_0 de núcleos de carbono 14, após 866 anos, teremos

$$\begin{aligned} y(866) &= y_0 e^{(-1{,}2\times 10^{-4})(866)} \\ &\approx (0{,}901) y_0 \end{aligned}$$

Isto é, após 866 anos, obteremos aproximadamente 90% da quantidade original de carbono 14, portanto cerca de 10% dos núcleos originais terão decaído. No Exemplo 8, da próxima seção, você verá como determinar o tempo necessário para que metade dos núcleos de uma amostra radioativa decaia.

Você deve estar se perguntando por que usamos a família de funções $y = e^{kx}$ para diferentes valores da constante k em vez de funções exponenciais gerais $y = a^x$. Na próxima seção, mostraremos que a função exponencial a^x é igual a e^{kx} para um valor apropriado de k. Então, a fórmula $y = e^{kx}$ cobre toda a gama de possibilidades e, como veremos, é mais fácil de usar.

Exercícios 1.5

Construindo gráficos para funções exponenciais

Nos exercícios 1–6, esboce as curvas dadas no sistema de coordenadas adequado, todas juntas, e identifique cada uma com sua respectiva equação.

1. $y = 2^x, y = 4^x, y = 3^{-x}, y = (1/5)^x$
2. $y = 3^x, y = 8^x, y = 2^{-x}, y = (1/4)^x$
3. $y = 2^{-t}$ e $y = -2^t$
4. $y = 3^{-t}$ e $y = -3^t$
5. $y = e^x$ e $y = 1/e^x$
6. $y = -e^x$ e $y = -e^{-x}$

Nos exercícios 7–10, esboce as curvas exponenciais transladadas.

7. $y = 2^x - 1$ e $y = 2^{-x} - 1$
8. $y = 3^x + 2$ e $y = 3^{-x} + 2$
9. $y = 1 - e^x$ e $y = 1 - e^{-x}$
10. $y = -1 - e^x$ e $y = -1 - e^{-x}$

Regras de exponenciação

Use as regras de exponenciação para simplificar as expressões dos exercícios 11–20.

11. $16^2 \cdot 16^{-1,75}$
12. $9^{1/3} \cdot 9^{1/6}$
13. $\dfrac{4^{4,2}}{4^{3,7}}$
14. $\dfrac{3^{5/3}}{3^{2/3}}$
15. $\left(25^{1/8}\right)^4$
16. $\left(13^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}/2}$
17. $2^{\sqrt{3}} \cdot 7^{\sqrt{3}}$
18. $\left(\sqrt{3}\right)^{1/2} \cdot \left(\sqrt{12}\right)^{1/2}$
19. $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)^4$
20. $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$

Domínios e imagens

Determine o domínio e a imagem de cada uma das funções apresentadas nos exercícios 21–24.

21. $f(x) = \dfrac{1}{2 + e^x}$
22. $g(t) = \cos(e^{-t})$
23. $g(t) = \sqrt{1 + 3^{-t}}$
24. $f(x) = \dfrac{3}{1 - e^{2x}}$

Resolvendo graficamente

T Nos exercícios 25–28, use gráficos para achar soluções aproximadas.

25. $2^x = 5$
26. $e^x = 4$
27. $3^x - 0,5 = 0$
28. $3 - 2^{-x} = 0$

Modelos exponenciais

T Nos exercícios 29–40, use um modelo exponencial e uma calculadora gráfica para estimar a resposta em cada problema.

29. **Crescimento populacional** A população de Knoxville é de 500.000 e cresce a uma taxa de 3,75% ao ano. Aproximadamente, quando a população atingirá 1 milhão de pessoas?

30. **Crescimento populacional** A população de Silver Run em 1890 era de 6.250 pessoas. Suponha que a população tenha crescido numa taxa de 2,75% ao ano.
    (a) Estime a população em 1915 e em 1940.
    (b) Aproximadamente, quando a população será de 50.000 pessoas?

31. **Decaimento radioativo** A meia-vida do fósforo 32 é de cerca de 14 dias. Inicialmente, há 6,6 gramas presentes.
    (a) Expresse a quantidade de fósforo 32 remanescente em função do tempo t.
    (b) Quando restará 1 grama?

32. Se John investe 2.300 dólares numa conta de poupança com taxa de juros anual de 6%, quanto tempo levará para que a poupança de John tenha um saldo de 4.150 dólares?

33. **Duplicando seu dinheiro** Determine quanto tempo é necessário para dobrar o valor de um investimento com uma taxa de juros de 6,25% composta anualmente.

34. **Duplicando seu dinheiro** Determine quanto tempo é necessário para dobrar o valor de um investimento com uma taxa de juros de 6,25% composta mensalmente.

35. **Duplicando seu dinheiro** Determine quanto tempo é necessário para dobrar o valor de um investimento com uma taxa de juros de 6,25% composta continuamente.

36. **Triplicando seu dinheiro** Determine quanto tempo é necessário para triplicar o valor de um investimento com uma taxa de juros de 5,75% composta anualmente.

37. **Triplicando seu dinheiro** Determine quanto tempo é necessário para triplicar o valor de um investimento com uma taxa de juros de 5,75% composta diariamente.

38. **Triplicando seu dinheiro** Determine quanto tempo é necessário para triplicar o valor de um investimento com uma taxa de juros de 5,75% composta continuamente.

39. **Cultura de bactérias** Suponha que uma colônia de bactérias comece com 1 bactéria e dobre seu número a cada meia hora. Quantas bactérias a colônia terá ao final de 24 horas?

40. **Erradicando uma doença** Suponha que em um ano o número de casos de uma doença seja reduzido em 20%. Se existem 10.000 casos hoje, quantos anos serão necessários:
    (a) para reduzir o número de casos para 1.000?
    (b) para eliminar a doença, isto é, para reduzir o número de casos a menos de 1?

Análises de regressão

Nos exercícios 41 e 42, usaremos uma calculadora gráfica com uma ferramenta de regressão exponencial.

41. A tabela a seguir fornece dados sobre a população do México.

Ano	População (milhões)
1950	25,8
1960	34,9
1970	48,2
1980	66,8
1990	81,1

Fonte: The Statesman's Yearbook, 129. ed. Londres: The Macmillan Press, Ltd., 1992.

(a) Suponha que $x = 0$ represente 1900, $x = 1$ represente 1901 e assim por diante. Encontre uma equação de regressão exponencial para os dados e faça a superposição de seu gráfico ao gráfico de dispersão dos dados.

(b) Use a equação de regressão exponencial para estimar a população do México em 1900. Quão próxima a população estimada está da população real (13.607.272 pessoas) em 1900?

(c) Use a equação de regressão exponencial para estimar a taxa de crescimento anual da população mexicana.

42. A tabela a seguir fornece dados sobre a população da África do Sul.

Ano	População (milhões)
1904	5,2
1911	6,0
1921	6,9
1936	9,6
1946	11,4
1951	12,7
1960	16,0
1970	18,3
1980	20,6

Fonte: The Statesman's Yearbook, 129. ed. Londres: The Macmillan Press, Ltd., 1992.

(a) Suponha que $x = 0$ represente 1900, $x = 1$ represente 1901 e assim por diante. Ache uma equação de regressão exponencial para os dados e sobreponha seu gráfico ao de dispersão dos dados.

(b) Use a equação de regressão exponencial para estimar a população da África do Sul em 1990.

(c) Use a equação de regressão exponencial para estimar a taxa de crescimento anual da população sul-africana.

1.6 Funções inversas e logaritmos

Uma função que desfaz, ou inverte, o efeito de uma função f é denominada *inversa* de f. Muitas das funções comuns — mas não todas — têm uma correspondente inversa. Nesta seção, apresentaremos a função logarítmica natural $y = \ln x$ como a inversa da função exponencial $y = e^x$ e também daremos exemplos de várias funções trigonométricas inversas.

Funções injetoras

Uma função é uma regra que associa cada valor de sua imagem a um único elemento de seu domínio. Algumas funções associam o mesmo valor de imagem a mais de um elemento no domínio. A função $f(x) = x^2$ associa o mesmo valor, 1, tanto a -1 quanto a $+1$; tanto o seno de $\pi/3$ quanto o seno de $2\pi/3$ valem $\sqrt{3}/2$. No caso de outras funções, entretanto, dado valor na imagem nunca é assumido mais de uma vez. Raízes quadradas e cúbicas de números diferentes são sempre diferentes, por exemplo. Uma função que possui valores diferentes para elementos diferentes de seu domínio é chamada injetora. Nessas funções, cada ponto da imagem assume dado valor apenas uma vez.

Definição **Função injetora**
Uma função $f(x)$ é **injetora** no domínio D se $f(x_1) \neq f(x_2)$ sempre que $x_1 \neq x_2$ em D.

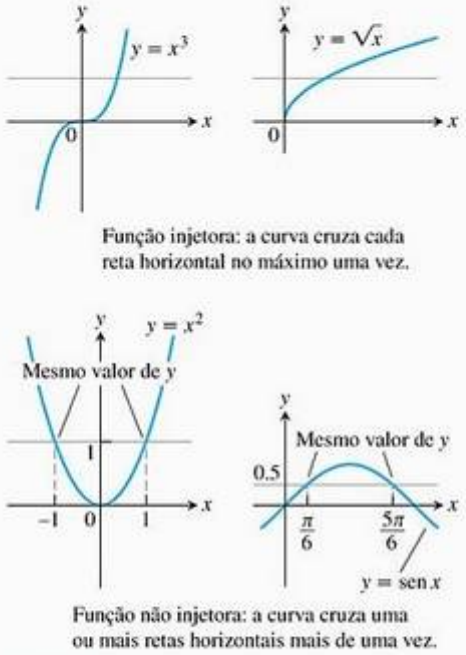


FIGURA 1.56 Usando o teste da reta horizontal, vemos que $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$ são injetoras nos domínios $(-\infty, \infty)$ e $[0, \infty)$, mas $y = x^2$ e $y = \text{sen } x$ não são injetoras nos domínios $(-\infty, \infty)$.

EXEMPLO 1 Domínios de funções injetoras

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ é função injetora em qualquer domínio de números não negativos porque $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$ sempre que $x_1 \neq x_2$.

(b) $g(x) = \text{sen } x$ *não é* função injetora no intervalo $[0, \pi]$ porque $\text{sen } (\pi/6) = \text{sen } (5\pi/6)$. Contudo, a função seno *é* injetora em $[0, \pi/2]$, pois nesse intervalo é estritamente crescente.

O gráfico de uma função injetora $y = f(x)$ só pode cruzar determinada reta horizontal no máximo uma vez. Se ela cruza a reta mais de uma vez, assume o mesmo valor de y mais de uma vez e, portanto, deixa de ser injetora (Figura 1.56).

Teste da reta horizontal para funções injetoras
Uma função $y = f(x)$ é injetora se e somente se sua curva intercepta cada reta horizontal no máximo uma vez.

Funções inversas

Como cada ponto da imagem de uma função injetora vem de apenas um ponto de seu domínio, seu efeito pode ser invertido, de modo que se mande de volta cada valor assumido ao ponto do qual ele veio.

Definição Função inversa
Suponha que f é uma função injetora num domínio D com imagem R. A **função inversa** f^{-1} é definida por

$$f^{-1}(a) = b \text{ se } f(b) = a$$

O domínio de f^{-1} é R e a imagem de f^{-1} é D.

Os domínios e imagens de f e f^{-1} são invertidos. O símbolo f^{-1} para a função inversa de f é f^{-1} e lê-se "função inversa de f". O símbolo "-1" em f^{-1} *não é* um expoente: $f^{-1}(x)$ não significa $1/f(x)$.

Se aplicamos f para enviar um ponto de domínio x para a imagem $f(x)$ e, em seguida, aplicamos f^{-1} a $f(x)$, voltamos a x, exatamente onde começamos. De modo similar, se pegamos algum número y na imagem de f, aplicamos f^{-1} a ele e, em seguida, aplicamos f ao valor resultante $f^{-1}(y)$, ficamos outra vez com o valor y do início. O efeito de compor uma função com a sua inversa é nulo.

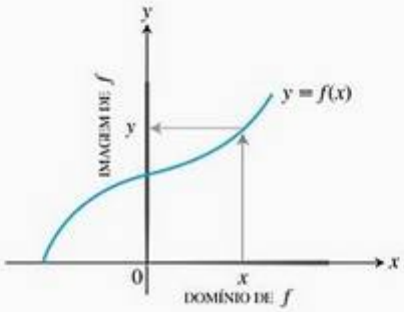
$(f^{-1} \circ f)(x) = x$, para qualquer x no domínio de f
$(f \circ f^{-1})(y) = y$, para qualquer y no domínio de f^{-1} (ou imagem de f)

Somente uma função injetora pode ter inversa. Isso porque, se $f(x_1) = y$ e $f(x_2) = y$ para dois pontos diferentes no domínio x_1 e x_2, então não há como atribuir um valor a $f^{-1}(y)$ que satisfaça tanto $f^{-1}(f(x_1)) = x_1$ quanto $f^{-1}(f(x_2)) = x_2$.

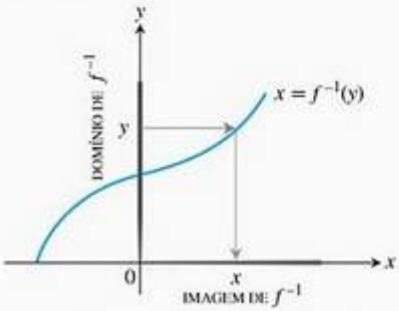
Uma função que é crescente em dado intervalo, satisfazendo $f(x_2) > f(x_1)$ quando $x_2 > x_1$, é injetora e tem uma inversa. Funções decrescentes também têm inversas. Funções que não são nem crescentes nem decrescentes podem ainda ser injetoras e ter uma inversa, como é o caso da função $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.

Determinando inversas

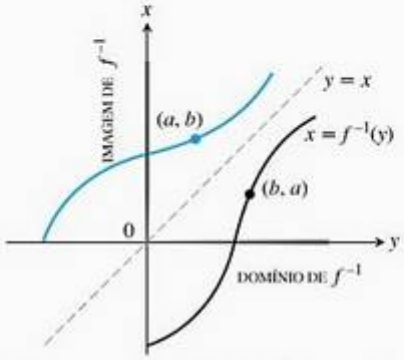
Os gráficos de uma função e sua inversa estão intimamente relacionados. Para ler o valor de uma função a partir de seu gráfico, começamos em um ponto x no eixo x, subimos verticalmente até a curva e, então, movemo-nos horizontalmente até o eixo y para ler o valor de y. Podemos ler a função inversa a partir do gráfico fazendo o caminho inverso. Comece em um ponto y no eixo y, mova-se horizontalmente até a curva e em seguida desça verticalmente até o eixo x e leia o valor de $x = f^{-1}(y)$ (Figura 1.57).



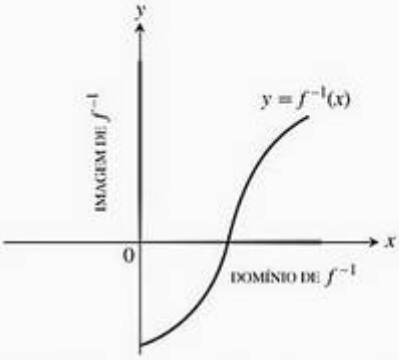
(a) Para determinar o valor de f em x, partimos de x, subimos pelo gráfico até encontrar a curva e então prosseguimos em direção ao eixo y.



(b) O gráfico de f já é o gráfico de f^{-1}. Para determinar o valor de x que fornece determinado y, partimos do eixo y, indo até a curva, e então descemos até o eixo x. O domínio de f^{-1} é a imagem de f. A imagem de f^{-1} é o domínio de f.



(c) Para traçar o gráfico de f^{-1} da maneira habitual, refletimos o conjunto em torno da reta $y = x$.



(d) Então, trocamos as legendas x e y. Agora, temos um gráfico "normal" de f^{-1} em função de x.

FIGURA 1.57 Determinando o gráfico de $y = f^{-1}(x)$ a partir do gráfico de $y = f(x)$.

Queremos construir o gráfico de f^{-1} de modo que os valores de seu domínio fiquem ao longo do eixo x, como geralmente se faz para funções, e não no eixo y. Para tanto, invertemos os eixos x e y "refletindo" a curva na reta $y = x$, a 45°. Depois dessa reflexão, temos um novo gráfico que representa f^{-1}. O valor de $f^{-1}(x)$ pode agora ser lido a partir do gráfico do modo usual, começando em um ponto x no eixo x, subindo verticalmente até a curva e depois indo horizontalmente até o eixo y para obter o valor de $f^{-1}(x)$. A Figura 1.57 indica a relação entre os gráficos de f e f^{-1}. Os gráficos são invertidos por reflexão em torno da reta $y = x$.

O processo de obter f^{-1} a partir de f pode ser resumido em dois passos:

1. Resolva a equação $y = f(x)$ para x. Isso resultará na fórmula $x = f^{-1}(y)$, onde x é expresso como uma função de y.

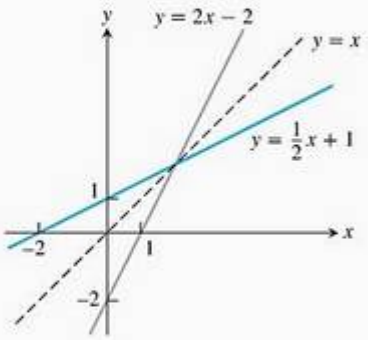


FIGURA 1.58 Traçando juntas $f(x) = (1/2)x + 1$ e $f^{-1}(x) = 2x - 2$, podemos observar a simetria das curvas em relação à reta $y = x$ (Exemplo 2).

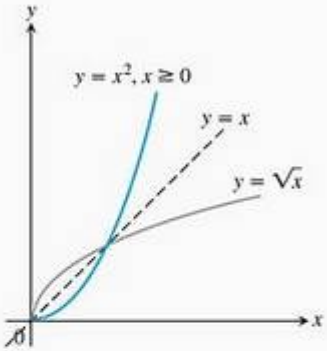


FIGURA 1.59 As funções $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$, $x \geq 0$ são a inversa uma da outra (Exemplo 3).

2. Intercambie x e y, obtendo a fórmula $y = f^{-1}(x)$, onde f^{-1} é expresso no formato convencional, com x como a variável independente e y como a dependente.

EXEMPLO 2 Determinando uma função inversa

Determine a inversa de $y = \frac{1}{2}x + 1$, expressando-a em função de x.

SOLUÇÃO

1. *Determine x em função de y:*

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$
$$2y = x + 2$$
$$x = 2y - 2$$

2. Intercambie x e y: $y = 2x - 2$.

A função inversa de $f(x) = (1/2)x + 1$ é a função $f^{-1}(x) = 2x - 2$. Para conferir, verificamos se ambas as compostas geram a função identidade:

$$f^{-1}(f(x)) = 2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

Veja a Figura 1.58.

EXEMPLO 3 Determinando uma função inversa

Determine a função inversa de $y = x^2$, $x \geq 0$, expressando-a em função de x.

SOLUÇÃO Primeiro definimos x em função de y:

$$y = x^2$$
$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x \qquad |x| = x, \text{ pois } x \geq 0$$

Em seguida, trocamos x por y e vice-versa, obtendo

$$y = \sqrt{x}$$

A função inversa de $y = x^2$, $x \geq 0$, é a função $y = \sqrt{x}$ (Figura 1.59).

Note que, diferentemente da função restrita $y = x^2$, $x \geq 0$, a função irrestrita $y = x^2$ não é injetora, portanto não possui função inversa.

Funções logarítmicas

Se a é um número qualquer positivo diferente de 1, a função exponencial $f(x) = a^x$ de base a é injetora e, portanto, possui uma função inversa. Essa função é denominada *função logarítmica de base a*.

Definição Função logarítmica de base a

A **função logarítmica de base** a, $y = \log_a x$, é a função inversa da função exponencial de base a $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

O domínio de $\log_a x$ é $(0, \infty)$, a imagem de a^x.

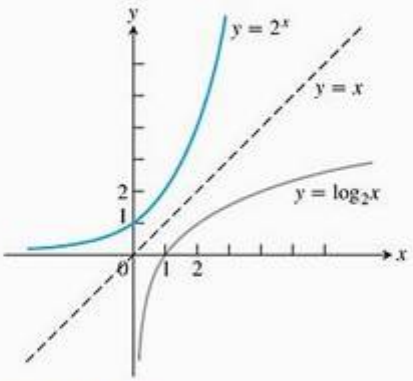


FIGURA 1.60 O gráfico de 2^x e sua função inversa, $\log_2 x$.

A imagem de $\log_a x$ é $(-\infty, \infty)$, o domínio de a^x.

A Figura 1.23 da Seção 1.2 mostra os gráficos de quatro funções logarítmicas com $a > 1$. A Figura 1.60 mostra o gráfico de $y = \log_2 x$. A curva de $y = a^x$, $a > 1$, sobe rapidamente para $x > 0$, logo, sua inversa, $y = \log_a x$, sobe vagarosamente para $x > 1$.

Como não temos uma técnica para expressar x em termos de y na equação $y = a^x$, não possuímos uma fórmula explícita para a função logarítmica em função de x. Contudo, o gráfico de $y = \log_a x$ pode ser obtido refletindo-se o gráfico de $y = a^x$ na reta $y = x$ (Figura 1.60).

Os logaritmos com base 2 são usados com freqüência na ciência da computação. Por sua vez, logaritmos com bases e e 10 possuem aplicações tão importantes que as calculadoras científicas têm teclas especiais para eles. Esses logaritmos também possuem notações e nomes característicos:

$$\log_e x \quad \text{é escrito como} \quad \ln x$$
$$\log_{10} x \quad \text{é escrito como} \quad \log x$$

A função $y = \ln x$ é denominada **função logaritmo natural**, e $y = \log x$ é normalmente denominada **função logaritmo comum**. Para o logaritmo natural:

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

Em particular, se estabelecermos $x = e$, obteremos

$$\ln e = 1$$

pois $e^1 = e$.

Companion Website

Biografia histórica*

John Napier (1550–1617)

Propriedades dos logaritmos

Os logaritmos foram inventados por John Napier e representam o mais importante avanço no cálculo aritmético antes da computação eletrônica moderna. O que os torna tão úteis é que suas propriedades nos permitem multiplicar números positivos somando seus logaritmos, dividir números positivos subtraindo seus logaritmos, e elevar um número a dada potência multiplicando seu logaritmo pelo expoente.

Resumimos essas propriedades numa série de regras que provaremos no Capítulo 4. Embora aqui estejamos aplicando a regra da potenciação a todas as potências reais r, o caso delicado em que r é um número irracional não poderá ser abordado com propriedade antes do Capítulo 7.

Propriedades algébricas dos logaritmos naturais

Para quaisquer números reais $b > 0$ e $x > 0$, o logaritmo natural satisfaz as seguintes regras:

1. *Regra do produto:* $\ln bx = \ln b + \ln x$
2. *Regra do quociente:* $\ln \dfrac{b}{x} = \ln b - \ln x$
3. *Regra da recíproca:* $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$ Regra 2 com $b = 1$
4. *Regra da potenciação:* $\ln x^r = r \ln x$

No Capítulo 7, provaremos que essas propriedades algébricas são válidas para funções logarítmicas com qualquer base a. Agora, mostraremos como essas regras se aplicam.

* Para saber mais sobre as figuras históricas e o desenvolvimento dos principais elementos e tópicos de cálculo, visite **www.aw.com/thomas_br.**

EXEMPLO 4 Interpretando as propriedades algébricas do logaritmo natural

(a) $\ln 6 = \ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3$ — Produto

(b) $\ln 4 - \ln 5 = \ln \frac{4}{5} = \ln 0{,}8$ — Quociente

(c) $\ln \frac{1}{8} = -\ln 8$ — Recíproca

$= -\ln 2^3 = -3 \ln 2$ — Potenciação

(d) $\ln 4 + \ln \operatorname{sen} x = \ln(4 \operatorname{sen} x)$ — Produto

(e) $\ln \frac{x+1}{2x-3} = \ln(x+1) - \ln(2x-3)$ — Quociente

Como as funções a^x e $\log_a x$ são inversas uma da outra, compô-las em qualquer ordem resulta na função identidade.

Propriedades das inversas para a^x e $\log_a x$

1. Base a: $a^{\log_a x} = x$, $\log_a a^x = x$, $a > 0, a \neq 1, x > 0$
2. Base e: $e^{\ln x} = x$, $\ln e^x = x$, $x > 0$

Substituindo x por a^x na equação $x = e^{\ln x}$, podemos reescrever a^x como potência de e:

$$a^x = e^{\ln(a^x)} \quad \text{Substituindo } x \text{ por } a^x \text{ em } x = e^{\ln x}$$
$$= e^{x \ln a} \quad \text{Regra da potenciação para logs.}$$
$$= e^{(\ln a)x} \quad \text{Expoente reformulado.}$$

Assim, a função exponencial a^x equivale a e^{kx} para $k = \ln a$.

Cada função exponencial é uma potência da função exponencial natural.

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Isto é, a^x é o mesmo que e^x elevado à potência $\ln a$: $a^x = e^{kx}$ para $k = \ln a$.

EXEMPLO 5 Escrevendo exponenciais como potências de e

$$2^x = e^{(\ln 2)x} = e^{x \ln 2}$$
$$5^{-3x} = e^{(\ln 5)(-3x)} = e^{-3x \ln 5}$$

EXEMPLO 6 Resolvendo equações com logaritmos

Determine x em:

$$3^{\log_3(7)} - 4^{\log_4(2)} = 5^{(\log_5 x - \log_5 x^2)}$$

SOLUÇÃO

$$3^{\log_3(7)} - 4^{\log_4(2)} = 5^{(\log_5 x - \log_5 x^2)} \quad \text{Regra do quociente.}$$
$$3^{\log_3(7)} - 4^{\log_4(2)} = 5^{\log_5(x/x^2)}$$
$$7 - 2 = \frac{x}{x^2} \quad \text{Propriedade das inversas.}$$
$$5 = \frac{1}{x} \quad \text{Cancelamento, } x \neq 0$$
$$\frac{1}{5} = x$$

Utilizando mais uma vez as propriedades de a^x e $\log_a x$ temos

$$\ln x = \ln(a^{\log_a x}) \qquad \text{Propriedade das inversas para } a^x \text{ e } \log_a x.$$

$$= (\log_a x)(\ln a) \qquad \text{Regra da potenciação para logaritmos, com } r = \log_a x.$$

Reescrevendo essa equação como $\log_a x = (\ln x)/(\ln a)$, temos que toda função logarítmica é um múltiplo constante de $\ln x$. Isso nos permite estender as propriedades algébricas de $\ln x$ para $\log_a x$. Por exemplo: $\log_a bx = \log_a b + \log_a x$.

Fórmula para mudança de base

Toda função logarítmica é um múltiplo constante do logaritmo natural.

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$$

Aplicações

Na Seção 1.5, observamos problemas de crescimento e decaimento exponenciais. Agora, vamos utilizar as propriedades dos logaritmos para responder a mais questões envolvidas nesses problemas.

EXEMPLO 7 Tempo necessário para rendimento da poupança

Sara investiu 1.000 dólares em uma aplicação que rende 5,25% de juros compostos anualmente. Quanto tempo será necessário para que seu saldo atinja 2.500 dólares?

SOLUÇÃO A quantidade de dinheiro na aplicação em dado tempo t, em anos, é $1.000(1{,}0525)^t$. Portanto, precisamos resolver a equação:

$$1.000(1{,}0525)^t = 2.500$$

Logo, temos

$$(1{,}0525)^t = 2{,}5 \qquad \text{Dividida por 1.000.}$$

$$\ln(1{,}0525)^t = \ln 2{,}5 \qquad \text{Aplique logaritmos aos dois lados.}$$

$$t \ln 1{,}0525 = \ln 2{,}5 \qquad \text{Regra da potenciação.}$$

$$t = \frac{\ln 2{,}5}{\ln 1{,}0525} \approx 17{,}9 \qquad \text{Valores obtidos com a calculadora.}$$

Sara terá 2.500 dólares em sua aplicação em 18 anos, quando os juros daquele ano forem pagos.

EXEMPLO 8 Meia-vida do polônio 210

A **meia-vida** de um elemento radioativo é o tempo necessário para que metade dos núcleos radioativos presentes na amostra sofram decaimento. É muito interessante que a meia-vida seja uma constante que não dependa do número de núcleos radioativos inicialmente presentes na amostra, mas sim do elemento radioativo em si.

Para entendermos o porquê disso, consideremos y_0 como o número de núcleos radioativos inicialmente presentes na amostra. O número y em um tempo t posterior será $y = y_0 e^{-kt}$. Buscamos o valor de t para o qual o número de núcleos radioativos presentes seja a metade do número inicial.

$$y_0 e^{-kt} = \frac{1}{2} y_0$$

$$e^{-kt} = \frac{1}{2}$$

$$-kt = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \quad \text{Regra dos recíprocos para logaritmos.}$$

$$t = \frac{\ln 2}{k} \tag{1}$$

Esse valor de t é a meia-vida do elemento. Ele depende apenas do valor de k; o número y_0 não é levado em conta nos cálculos.

A vida eficaz do polônio 210 radioativo é tão curta que sua meia-vida é medida em dias, e não em anos. O número de átomos radioativos remanescentes após t dias em uma amostra com y_0 átomos radioativos iniciais é

$$y = y_0 e^{-5 \times 10^{-3} t}$$

A meia-vida do elemento é:

$$\text{Meia-vida} = \frac{\ln 2}{k} \quad \text{Equação (1).}$$

$$= \frac{\ln 2}{5 \times 10^{-3}} \quad \text{O valor de } k \text{ obtido pela equação do decaimento do polônio.}$$

$$\approx 139 \text{ dias}$$

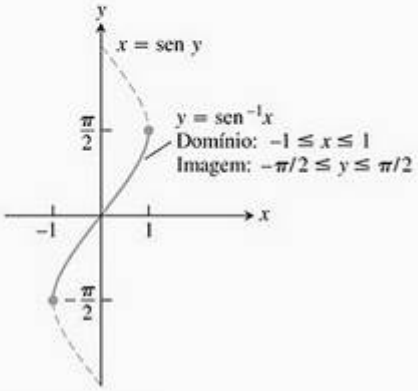
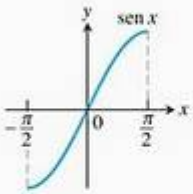
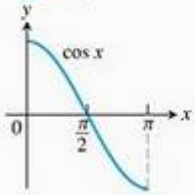


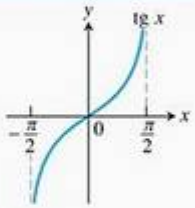
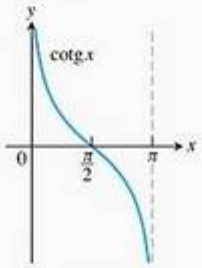
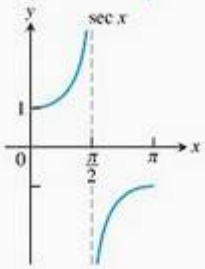
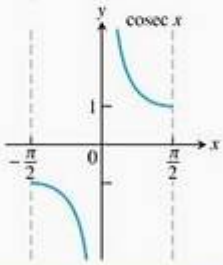
FIGURA 1.61 O gráfico de $y = \text{sen}^{-1} x$.

Funções trigonométricas inversas

As seis funções trigonométricas de um ângulo genérico x são abordadas no Apêndice B.3. Essas funções não são injetoras (seus valores se repetem periodicamente). No entanto, podemos restringir os domínios dessas funções a intervalos nos quais elas são injetoras. A função seno é crescente de -1 em $x = -\pi/2$ até $+1$ em $x = \pi/2$. Restringindo seu domínio ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, nós a tornamos injetora, então ela passa a ter uma função inversa $\text{sen}^{-1} x$ (Figura 1.61). Restrições de domínio semelhantes podem ser aplicadas a todas as seis funções trigonométricas.

Restrições de domínio que tornam as funções trigonométricas injetoras

Função	Domínio	Imagem	
sen x	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[-1, 1]$	
cos x	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	

Função	Domínio	Imagem	
tg x	$(-\pi/2, \pi/2)$	$(-\infty, \infty)$	
cotg x	$(0, \pi)$	$(-\infty, \infty)$	
sec x	$[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	
cosec x	$[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	

Como agora são injetoras, essas funções restringidas possuem inversas cuja notação é:

$$y = \text{sen}^{-1}\, x \quad \text{ou} \quad y = \text{arc sen}\, x$$
$$y = \cos^{-1} x \quad \text{ou} \quad y = \text{arc cos}\, x$$
$$y = \text{tg}^{-1}\, x \quad \text{ou} \quad y = \text{arc tg}\, x$$
$$y = \text{cotg}^{-1}\, x \quad \text{ou} \quad y = \text{arc cotg}\, x$$
$$y = \sec^{-1} x \quad \text{ou} \quad y = \text{arc sec}\, x$$
$$y = \text{cosec}^{-1}\, x \quad \text{ou} \quad y = \text{arc cosec}\, x$$

Lemos essas equações como "y é igual ao arco seno de x" ou "y é igual a arc sen x", e assim por diante.

ATENÇÃO O -1 nas expressões de função inversa significa "inversa", e *não* recíproca. Por exemplo, a função *recíproca* de sen x é $(\text{sen}\, x)^{-1} = 1/\text{sen}\, x = \text{cosec}\, x$.

Estudaremos as funções trigonométricas básicas na Seção 3.8, mas aqui, a título de ilustração, veremos as funções arco seno e arco cosseno.

As funções arco seno e arco cosseno

A função arco seno de x é o ângulo no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cujo seno é x. Já a função arco cosseno é um ângulo no intervalo $[0, \pi]$ cujo cosseno

Definição Funções arco seno e arco cosseno

$y = \text{sen}^{-1} x$ é o número no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ para o qual $\text{sen}\, y = x$.
$y = \cos^{-1} x$ é o número no intervalo $[0, \pi]$ para o qual $\cos y = x$.

O gráfico de $y = \text{sen}^{-1} x$ (Figura 1.62) é simétrico em torno da origem (estende-se ao longo da curva de $x = \text{sen}\, y$). Portanto, o arco seno é uma função ímpar.

$$\text{sen}^{-1}(-x) = -\text{sen}^{-1} x \tag{2}$$

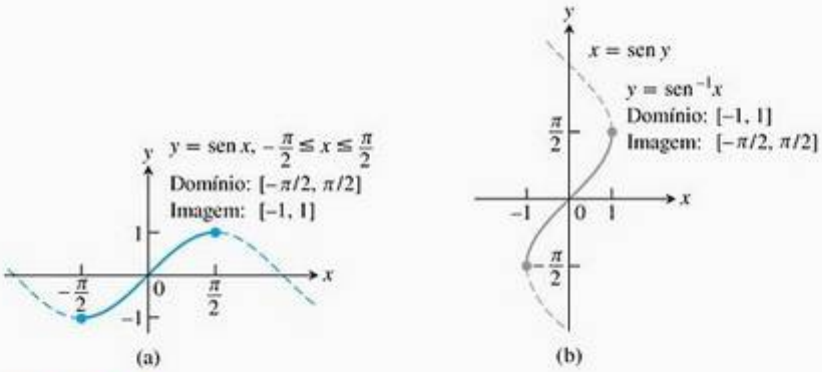


FIGURA 1.62 Os gráficos de (a) $y = \text{sen}\, x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, e (b) sua inversa, $y = \text{sen}^{-1} x$. O gráfico de $\text{sen}^{-1} x$, obtido pela reflexão em torno da reta $y = x$, é uma parte da curva $x = \text{sen}\, y$.

O gráfico de $y = \cos^{-1} x$ (Figura 1.63) não possui essa simetria.

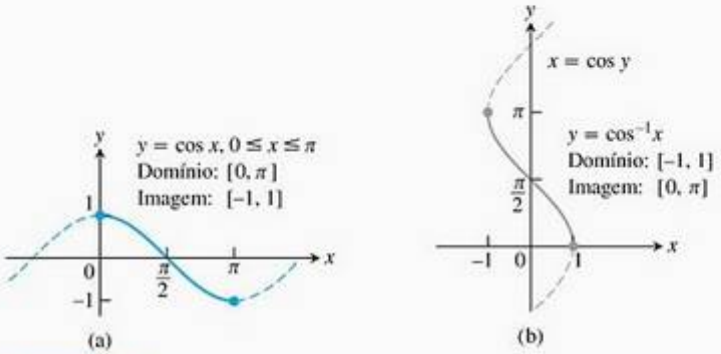


FIGURA 1.63 O gráfico de (a) $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$, e (b) sua função inversa, $y = \cos^{-1} x$. O gráfico de $\cos^{-1} x$, obtido por reflexão em torno da reta $y = x$, é uma parte da curva $x = \cos y$.

EXEMPLO 9 Avaliando $\text{sen}^{-1} x$ e $\cos^{-1} x$

Avalie (a) $\text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

SOLUÇÃO

(a) Vemos que

$$\text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

pois $\text{sen}\,(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, e $\pi/3$ pertence à imagem $[-\pi/2, \pi/2]$ da função arco seno. Veja a Figura 1.64a.

(b) Temos

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

pois $\cos(2\pi/3) = -1/2$, e $2\pi/3$ pertence à imagem $[0, \pi]$ da função arco cosseno. Veja a Figura 1.64b.

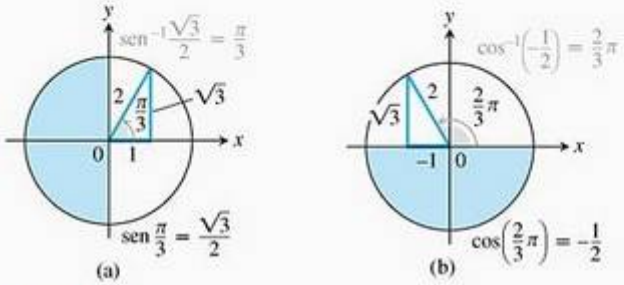


FIGURA 1.64 Valores das funções arco seno e arco cosseno (Exemplo 9).

Usando esse mesmo procedimento ilustrado no Exemplo 9, podemos criar a seguinte tabela de valores comuns para as funções arco seno e arco cosseno.

x	$\text{sen}^{-1}x$	$\cos^{-1}x$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$	$\pi/6$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/6$	$\pi/3$
$-1/2$	$-\pi/6$	$2\pi/3$
$-\sqrt{2}/2$	$-\pi/4$	$3\pi/4$
$-\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$	$5\pi/6$

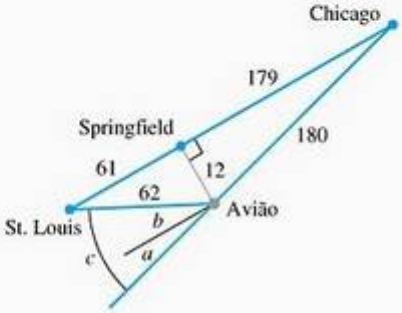


FIGURA 1.65 Diagrama para correção do desvio (Exemplo 10), com as distâncias arredondadas (esquema fora de escala).

EXEMPLO 10 Correção do desvio

Durante uma viagem aérea entre Chicago e St. Louis, o engenheiro de vôo detectou que o avião havia se desviado cerca de 12 milhas de seu curso, conforme indicado na Figura 1.65. Determine o ângulo a para um curso paralelo ao original curso correto o ângulo b e o ângulo de correção $c = a + b$.

SOLUÇÃO

$$a = \text{sen}^{-1}\frac{12}{180} \approx 0{,}067 \text{ rad} \approx 3{,}8°$$

$$b = \text{sen}^{-1}\frac{12}{62} \approx 0{,}195 \text{ rad} \approx 11{,}2°$$

$$c = a + b \approx 15°$$

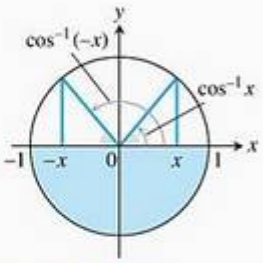


FIGURA 1.66 $\cos^{-1} x$ e $\cos^{-1}(-x)$ são ângulos suplementares (portanto, sua soma é π).

Identidades envolvendo arco seno e arco cosseno

Como podemos ver na Figura 1.66, o arco cosseno de x satisfaz a identidade

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi \tag{3}$$

ou

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x \tag{4}$$

E, no triângulo da Figura 1.67 podemos ver que, para $x > 0$,

$$\text{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2 \tag{5}$$

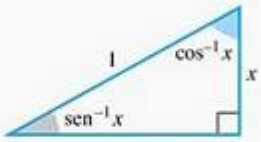


FIGURA 1.67 $\text{sen}^{-1}\, x$ e $\cos^{-1} x$ são ângulos suplementares (portanto, sua soma é $\pi/2$).

A Equação (5) também é verdadeira para os outros valores de x em $[-1, 1]$, mas não podemos concluir isso a partir do triângulo da Figura 1.67. Tal conclusão é, no entanto, uma conseqüência das equações (2) e (4) (Exercício 78).

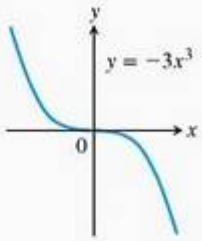
As funções arco tangente, arco cotangente, arco secante e arco cossecante serão definidas na Seção 3.8, onde apresentaremos propriedades adicionais das funções trigonométricas inversas na área de cálculo.

Exercícios 1.6

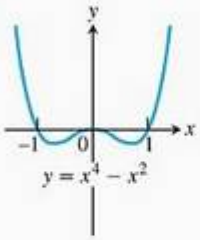
Identificando funções injetoras graficamente

Das funções traçadas nos exercícios 1–6, quais são injetoras e quais não são?

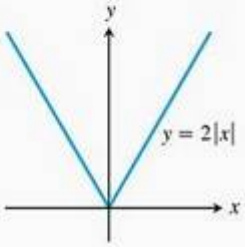
1.



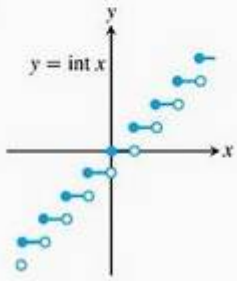
2.



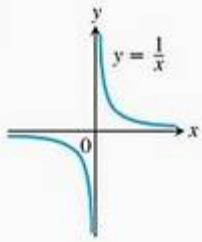
3.



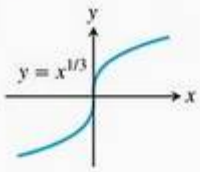
4.



5.



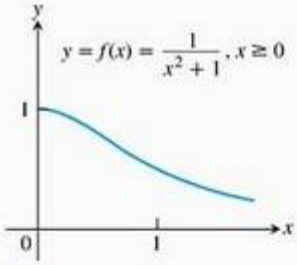
6.



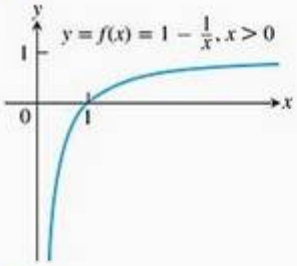
Construindo gráficos de funções inversas

Cada um dos exercícios 7–10 apresenta o gráfico de uma função $y = f(x)$. Copie o gráfico e sobreponha-o à reta $y = x$. Depois, usando a simetria em relação à reta $y = x$, acrescente o gráfico de f^{-1} ao seu esquema (não é necessário determinar a equação de f^{-1}). Identifique o domínio e a imagem de f^{-1}.

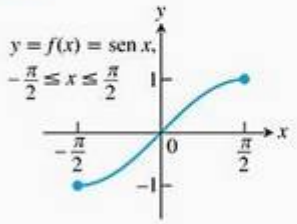
7.



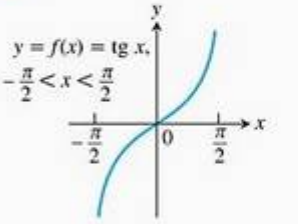
8.



9.



10.



11.(a) Faça o gráfico da função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$. Qual simetria o gráfico apresenta?

(b) Mostre que a função f é a própria inversa. (Lembre-se de que $\sqrt{x^2} = x$ se $x \geq 0$.)

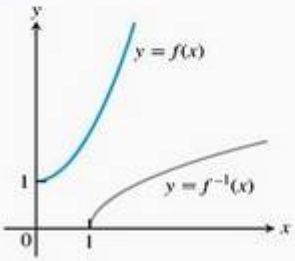
12.(a) Faça o gráfico da função $f(x) = 1/x$. Qual simetria o gráfico apresenta?

(b) Mostre que a função f é a própria inversa.

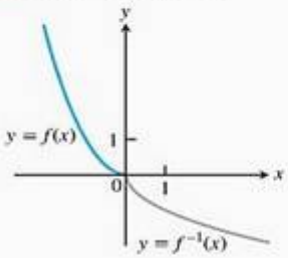
Fórmulas para funções inversas

Cada um dos exercícios 13–18 apresenta a fórmula de uma função $y = f(x)$, além dos gráficos de f e f^{-1}. Determine a fórmula de f^{-1} para cada caso.

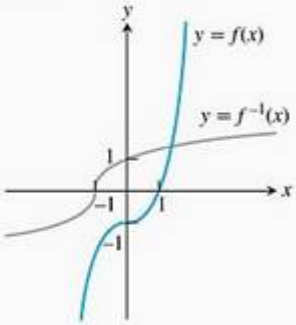
13. $f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$



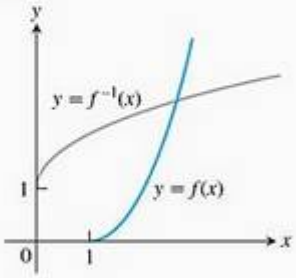
14. $f(x) = x^2, \quad x \leq 0$



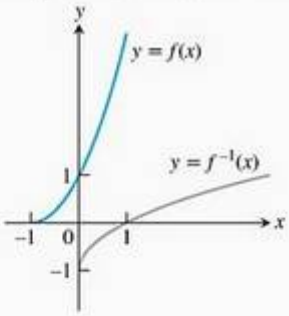
15. $f(x) = x^3 - 1$



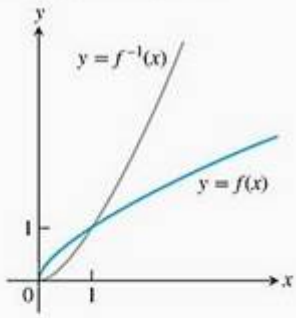
16. $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad x \geq 1$



17. $f(x) = (x + 1)^2, \quad x \geq -1$



18. $f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$



Cada um dos exercícios 19–24 fornece uma fórmula para uma função $y = f(x)$. Em cada caso, determine $f^{-1}(x)$ e identifique o domínio e a imagem de f^{-1}. A título de verificação, mostre que $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.

19. $f(x) = x^5$ **20.** $f(x) = x^4, \quad x \geq 0$

21. $f(x) = x^3 + 1$ **22.** $f(x) = (1/2)x - 7/2$

23. $f(x) = 1/x^2, \quad x > 0$ **24.** $f(x) = 1/x^3, \quad x \neq 0$

Usando as propriedades dos logaritmos

25. Expresse os seguintes logaritmos em termos de ln 2 e ln 3.

(a) $\ln 0{,}75$ **(b)** $\ln (4/9)$ **(c)** $\ln (1/2)$
(d) $\ln \sqrt[3]{9}$ **(e)** $\ln 3\sqrt{2}$ **(f)** $\ln \sqrt{13{,}5}$

26. Expresse os seguintes logaritmos em termos de ln 5 e ln 7.

(a) $\ln (1/125)$ **(b)** $\ln 9{,}8$ **(c)** $\ln 7\sqrt{7}$
(d) $\ln 1.225$ **(e)** $\ln 0{,}056$
(f) $(\ln 35 + \ln (1/7))/(\ln 25)$

Use as propriedades dos logaritmos para simplificar as expressões dos exercícios 27 e 28.

27. **(a)** $\ln \operatorname{sen} \theta - \ln \left(\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{5}\right)$ **(b)** $\ln (3x^2 - 9x) + \ln \left(\dfrac{1}{3x}\right)$
(c) $\dfrac{1}{2} \ln (4t^4) - \ln 2$

28. **(a)** $\ln \sec \theta + \ln \cos \theta$ **(b)** $\ln (8x + 4) - 2 \ln 2$
(c) $3 \ln \sqrt[3]{t^2 - 1} - \ln (t + 1)$

Cálculos algébricos com a função exponencial e o logaritmo

Determine expressões mais simples para as quantidades dos exercícios 29–32.

29. **(a)** $e^{\ln 7{,}2}$ **(b)** $e^{-\ln x^2}$ **(c)** $e^{\ln x - \ln y}$
30. **(a)** $e^{\ln (x^2 + y^2)}$ **(b)** $e^{-\ln 0{,}3}$ **(c)** $e^{\ln \pi x - \ln 2}$
31. **(a)** $2 \ln \sqrt{e}$ **(b)** $\ln (\ln e^e)$ **(c)** $\ln (e^{-x^2 - y^2})$
32. **(a)** $\ln (e^{\sec \theta})$ **(b)** $\ln (e^{(e^t)})$ **(c)** $\ln (e^{2 \ln x})$

Resolvendo equações com termos logarítmicos ou exponenciais

Nos exercícios 33–38, determine y em termos de t ou x, conforme o caso.

33. $\ln y = 2t + 4$ **34.** $\ln y = -t + 5$
35. $\ln (y - 40) = 5t$ **36.** $\ln (1 - 2y) = t$
37. $\ln (y - 1) - \ln 2 = x + \ln x$
38. $\ln (y^2 - 1) - \ln (y + 1) = \ln (\operatorname{sen} x)$

Nos exercícos 39 e 40, determine k.

39. **(a)** $e^{2k} = 4$ **(b)** $100e^{10k} = 200$ **(c)** $e^{k/1.000} = a$
40. **(a)** $e^{5k} = \dfrac{1}{4}$ **(b)** $80e^k = 1$ **(c)** $e^{(\ln 0{,}8)k} = 0{,}8$

Nos exercícios 41–44, determine t.

41. **(a)** $e^{-0{,}3t} = 27$ **(b)** $e^{kt} = \dfrac{1}{2}$ **(c)** $e^{(\ln 0{,}2)t} = 0{,}4$
42. **(a)** $e^{-0{,}01t} = 1.000$ **(b)** $e^{kt} = \dfrac{1}{10}$ **(c)** $e^{(\ln 2)t} = \dfrac{1}{2}$
43. $e^{\sqrt{t}} = x^2$ **44.** $e^{(x^2)} e^{(2x+1)} = e^t$

Cálculos algébricos com a^x e $\log_a x$

Simplifique as expressões dos exercícios 45–48.

45. **(a)** $5^{\log_5 7}$ **(b)** $8^{\log_8 \sqrt{2}}$ **(c)** $1{,}3^{\log_{1,3} 75}$
(d) $\log_4 16$ **(e)** $\log_3 \sqrt{3}$ **(f)** $\log_4 \left(\dfrac{1}{4}\right)$
46. **(a)** $2^{\log_2 3}$ **(b)** $10^{\log_{10} (1/2)}$ **(c)** $\pi^{\log_\pi 7}$
(d) $\log_{11} 121$ **(e)** $\log_{121} 11$ **(f)** $\log_3 \left(\dfrac{1}{9}\right)$
47. **(a)** $2^{\log_4 x}$ **(b)** $9^{\log_3 x}$ **(c)** $\log_2 (e^{(\ln 2)(\operatorname{sen} x)})$
48. **(a)** $25^{\log_5 (3x^2)}$ **(b)** $\log_e (e^x)$ **(c)** $\log_4 (2^{e^x \operatorname{sen} x})$

Expresse as divisões dos exercícios 49 e 50 como divisões de logaritmos naturais e simplifique.

49. (a) $\dfrac{\log_2 x}{\log_3 x}$ (b) $\dfrac{\log_2 x}{\log_8 x}$ (c) $\dfrac{\log_x a}{\log_{x^2} a}$

50. (a) $\dfrac{\log_9 x}{\log_3 x}$ (b) $\dfrac{\log_{\sqrt{10}} x}{\log_{\sqrt{2}} x}$ (c) $\dfrac{\log_a b}{\log_b a}$

Determine x nas equações dos exercícios 51–54.

51. $3^{\log_3(7)} + 2^{\log_2(5)} = 5^{\log_5(x)}$

52. $8^{\log_8(3)} - e^{\ln 5} = x^2 - 7^{\log_7(3x)}$

53. $3^{\log_3(x^2)} = 5e^{\ln x} - 3 \cdot 10^{\log_{10}(2)}$

54. $\ln e + 4^{-2\log_4(x)} = \dfrac{1}{x}\log_{10}(100)$

Cálculos com outras bases

55. A maioria das calculadoras científicas possui teclas para T $\log_{10} x$ e $\ln x$. Para encontrar logaritmos com outras bases, usamos

$$\log_a x = (\ln x)/(\ln a)$$

Encontre os seguintes logaritmos com cinco casas decimais.

(a) $\log_3 8$ (b) $\log_7 0{,}5$

(c) $\log_{20} 17$ (d) $\log_{0,5} 7$

(e) $\ln x$, dado que $\log_{10} x = 2{,}3$

(f) $\ln x$, dado que $\log_2 x = 1{,}4$

(g) $\ln x$, dado que $\log_2 x = -1{,}5$

(h) $\ln x$, dado que $\log_{10} x = -0{,}7$

56. Fatores de conversão

(a) Mostre que a equação para converter logaritmos de base 10 em logaritmos de base 2 é

$$\log_2 x = \frac{\ln 10}{\ln 2}\log_{10} x$$

(b) Mostre que a equação para converter logaritmos de base a em logaritmos de base b é

$$\log_b x = \frac{\ln a}{\ln b}\log_a x$$

57. A relação inversa entre e^x e $\ln x$ Descubra como sua T calculadora se sai ao avaliar as combinações

$$e^{\ln x} \text{ e } \ln(e^x)$$

58. Uma representação decimal de e Resolva a equação T $\ln x = 1$ e determine e para o máximo de casas decimais que sua calculadora permitir.

Valores comuns das funções trigonométricas inversas

Nos exercícios 59–62, determine o valor exato de cada expressão.

59. (a) $\text{sen}^{-1}\left(\dfrac{-1}{2}\right)$ (b) $\text{sen}^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (c) $\text{sen}^{-1}\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

60. (a) $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ (c) $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

61. (a) arc cos (-1) (b) arc cos (0)

62. (a) arc sen (-1) (b) arc sen $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Teoria e aplicações

63. Se $f(x)$ é injetora, podemos dizer algo a respeito de $g(x) = -f(x)$? Também é injetora? Justifique sua resposta.

64. Se $f(x)$ é injetora e nunca é igual a zero, podemos dizer algo a respeito de $h(x) = 1/f(x)$? Também é injetora? Justifique sua resposta.

65. Suponha que a imagem de g fique no domínio de f, de maneira que a função composta $f \circ g$ seja definida. Se f e g são injetoras, podemos dizer algo a respeito de $f \circ g$? Justifique sua resposta.

66. Se uma função composta $f \circ g$ é injetora, g é obrigatoriamente injetora também? Justifique sua resposta.

67. Encontre uma fórmula para f^{-1} e verifique que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

(a) $f(x) = \dfrac{100}{1 + 2^{-x}}$ (b) $f(x) = \dfrac{50}{1 + 1{,}1^{-x}}$

68. Funções inversas

Seja $y = f(x) = mx + b, \quad m \neq 0$

(a) Apresente uma prova convincente de que f é uma função injetora.

(b) Determine uma fórmula da função inversa de f. Como as inclinações de f e f^{-1} estão relacionadas?

(c) Se o gráfico de duas funções são retas paralelas com inclinação diferente de zero, o que você pode dizer sobre o gráfico das inversas dessas funções?

(d) Se os gráficos de duas funções são retas perpendiculares, com inclinação diferente de zero, o que você pode dizer sobre o gráfico das inversas dessas funções?

69. Decaimento radioativo A meia-vida de certa substância radioativa é 12 horas. Inicialmente, há 8 gramas da substância radioativa.

(a) Expresse a quantidade remanescente da substância em função do tempo t.

(b) Em quanto tempo restará apenas 1 grama de material contendo o elemento radioativo?

70. **Duplicando seu dinheiro** Determine quanto tempo é necessário para que um investimento de 500 dólares dobre de valor em uma aplicação que rende 4,75% de juros compostos ao ano.

71. **Crescimento populacional** A população de Glenbrook é de 375.000 habitantes e está crescendo a uma taxa anual de 2,25%. Quando essa população atingirá 1 milhão de habitantes?

72. **Radônio 222** A equação para o decaimento do gás radônio 222 é $y = y_0e^{-0,18t}$, sendo t expresso em dias. Quanto tempo será necessário para que o radônio presente em uma amostra de ar (em recipiente hermético) decaia 90% de sua quantidade inicial?

73. A equação $x^2 = 2^x$ apresenta três soluções: $x = 2$, $x = 4$ e T outra. Determine a terceira solução graficamente do modo mais preciso possível.

74. Poderia $x^{\ln 2}$ ser igual a $2^{\ln x}$ para $x > 0$? Trace as duas fun- T ções e descreva o que você observou.

75. Comece com o gráfico de $y = \ln x$. Encontre uma equação para o gráfico que resulte de

(a) uma translação de 3 unidades para baixo.

(b) uma translação de 1 unidade para a direita.

(c) uma translação de 1 unidade para a esquerda e 3 para cima.

(d) uma translação de 4 unidades para baixo e 2 para a direita.

(e) uma reflexão em torno do eixo y.

(f) uma reflexão em torno da reta $y = x$.

76. Comece com o gráfico de $y = \ln x$. Encontre uma equação para o gráfico que resulte de

(a) um alongamento vertical por um fator de 2.

(b) um alongamento horizontal por um fator de 3.

(c) uma compressão vertical por um fator de 4.

(d) uma compressão horizontal por um fator de 2.

77. Prove que $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

78. **A identidade $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$** A Figura 1.67 estabelece a identidade para $0 < x < 1$. Para estabelecê-la para o resto de $[-1, 1]$, verifique por cálculo direto que ela é verdadeira para $x = 1$, 0 e -1. Depois, para valores de x em $(-1, 0)$, faça $x = -a$, $a > 0$, e aplique as equações (2) e (4) à soma $\operatorname{sen}^{-1}(-a) + \cos^{-1}(-a)$.

Questões de revisão

1. O que é uma função? O que é o domínio de uma função? E a imagem? O que é o diagrama de setas de uma função? Dê exemplos.

2. O que é o gráfico de uma função de valores reais ou de uma variável real? O que é o teste da reta vertical?

3. O que é uma função definida em partes? Dê exemplos.

4. Quais são os tipos de função mais comumente encontrados em cálculo? Dê um exemplo de cada tipo.

5. Em termos gráficos, o que significa o conceito de função crescente? E de função decrescente? Dê um exemplo de cada.

6. O que é uma função par? E uma função ímpar? Que propriedades de simetria os gráficos dessas funções apresentam? Que vantagem podemos tirar disso? Dê um exemplo de uma função que não é par nem ímpar.

7. O que significa dizer que y é proporcional a x? E a $x^{3/2}$? Qual é a interpretação geométrica da proporcionalidade? Como essa interpretação pode ser usada para testar uma proporcionalidade proposta?

8. Se f e g são funções de valores reais, como os domínios de $f + g$, $f - g$, fg e f/g se relacionam aos domínios de f e g? Dê exemplos.

9. Quando é possível compor uma função com outra? Dê exemplos de compostas e seus valores em vários pontos. A ordem pela qual as funções são compostas é importante?

10. Como você modifica a equação $y = f(x)$ para deslocar seu gráfico para cima ou para baixo por um fator $k > 0$? E para a esquerda ou para a direita? Dê exemplos.

11. Como você modifica a equação $y = f(x)$ para comprimir ou alongar seu gráfico por um fator $c > 1$? E para refletir o gráfico em torno de um dos eixos de coordenadas? Dê exemplos.

12. Qual é a equação-padrão da elipse com centro (h, k)? O que é eixo principal? E eixo secundário? Dê exemplos.

13. Enumere três problemas que podem surgir quando usamos uma calculadora ou um computador com software gráfico para traçar o gráfico de uma função. Dê exemplos.

14. O que é uma função exponencial? Dê exemplos. A que leis de expoentes ela obedece? Em que difere de uma função de potência simples como $f(x) = x^n$? Que tipo de fenômenos do mundo real é descrito por funções exponenciais?

15. O que é o número e e como é definido? Quais são o domínio e a imagem de $f(x) = e^x$? Qual é a aparência de seu gráfico?

Como os valores de e^x se relacionam com x^2, x^3 e assim por diante?

16. Que funções apresentam inversas? Como você sabe se duas funções f e g são inversas uma da outra? Dê exemplos de funções que são e que não são inversas uma da outra.

17. Como estão relacionados os domínios, as imagens e os gráficos de funções e suas inversas? Dê um exemplo.

18. Que procedimento você pode eventualmente usar para expressar a inversa de uma função de x em termos de x?

19. O que é uma função logarítmica? Quais propriedades ela satisfaz? O que é uma função logarítmica natural? Quais são o domínio e a imagem de $y = \ln x$? Qual é a aparência de seu gráfico?

20. Como o gráfico de $\log_a x$ está relacionado com o de $\ln x$? O que há de verdade na afirmação de que realmente só há uma função exponencial e uma função logarítmica?

21. Como são definidas as funções trigonométricas inversas? Como você pode eventualmente usar triângulos retângulos para achar valores dessas funções? Dê exemplos.

Exercícios práticos

Funções e gráficos

1. Expresse a área e o perímetro de um círculo em função do seu raio. Depois expresse a área em função do perímetro.

2. Expresse o raio de uma esfera em função da área da superfície da esfera. Depois expresse a área da superfície em função do volume.

3. Um ponto P no primeiro quadrante situa-se na parábola $y = x^2$. Expresse as coordenadas de P em função do ângulo de inclinação da reta que passa por P e pela origem.

4. Um balão de ar quente subindo de um campo horizontal é acompanhado por um telêmetro situado a 500 pés do ponto de decolagem. Expresse a altura do balão em função do ângulo formado entre o solo e o segmento de reta que vai do telêmetro ao balão.

Nos exercícios 5–8, determine se o gráfico da função é simétrico em relação ao eixo y, à origem, ou nem uma coisa nem outra.

5. $y = x^{1/5}$
6. $y = x^{2/5}$
7. $y = x^2 - 2x - 1$
8. $y = e^{-x^2}$

Nos exercícios 9–16, determine se a função é par, ímpar ou nem uma coisa nem outra.

9. $y = x^2 + 1$
10. $y = x^5 - x^3 - x$
11. $y = 1 - \cos x$
12. $y = \sec x \operatorname{tg} x$
13. $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^3 - 2x}$
14. $y = 1 - \operatorname{sen} x$
15. $y = x + \cos x$
16. $y = \sqrt{x^4 - 1}$

Nos exercícios 17–26, determine (a) o domínio e (b) a imagem.

17. $y = |x| - 2$
18. $y = -2 + \sqrt{1 - x}$
19. $y = \sqrt{16 - x^2}$
20. $y = 3^{2-x} + 1$
21. $y = 2e^{-x} - 3$
22. $y = \operatorname{tg}(2x - \pi)$
23. $y = 2 \operatorname{sen}(3x + \pi) - 1$
24. $y = x^{2/5}$
25. $y = \ln(x - 3) + 1$
26. $y = -1 + \sqrt[3]{2 - x}$

Funções definidas em partes

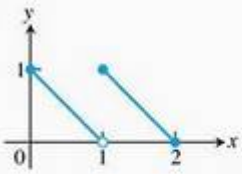
Nos exercícios 27 e 28, determine (a) o domínio e (b) a imagem.

27. $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, & -4 \le x \le 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \le 4 \end{cases}$

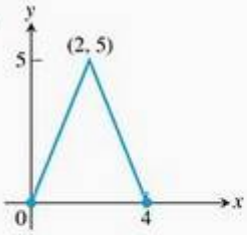
28. $y = \begin{cases} -x - 2, & -2 \le x \le -1 \\ x, & -1 < x \le 1 \\ -x + 2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

Nos exercícios 29 e 30, escreva uma fórmula para a função definida em partes.

29.



30.



Composição de funções

Nos exercícios 31 e 32, determine

(a) $(f \circ g)(-1)$
(b) $(g \circ f)(2)$
(c) $(f \circ f)(x)$
(d) $(g \circ g)(x)$

31. $f(x) = \frac{1}{x}$, $\quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

32. $f(x) = 2 - x$, $\quad g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

Nos exercícios 33 e 34, (a) escreva uma fórmula para $f \circ g$ e $g \circ f$ e ache (b) o domínio e (c) a imagem de cada uma.

33. $f(x) = 2 - x^2$, $\quad g(x) = \sqrt{x+2}$

34. $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad g(x) = \sqrt{1-x}$

Composição com valores absolutos Nos exercícios 35–40, trace juntos os gráficos de f_1 e f_2. Depois descreva como aplicar a função valor absoluto antes de aplicar f_1 afeta o gráfico.

$f_1(x)$	$f_2(x) = f_1(\lvert x\rvert)$
35. x	$\lvert x\rvert$
36. x^3	$\lvert x\rvert^3$
37. x^2	$\lvert x\rvert^2$
38. $\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\lvert x\rvert}$
39. $\sqrt{x}$	$\sqrt{\lvert x\rvert}$
40. sen x	sen $\lvert x\rvert$

Composição com valores absolutos Nos exercícios 41–44, trace juntos os gráficos de g_1 e g_2. Depois descreva como aplicar a função valor absoluto antes de aplicar g_1 afeta o gráfico.

$g_1(x)$	$g_2(x) = \lvert g_1(x)\rvert$
41. x^3	$\lvert x^3\rvert$
42. $\sqrt{x}$	$\lvert\sqrt{x}\rvert$
43. $4 - x^2$	$\lvert 4 - x^2\rvert$
44. $x^2 + x$	$\lvert x^2 + x\rvert$

Nos exercícios 45–48, determine o domínio de cada função.

45. (a) $f(x) = 1 + e^{-\operatorname{sen} x}$ (b) $g(x) = e^x + \ln\sqrt{x}$

46. (a) $f(x) = e^{1/x^2}$ (b) $g(x) = \ln\lvert 4 - x^2\rvert$

47. (a) $h(x) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$ (b) $f(x) = \cos^{-1}(\sqrt{x} - 1)$

48. (a) $h(x) = \ln(\cos^{-1} x)$ (b) $f(x) = \sqrt{\pi - \operatorname{sen}^{-1} x}$

49. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = 4 - x^2$, determine as funções $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$, bem como seus domínios.

50. Determine se f é ímpar, par ou nem uma coisa nem outra.

(a) $f(x) = e^{-x^2}$ (b) $f(x) = 1 + \operatorname{sen}^{-1}(-x)$

(c) $f(x) = \lvert e^x\rvert$ (d) $f(x) = e^{\ln\lvert x\rvert + 1}$

Construindo gráficos

51. Trace juntos os gráficos de $\ln x$, $\ln 2x$, $\ln 4x$, $\ln 8x$ e $\ln 16x$ (quantos você conseguir) para $0 < x \le 10$. O que acontece? Explique.

52. Construa o gráfico de $y = \ln(x^2 + c)$ para $c = -4, -2, 0, 3$ e 5. Como o gráfico se altera quando c se altera?

53. Construa o gráfico de $y = \ln\lvert\operatorname{sen} x\rvert$ na janela $0 \le x \le 22$, $-2 \le y \le 0$. Explique o que você vê. O que você mudaria na fórmula para virar os arcos de cabeça para baixo?

54. Trace juntos, na mesma tela, os gráficos destas três funções: $y = x^a$, $y = a^x$ e $y = \log_a x$ para $a = 2$, 10 e 20. Para valores grandes de x, qual dessas funções apresenta os maiores valores e qual apresenta os menores?

Nos exercícios 55 e 56, determine o domínio e a imagem de cada função composta. Depois, faça os gráficos das composições em telas separadas. Todos os gráficos fazem sentido? Justifique sua resposta e comente as diferenças encontradas.

55. (a) $y = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$ (b) $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$

56. (a) $y = \cos^{-1}(\cos x)$ (b) $y = \cos(\cos^{-1} x)$

57. Use um gráfico para decidir se f é injetora.

(a) $f(x) = x^3 - \frac{x}{2}$ (b) $f(x) = x^3 + \frac{x}{2}$

58 Use um gráfico para encontrar os valores de x com três casas decimais para os quais $e^x > 10.000.000$.

59.(a) Mostre que $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$ são inversas uma da outra.

(b) Esboce os gráficos de f e de g em um intervalo x suficientemente grande para mostrar que os gráficos se cortam em $(1, 1)$ e $(-1, -1)$. Certifique-se de que a figura mostra a simetria necessária na reta $y = x$.

60.(a) Mostre que $h(x) = x^3/4$ e $k(x) = (4x)^{1/3}$ são inversas uma da outra.

(b) Esboce os gráficos de h e de k em um intervalo x suficientemente grande para mostrar que os gráficos se cortam em $(2, 2)$ e $(-2, -2)$. Certifique-se de que a figura mostra a simetria necessária com respeito à reta $y = x$.

Análise de regressão

61. T A tabela a seguir apresenta o número de títulos de doutor obtidos em um ano acadêmico por estudantes hispânicos. Represente 1970–71 por $x = 0$, 1971–72 por $x = 1$ e assim por diante.

Ano	Número de títulos
1976–77	520
1980–81	460
1984–85	680
1988–89	630
1990–91	730
1991–92	810
1992–93	830

Fonte: U.S. Department of Education, *Chronicle of Higher Education*, 28 abr. 1995.

(a) Determine uma equação de regressão linear para os dados e sobreponha seu gráfico ao de dispersão dos dados.

(b) Use a equação de regressão para prever quantos títulos de doutor serão obtidos por hispano-americanos no ano acadêmico 2000–01.

(c) Determine o coeficiente angular da reta de regressão. O que o coeficiente angular representa?

62. A tabela a seguir apresenta dados hipotéticos de consumo de energia.

(a) Represente 1900 por $x = 0$, 1910 por $x = 1$ e assim por diante. Determine uma equação de regressão exponencial da forma $Q = ae^{bx}$ para os dados e sobreponha seu gráfico ao de dispersão de dados.

(b) Use a equação de regressão exponencial para estimar o consumo de energia em 1996. Qual é a taxa de crescimento anual durante o século XX?

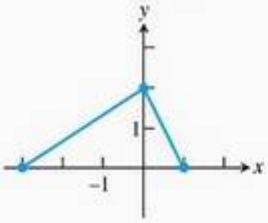
Ano	Consumo Q
1900	1,00
1910	2,01
1920	4,06
1930	8,17
1940	16,44
1950	33,12
1960	66,69
1970	134,29
1980	270,43
1990	544,57
2000	1.096,63

Exercícios adicionais

1. A figura a seguir apresenta o gráfico de f. Desenhe o gráfico de cada função.

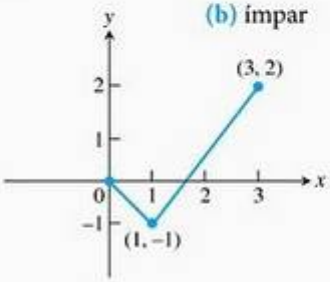
(a) $y = f(-x)$ (b) $y = -f(x)$

(c) $y = -2f(x + 1) + 1$ (d) $y = 3f(x - 2) - 2$



2. A figura a seguir apresenta uma parte do gráfico de uma função definida em [−3, 3]. Complete o gráfico admitindo que a função é

(a) par (b) ímpar



3. Há duas funções f e g tais que $f \circ g = g \circ f$? Justifique sua resposta.

4. Os gráficos de f e g não são linhas retas, mas o gráfico de $f \circ g$ é uma linha reta. Há duas funções f e g com essas propriedades? Justifique sua resposta.

5. Se $f(x)$ é ímpar, pode-se dizer algo sobre $g(x) = f(x) - 2$? O que se pode dizer se f é par? Justifique sua resposta.

6. Se $g(x)$ é uma função ímpar definida para todos os valores de x, pode-se dizer algo sobre $g(0)$? Justifique sua resposta.

7. Esboce o gráfico da equação $|x| + |y| = 1 + x$.

8. Esboce o gráfico da equação $y + |y| = x + |x|$.

9. Mostre que, se f é par e ímpar, então $f(x) = 0$ para todo x no domínio de f.

10. (a) **Decomposição par-ímpar** Seja f uma função cujo domínio é simétrico em torno da origem, ou seja, $-x$ pertence ao domínio sempre que x pertence. Mostre que f é a soma de uma função par e uma função ímpar:

$$f(x) = P(x) + I(x)$$

onde P é uma função par e I é uma função ímpar. (*Sugestão*: Seja $P(x) = [f(x) + f(-x)]/2$. Mostre que $P(-x) = P(x)$, de modo que P seja par. Depois mostre que $I(x) = f(x) - P(x)$ é ímpar.)

(b) **Unidade** Mostre que há só uma forma de escrever f como a soma de uma função par e uma ímpar. (*Sugestão*: Apresentamos um caminho no item (a). Se também $f(x) = P_1(x) + I_1(x)$, onde P_1 é par e I_1 é ímpar, então mostre que $P - P_1 = I_1 - I$. Depois use o Exercício 19 para mostrar que $P = P_1$ e $I = I_1$.)

11. **Composição com uma função ímpar**

(a) Seja $h = g \circ f$, onde g é uma função par. h é sempre uma função par? Justifique sua resposta.

(b) Seja $h = g \circ f$, onde g é uma função ímpar. h é sempre uma função ímpar? O que aconteceria se f fosse ímpar? E se f fosse par? Justifique sua resposta.

12. Se f é uma função injetora e ímpar, f^{-1} também é ímpar? E se f for par? Justifique sua resposta.

13. **Funções injetoras** Se f é uma função injetora, então prove que $g(x) = -f(x)$ também é injetora.

14. **Funções injetoras** Se f é uma função injetora e $f(x)$ nunca é zero, prove que $g(x) = 1/f(x)$ também é injetora.

15. **Domínio e imagem** Suponha que $a \neq 0$, $b \neq 1$ e $b > 0$. Determine o domínio e a imagem da função.

(a) $y = a(b^{c-x}) + d$ (b) $y = a \log_b (x - c) + d$

16. **Funções inversas** Seja

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad c \neq 0, \qquad ad - bc \neq 0$$

(a) Dê uma prova convincente de que f é injetora.

(b) Ache uma fórmula para a inversa de f.

(c) Ache as assíntotas horizontal e vertical de f.

(d) Ache as assíntotas horizontal e vertical de f^{-1}. Como elas se relacionam com as de f?

Aplicações e exemplos

17. **Depreciação** Smith Hauling adquiriu um caminhão com 18 rodas por 100.000 dólares. O caminhão deprecia a uma taxa constante de 10.000 dólares por ano durante dez anos.

(a) Escreva uma expressão que forneça o valor y depois de x anos.

(b) Quando o valor do caminhão será de 55.000 dólares?

18. **Absorção de medicamentos** Um medicamento é ministrado por via intravenosa para aliviar a dor. A função

$$f(t) = 90 - 52 \ln (1 + t), \qquad 0 \leq t \leq 4$$

dá o número de unidades do medicamento remanescentes no corpo depois de t horas.

(a) Qual foi a quantidade inicial ministrada em termos de unidades do medicamento?

(b) Quantas unidades estarão presentes depois de duas horas?

(c) Desenhe o gráfico de f.

19. **Achando o tempo** Se Juanita investir 1.500 dólares em uma conta de aposentadoria que rende 8% compostos anualmente, quanto tempo levará para que esse investimento atinja 5.000 dólares?

20. **A regra dos 70** Se você arredondar $\ln 2 \approx 0{,}70$ (em vez de 0,69314...), poderá deduzir uma regra que diz: "para estimar quantos anos uma soma de dinheiro demorará para dobrar investindo-se a r% composto continuamente, divida 70 por r". Por exemplo, uma quantia investida a 5% dobrará em aproximadamente 70/5 = 14 anos. Para conseguir o mesmo em dez anos, você deverá investir a 70/10 = 7%. Mostre como a regra dos 70 é deduzida. (Uma "regra dos 72" semelhante usa 72 em vez de 70, porque 72 tem mais fatores inteiros.)

21. Para qual $x > 0$, $x^{(x^x)}$ é igual a $(x^x)^x$? Justifique sua resposta.

22. (a) Se $(\ln x)/x = (\ln 2)/2$, x é necessariamente igual a 2?

T (b) Se $(\ln x)/x = -2 \ln 2$, x é necessariamente igual a 1/2?

Justifique suas respostas.

23. O quociente $(\log_4 x)/(\log_2 x)$ apresenta um valor constante. Qual valor é esse? Justifique sua resposta.

24. **$\log_x (2)$ contra $\log_2 (x)$** Qual é a diferença entre $f(x) = \log_x (2)$

T e $g(x) = \log_2 (x)$? Veja uma maneira de descobrir:

(a) Use a equação $\log_a b = (\ln b)/(\ln a)$ para expressar $f(x)$ e $g(x)$ em termos de logaritmos naturais.

(b) Trace juntos os gráficos de f e g. Comente o comportamento de f em relação aos sinais e valores de g.

Construindo gráficos

25. O que acontece ao gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ quando

(a) a se altera, enquanto b e c permanecem constantes?

(b) b se altera (a e c constantes, $a \neq 0$)?

(c) c se altera (a e b constantes, $a \neq 0$)?

26. O que acontece ao gráfico de $y = a(x + b)^3 + c$ quando

(a) a se altera, enquanto b e c permanecem constantes?

(b) b se altera (a e c constantes, $a \neq 0$)?

(c) c se altera (a e b constantes, $a \neq 0$)?

27. Determine todos os valores do coeficiente angular da reta $y = mx + 2$ para os quais o intercepto do eixo x excede 1/2.

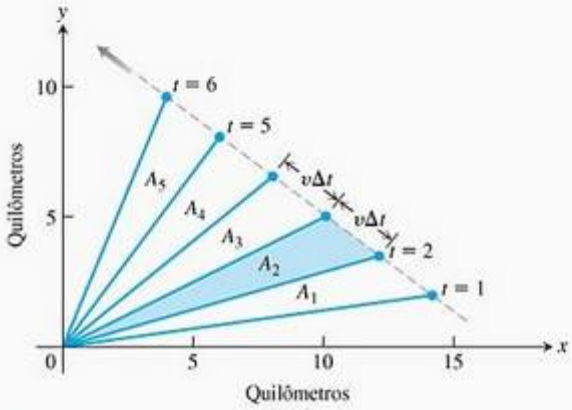
28. A tabela a seguir mostra a população dos Estados Unidos, em milhões, entre os anos de 1900 e 2000.

Ano	População
1900	76
1910	92
1920	106
1930	123
1940	131
1950	150
1960	179
1970	203
1980	227
1990	250
2000	281

Use uma calculadora gráfica dotada de ferramenta de regressão exponencial para modelar a população norte-americana desde 1900. Utilize esse modelo para estimar a população em 1925 e predizer a população nos anos 2012 e 2025.

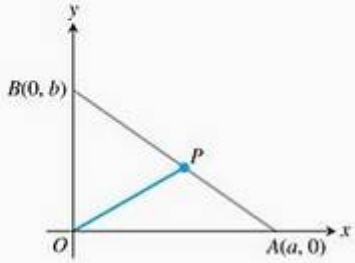
Geometria

29. O centro gravitacional de um objeto move-se a uma velocidade constante v ao longo de uma reta a partir da origem. A figura a seguir mostra o sistema de coordenadas e a reta do movimento. Os pontos mostram as posições a intervalos de 1 segundo. Por que as áreas $A_1, A_2, \ldots, A_5$ são iguais? Assim como na lei das áreas de Kepler (ver Seção 13.6, Volume II), a reta que une o centro gravitacional do objeto à origem varre áreas iguais em intervalos iguais.



30. **(a)** Determine o coeficiente angular da reta desde a origem até o ponto médio P, de lado AB, no triângulo da figura a seguir ($a, b > 0$).

(b) Quando OP é perpendicular a AB?



Exercícios avançados

Seja f uma função de A em B ($A, B \subset \mathbf{R}$). Se $U \subset A$ e $W \subset B$, define-se $f(U) = \{f(x) \mid x \in A\}$ (imagem de A) e $f^{-1}(W) = \{x \in A \mid f(x) \in W\}$ (pré-imagem de W).

1. Mostre que se $U, V \subset A$ e $W, Z \subset B$, então

(a) $f(U) \subset f(V)$ se $U \subset V$,

(b) $f^{-1}(W) \subset f^{-1}(Z)$ se $W \subset Z$,

(c) $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$ e $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$,

(d) $f^{-1}(W \cup Z) = f^{-1}(W) \cup f^{-1}(Z)$ e $f^{-1}(W \cap Z) = f^{-1}(W) \cap f^{-1}(Z)$.

2. Mostre que se $U \subset A$ e $W \subset B$, então

(a) Se $Z = f(U)$, então $U \subset f^{-1}(Z)$,

(b) Se $V = f^{-1}(W)$, então $f(V) \subset W$.

(c) Dê exemplos em que as inclusões nos itens anteriores são estritas e exemplos em que não o são. (*Observação*: uma inclusão $S \subset R$ é estrita, se $S \neq R$.)

Seja f uma função de A em B ($A, B \subset \mathbf{R}$). Dizemos que f tem inversa à esquerda (à direita) se existir uma função g de B em A, tal que $g \circ f(x) = x$ ($f \circ g(y) = y$), para todo $x \in A$ ($y \in B$). Mostre que:

3. Se f tem inversa à esquerda, então f é injetora. Essa inversa à esquerda é única?

4. Se f tem inversa à direita, então f é sobrejetora (isto é, $f(A) = B$, ver Exercício 1). Essa inversa à direita é única?

5. Decida se f é injetora, sobrejetora e/ou bijetora. Em caso afirmativo, justifique sua resposta apresentando uma inversa à esquerda, uma inversa à direita e/ou uma inversa, respectivamente.

   (a) $f(x) = x^2$, $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{R}^+$

   (b) $f(x) = x^2$, $A = \mathbf{R}^+$, $B = \mathbf{R}^+$

   (c) $f(x) = \sqrt{x}$, $A = \mathbf{R}^+$, $B = \mathbf{R}^+$

   (d) $f(x) = \sqrt{x}$, $A = \mathbf{R}^+$, $B = \mathbf{R}$

6. Faça o gráfico de $f(x) = |x + 1| + |x - 1| + |2x|$. A função f é par? Ímpar?

7. Faça o gráfico de $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1 \rfloor - \lceil 2x \rceil$. A função f é par? Ímpar?

Nos Exercícios 8 e 9, sejam f uma função de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$ e $a \in \mathbf{R}$ tal que $f(a) = a$. Para $x_0 \in \mathbf{R}$ definimos $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ por $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, e, em geral, $x_n = f(x_{n-1})$, $n > 0$.

8. Se f for crescente, mostre que

   (a) se $x_0 \geq a$, então $x_n \geq a$, para todo $n \in \mathbf{N}$.

   (b) se $x_0 \leq a$, então $x_n \leq a$, para todo $n \in \mathbf{N}$.

9. Se f for decrescente,

   (a) mostre que se $x_0 \geq a$, então $x_n \geq a$, se n é par, e $x_n \leq a$, se n é ímpar.

   (b) O que se pode concluir se $x_0 \leq a$?

10. **Interpolação de Lagrange** Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais distintos e considere as funções polinomiais $L_1, L_2, ..., L_n$ definidas por

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

   (a) Para cada i entre 1 e n, calcule os valores de L_i nos pontos $x_1, x_2, ..., x_n$.

   (b) Suponha que sejam dados os valores $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ de uma função f nos pontos $x_1, x_2, ..., x_n$. Determine os coeficientes $a_1, a_2, ..., a_n$ de forma que a função $g(x) = a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) + ... + a_n L_n(x)$ coincida com f nos pontos $x_1, x_2, ..., x_n$.

11. As elipses têm equação diferente de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ quando são transladadas e/ou giradas no plano xy.

   i. Se $A > 0$, $C > 0$ e $CD^2 + AE^2 > F$, então a equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ descreve uma elipse de eixos paralelos aos eixos coordenados cujo centro pode não estar em (0, 0).

   ii. Se $A > 0$, $C > 0$ e $AC - B^2 > 0 > F$, então a equação $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0$ descreve uma elipse com centro em (0, 0) cujos eixos podem não ser paralelos aos eixos coordenados.

   Escolha valores para os coeficientes A, B, C, D, E e F nos dois casos descritos e use uma calculadora gráfica ou um SAC para traçar as correspondentes elipses. Em cada caso, investigue o papel de cada coeficiente variando levemente seu valor e traçando as novas elipses. Qual é o efeito geométrico da cada variação?

12. **Uso de escala logarítmica** Considere a função $f(x) = ab^x$, onde $b > 0$ e $b \neq 1$.

   (a) Tome $a = 1$, $b = 2$ e trace o gráfico de $\ln(f(x))$. Que tipo de gráfico você obtém?

   (b) Repita o item (a) para $a = 1$, $b = 1/2$.

   (c) Repita o item (a) para $a = -1$, $b = 2$.

   (d) Repita o item (a) para $a = -1$, $b = 1/2$.

   (e) O que acontece com esse tipo de representação gráfica de f quando variamos a e/ou b?

Projetos de aplicação de tecnologia

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Modelando a variação: nascentes, segurança no trânsito, radioatividade, árvores, peixes e mamíferos.

Construa e interprete modelos matemáticos, analise-os e aperfeiçoe-os; depois, utilize-os para fazer previsões.

2 Limites e continuidade

RESUMO O conceito de limite é uma idéia central que distingue o cálculo da álgebra e da trigonometria. É fundamental para calcular a tangente de uma curva ou a velocidade de um objeto.

Neste capítulo, desenvolveremos o conceito de limite, primeiro intuitivamente e depois formalmente. Usamos limites para descrever como uma função f varia. Algumas funções variam continuamente; pequenas mudanças em x produzem apenas pequenas mudanças em $f(x)$. Outras funções podem ter valores que saltam ou variam erraticamente. A noção de limite fornece um caminho preciso para distinguir esses comportamentos. A aplicação geométrica de usar limites para definir a tangente de uma curva leva imediatamente ao importante conceito da derivada de uma função. A derivada, que investigaremos com detalhes no Capítulo 3, quantifica a taxa na qual os valores de uma função variam.

2.1 Taxas de variação e limites

Nesta seção, apresentaremos as taxas de variação média e instantânea, que levam à idéia principal da seção — a idéia de limite.

Velocidades média e instantânea

A **velocidade média** de um corpo em movimento durante um intervalo de tempo é obtida dividindo-se a distância percorrida pelo tempo gasto para percorrê-la. A unidade de medida é o comprimento por unidade de tempo: quilômetros por hora, pés por segundo ou o que for adequado para resolver o problema em questão.

EXEMPLO 1 Determinando a velocidade média

Uma pedra se desprende do topo de um penhasco. Qual é sua velocidade média durante

(a) os primeiros 2 s de queda?
(b) o intervalo de 1 s entre o segundo 1 e o segundo 2?

SOLUÇÃO Para resolver este problema, usamos o fato — descoberto por Galileu no fim do século XVI — de que um objeto sólido que entrar em queda livre a partir do repouso, próximo à superfície da Terra, percorrerá uma distância proporcional ao quadrado do tempo que levou caindo. (Estamos pressupondo que a resistência do ar seja insuficiente para deter a queda do objeto, e que a gravidade seja a única

Companion Website
Biografia histórica
Galileu Galilei (1564–1642)

força atuando sobre ele. Chamamos esse tipo de movimento **queda livre**.) Se y indica a distância percorrida em metros após t segundos, então a lei de Galileu é

$$y = 4{,}9t^2$$

onde 4,9 é a constante de proporcionalidade.

A velocidade média da pedra em dado intervalo de tempo é a variação na distância, Δy, dividida pela duração do intervalo de tempo, Δt.

(a) Para os primeiros 2 s: $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{4{,}9(2)^2 - 4{,}9(0)^2}{2-0} = 9{,}8$ m/s

(b) Do segundo 1 ao segundo 2: $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{4{,}9(2)^2 - 4{,}9(1)^2}{2-1} = 14{,}7$ m/s.

O próximo exemplo examina o que acontece quando observamos a velocidade média de um objeto em queda durante intervalos cada vez menores.

EXEMPLO 2 Determinando a velocidade instantânea

Calcule a velocidade da pedra em queda nos instantes $t = 1$ e $t = 2$ s.

SOLUÇÃO Podemos calcular a velocidade média da pedra no intervalo $[t_0, t_0 + h]$, de duração $\Delta t = h$, da seguinte maneira:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4{,}9(t_0 + h)^2 - 4{,}9t_0^{\,2}}{h} \qquad (1)$$

Não podemos usar essa fórmula para calcular a velocidade "instantânea" em t_0 substituindo $h = 0$, pois não podemos dividir por zero. Entretanto, *podemos* usá-la para calcular as velocidades médias em intervalos cada vez mais curtos, começando em $t_0 = 1$ e $t_0 = 2$. Ao fazermos isso, podemos ver um padrão (Tabela 2.1).

TABELA 2.1 Velocidades médias em pequenos intervalos de tempo

Velocidade média: $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{4{,}9(t_0 + h)^2 - 4{,}9t_0^{\,2}}{h}$

Duração do intervalo de tempo h	Velocidade média de duração h começando em $t_0 = 1$	Velocidade média no intervalo de duração h começando em $t_0 = 2$
1	14,7	24,5
0,1	10,29	20,09
0,01	9,849	19,649
0,001	9,8049	19,6049
0,0001	9,80049	19,60049

A velocidade média em intervalos começando em $t_0 = 1$ parece se aproximar de um valor-limite 9,8 à medida que o tamanho do intervalo diminui. Isso sugere que a pedra esteja caindo a uma velocidade de 9,8 m/s a $t_0 = 1$ s. Vamos confirmar isso algebricamente.

Se estabelecermos $t_0 = 1$ e depois expandirmos o numerador na Equação (1) e o simplificarmos, teremos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4{,}9(1+h)^2 - 4{,}9(1)^2}{h} = \frac{4{,}9(1+2h+h^2) - 4{,}9}{h} = \frac{9{,}8h + 4{,}9h^2}{h} = 9{,}8 + 4{,}9h$$

Para valores de h diferentes de 0, as expressões à direita e à esquerda são equivalentes e a velocidade média é 9,8 + 4,9h m/s. Agora, podemos ver por que a velocidade média apresenta o valor-limite 9,8 + 4,9(0) = 9,8 m/s à medida que h se aproxima de 0.

De modo semelhante, estabelecendo $t_0 = 2$ na Equação (1), o procedimento resulta em

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = 19,6 + 4{,}9h$$

para valores de h diferentes de 0. Quando h se aproxima de 0, a velocidade média em $t_0 = 2$ s atinge o valor-limite de 19,6 m/s.

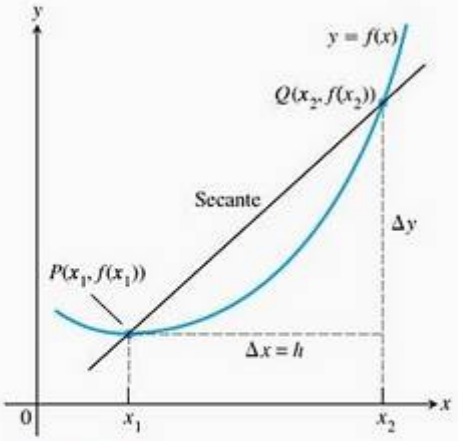


FIGURA 2.1 Uma reta secante ao gráfico de $y = f(x)$. Seu coeficiente angular é $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, a taxa média de variação de f no intervalo $[x_1 ; x_2]$.

Taxas médias de variação e retas secantes

Dada a função arbitrária $y = f(x)$, calculamos a taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ dividindo a variação do valor de y, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, pelo comprimento $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ do intervalo ao longo do qual a variação ocorre.

Definição Taxa média de variação num intervalo

A **taxa média de variação** de $y = f(x)$ em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h \neq 0$$

Geometricamente, a taxa de variação de f no intervalo $[x_1, x_2]$ é o coeficiente angular da reta que passa nos pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$ (Figura 2.1). Em geometria, uma reta que une dois pontos de uma curva é uma **secante** em relação à curva. Portanto, a taxa média de variação de f desde x_1 até x_2 é igual ao coeficiente angular da secante PQ.

Biólogos experimentais muitas vezes querem saber a que taxas populações crescem sob condições controladas de laboratório.

EXEMPLO 3 Taxa média de crescimento de uma população laboratorial

A Figura 2.2 mostra como uma população de moscas-das-frutas (*Drosophila*) cresceu num experimento de 50 dias. O número de moscas foi contado a intervalos regulares, os valores averiguados foram colocados num gráfico em relação ao tempo, e os pontos foram unidos por uma curva cheia (em azul na Figura 2.2). Calcule a taxa média de crescimento do dia 23 ao dia 45.

SOLUÇÃO Havia 150 moscas no dia 23 e 340 no dia 45. Logo, o número de moscas aumentou em 340 − 150 = 190 em 45 − 23 = 22 dias. A taxa média de variação da população do dia 23 ao dia 45 foi

$$\text{Taxa média de variação: } \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{340 - 150}{45 - 23} = \frac{190}{22} \approx 8{,}6 \text{ moscas/dia.}$$

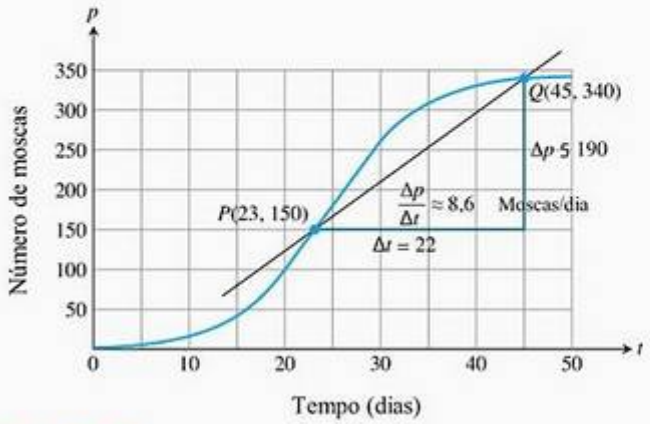


FIGURA 2.2 Crescimento de uma população de moscas-das-frutas num experimento controlado. A taxa média de variação ao longo de 22 dias é o coeficiente angular $\Delta p/\Delta t$ da secante

Essa média é o coeficiente angular da secante que passa pelos pontos P e Q no gráfico da Figura 2.2.

A taxa média de variação do dia 23 ao dia 45 calculado no Exemplo 3 não revela a rapidez com que a população estava variando no dia 23 em si. Para isso, precisamos examinar intervalos mais próximos ao dia em questão.

EXEMPLO 4 A taxa de crescimento no dia 23

A qual velocidade o número de moscas na população do Exemplo 3 estava crescendo no dia 23?

SOLUÇÃO Para responder a essa questão, examinamos as taxas médias de variação em intervalos de tempo cada vez mais curtos, começando no dia 23. Em termos geométricos, podemos obter essas taxas ao calcular os coeficientes angulares das secantes de P a Q, para uma seqüência de pontos Q que se aproxima de P ao longo da curva (Figura 2.3).

Q	Coeficiente angular de $PQ = \Delta p/\Delta t$ (moscas/dia)
(45, 340)	$\frac{340 - 150}{45 - 23} \approx 8{,}6$
(40, 330)	$\frac{330 - 150}{40 - 23} \approx 10{,}6$
(35, 310)	$\frac{310 - 150}{35 - 23} \approx 13{,}3$
(30, 265)	$\frac{265 - 150}{30 - 23} \approx 16{,}4$

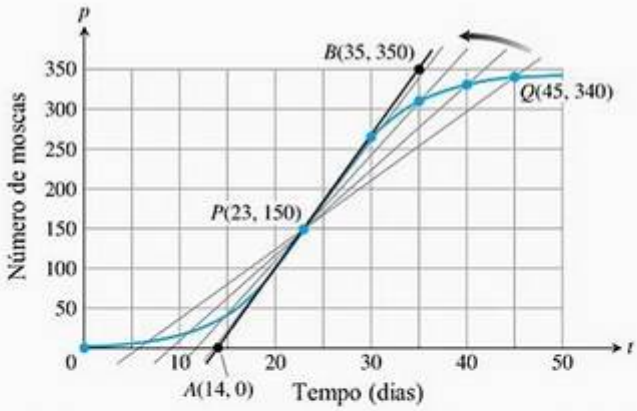


FIGURA 2.3 Posições e coeficientes angulares das quatro secantes que passam pelo ponto P na curva das moscas (Exemplo 4).

Os valores da tabela mostram que os coeficientes angulares das secantes vão de 8,6 a 16,4 conforme a coordenada t do ponto Q diminui de 45 para 30, e esperaríamos que os coeficientes angulares subissem

ligeiramente conforme t prosseguisse rumo a 23. Geometricamente, as secantes giram em torno de P e parecem aproximar-se da reta preta da figura, uma reta que passa por P na mesma direção em que a curva passa por P. Veremos que essa reta é denominada *tangente* à curva em P. Como a reta aparentemente passa pelos pontos (14, 0) e (35, 350), seu coeficiente angular será

$$\frac{350-0}{35-14} = 16{,}7 \text{ moscas/dia (aproximadamente).}$$

No dia 23 a população estava crescendo a uma taxa de cerca de 16,7 moscas/dia.

A taxa de queda da pedra (Exemplo 2) no instante $t = 1$ e $t = 2$ e a taxa de variação da população (Exemplo 4) no dia $t = 23$ são chamadas *taxas instantâneas de variação.* Como os exemplos sugerem, encontramos taxas instantâneas como valores-limite das taxas médias. No Exemplo 4, também descrevemos a tangente à curva de população no dia 23 como a posição-limite das retas secantes. Taxas instantâneas e retas tangentes estão intimamente ligadas e aparecem em muitos outros contextos. Para falarmos sobre a construção das duas e para entendermos sua melhor ligação, precisamos investigar o processo pelo qual determinamos os valores-limite, ou *limites*, como vamos chamá-los.

Limites dos valores das funções

Nossos exemplos vêm sugerindo a idéia de limite. Vamos começar com uma definição informal de limite, deixando a definição precisa para quando tivermos uma idéia melhor do conceito.

Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, *exceto talvez em* x_0. Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L (tão próximo quanto quisermos), para todos os valores de x suficientemente próximos de x_0, dizemos que f tem **limite** L quando x tende a x_0 e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

que se lê "o limite de $f(x)$, quando x tende a x_0, é L". Essencialmente, a definição diz que os valores de $f(x)$ ficarão próximos ao número L sempre que x estiver próximo de x_0 (em qualquer lado de x_0). Essa definição é "informal" porque as expressões *arbitrariamente próximo* e *suficientemente próximo* são imprecisas; seu significado depende do contexto. Para um metalúrgico que fabrica um pistão, *próximo* pode significar *alguns centésimos de milímetro*. Para um astrônomo que estuda galáxias distantes, *próximo* pode significar *alguns milhares de anos-luz*. Entretanto, a definição é suficientemente clara para permitir o reconhecimento e o cálculo dos limites de funções específicas. Quando começarmos a testar teoremas sobre limites, porém, vamos necessitar da definição precisa dada na Seção 2.3.

EXEMPLO 5 Comportamento de uma função perto de um ponto

Como a função $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

se comporta próximo de $x = 1$?

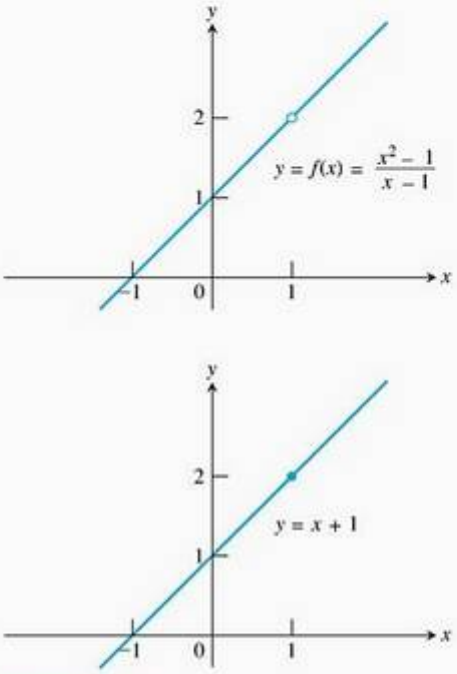


FIGURA 2.4 O gráfico de f é idêntico ao da reta $y = x + 1$, exceto em $x = 1$, onde f não é definida (Exemplo 5).

SOLUÇÃO A fórmula dada define f para todos os números reais x, exceto $x = 1$ (não podemos dividir por zero). Para qualquer $x \neq 1$, podemos simplificar a fórmula, fatorando o numerador e cancelando os fatores comuns:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 \quad \text{para } x \neq 1$$

Portanto, o gráfico de f é a reta $y = x + 1$ *sem* o ponto (1, 2). Esse ponto é apresentado como um "buraco" na Figura 2.4. Embora $f(1)$ não seja definida, está claro que podemos tornar o valor de $f(x)$ *tão próximo* de 2 *quanto quisermos*, escolhendo x *suficientemente próximo* de 1 (Tabela 2.2).

TABELA 2.2 Quanto mais próximo x estiver de 1, mais próximo $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ parece estar de 2

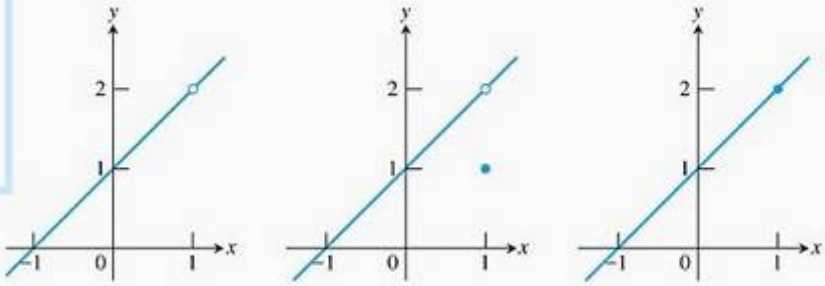
Valores de x acima e abaixo de 1	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1$
0,9	1,9
1,1	2,1
0,99	1,99
1,01	2,01
0,999	1,999
1,001	2,001
0,999999	1,999999
1,000001	2,000001

Dizemos que $f(x)$ se aproxima do *limite* 2 conforme x se aproxima de 1, e escrevemos

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

EXEMPLO 6 O valor do limite não depende do modo como a função é definida em x_0

Na Figura 2.5, a função f apresenta limite 2 quando $x \to 1$, mesmo que f não esteja definida para $x = 1$. Já a função g apresenta limite 2 quando $x \to 1$, mesmo que $2 \neq g(1)$. A função h é a única cujo limite é igual ao seu valor em $x = 1$, quando $x \to 1$. Para h, temos $\lim_{x \to 1} h(x) = h(1)$. Essa igualdade entre limite e valor da função é especial. Voltaremos a ela na Seção 2.6.



(a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ (b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ (c) $h(x) = x + 1$

FIGURA 2.5 Os limites de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ são iguais a 2 quando x se aproxima de 1. No entanto, somente $h(x)$ tem o mesmo valor de função que seu limite em $x = 1$ (Exemplo 6).

Às vezes, podemos avaliar $\lim_{x \to x_0} f(x)$ calculando $f(x_0)$. Isso se aplica, por exemplo, sempre que $f(x)$ é uma combinação algébrica de funções polinomiais e trigonométricas para a qual $f(x_0)$ está definida. (Falaremos mais sobre isso nas seções 2.2 e 2.6.)

EXEMPLO 7 Como determinar os limites calculando $f(x_0)$

(a) $\lim_{x \to 2} (4) = 4$

(b) $\lim_{x \to -13} (4) = 4$

(c) $\lim_{x \to 3} x = 3$

(d) $\lim_{x \to 2} (5x - 3) = 10 - 3 = 7$

(e) $\lim_{x \to -2} \dfrac{3x+4}{x+5} = \dfrac{-6+4}{-2+5} = -\dfrac{2}{3}$

EXEMPLO 8 As funções constante e identidade têm limites em todos os pontos

(a) Se f é a **função identidade** $f(x) = x$, então para cada valor de x_0 (Figura 2.6a),

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0$$

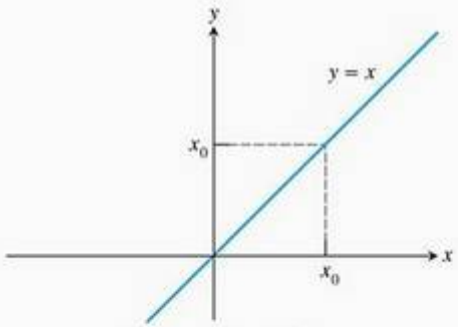
(b) Se f é a **função constante** $f(x) = k$ (função com valor constante k), então para qualquer valor de x_0 (Figura 2.6b),

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} k = k$$

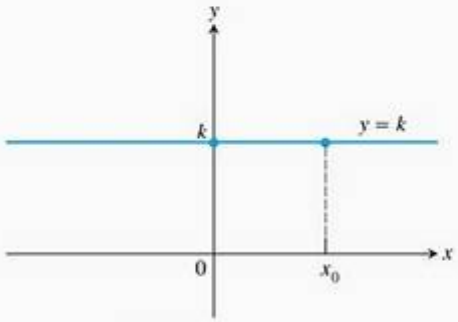
Por exemplo,

$$\lim_{x \to 3} x = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -7} (4) = \lim_{x \to 2} (4) = 4$$

Testaremos esses resultados no Exemplo 3 da Seção 2.3.



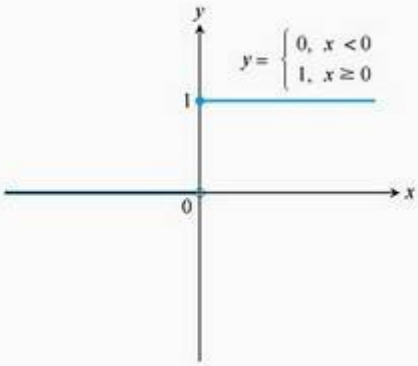
(a) Função identidade



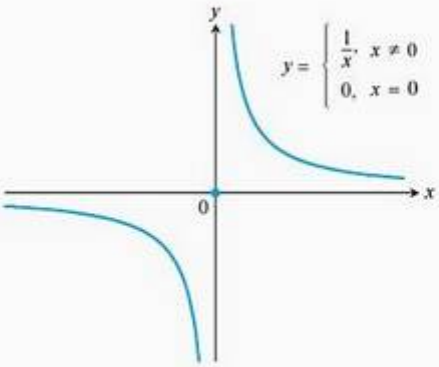
(b) Função constante

FIGURA 2.6 Funções do Exemplo 8.

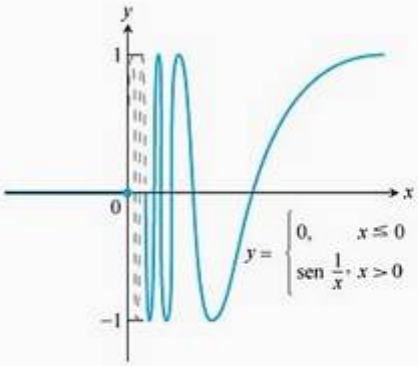
Algumas situações em que os limites podem não existir são ilustradas na Figura 2.7 e descritas no próximo exemplo.



(a) Função de salto unitário $U(x)$



(b) $g(x)$



(c) $f(x)$

FIGURA 2.7 Nenhuma dessas funções tem um limite à medida que x se aproxima de 0 (Exemplo 9).

EXEMPLO 9 Uma função pode não ter limite em dado ponto de seu domínio

Discuta o comportamento das seguintes funções quando $x \to 0$.

(a) $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

SOLUÇÃO

(a) A função *salta*: **A função de salto unitário** $U(x)$ não tem limite quando $x \to 0$, porque seus valores saltam em $x = 0$. Para valores negativos de x arbitrariamente próximos de zero, $U(x) = 0$. Para valores positivos de x arbitrariamente próximos de zero, $U(x) = 1$. Não há um *único* valor de L do qual $U(x)$ se aproxime quando $x \to 0$ (Figura 2.7a).

(b) A função *cresce demais para ter um limite*: $g(x)$ não tem um limite quando $x \to 0$, porque g cresce arbitrariamente muito em valor absoluto quando $x \to 0$ e não se mantém próximo de *nenhum* valor real (Figura 2.7b).

(c) A função *oscila demais para ter um limite*: $f(x)$ não tem limite quando $x \to 0$, porque os valores da função oscilam entre +1 e −1 em cada intervalo aberto que contém 0. Os valores não se mantêm próximos de qualquer número quando $x \to 0$ (Figura 2.7c).

Usando calculadoras e computadores para estimar limites

As tabelas 2.1 e 2.2 ilustram o uso de uma calculadora ou computador para estimar um limite numericamente quando x se aproxima de x_0. Esse procedimento também daria certo no caso de limites de funções como as apresentadas no Exemplo 7 (trata-se de funções *contínuas*, estudadas na Seção 2.6). No entanto, calculadoras e computadores podem dar *valores falsos e impressões errôneas* no caso de funções que sejam indefinidas em certo ponto, ou que não apresentem limite nesse ponto. O cálculo diferencial nos ajuda a reconhecer quando uma calculadora ou computador está fornecendo uma informação estranha ou ambígua sobre o comportamento de uma função perto de certo ponto (veja as seções 4.4 e 4.6). Por ora, precisamos apenas estar atentos às armadilhas que podem existir quando se usam dispositivos computacionais para estimar o valor de um limite. Eis um exemplo.

EXEMPLO 10 Estimando um limite

Estime o limite de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$

SOLUÇÃO A Tabela 2.3 lista valores da função para vários valores próximos de $x = 0$. Conforme x se aproxima de 0, nos valores ±1; ±0,5; ±0,10; e ±0,01, a função parece se aproximar do número 0,05.

À medida que tomamos valores ainda menores de x, ±0,0005; ±0,0001; ±0,00001 e ±0,000001, a função parece se aproximar do valor 0.

Então, qual é a resposta? É 0,05 ou 0, ou outro valor qualquer? Os valores apresentados pela calculadora ou pelo computador são ambíguos, mas os teoremas sobre limites estudados na próxima seção vão confirmar que o valor-limite correto é 0,05(= 1/20). Problemas como esse demonstram o poder do raciocínio matemático, quando desenvolvido, sobre as conclusões a que podemos chegar fazendo algumas observações. As duas abordagens apresentam prós e contras quando se quer descobrir as realidades da natureza.

TABELA 2.3 Valores de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+100}-10}{x}$ próximo de $x = 0$ fornecidos pelo computador

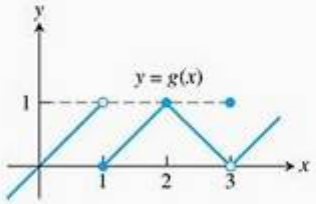
x	$f(x)$	
±1	0,049876	aproxima-se de 0,05?
±0,5	0,049969	
±0,1	0,049999	
±0,01	0,050000	
±0,0005	0,080000	aproxima-se de 0?
±0,0001	0,000000	
±0,00001	0,000000	
±0,000001	0,000000	

Exercícios 2.1

Limites obtidos graficamente

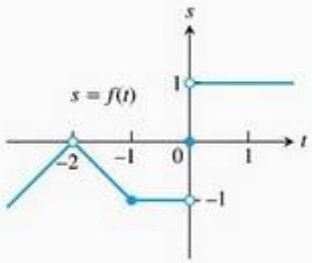
1. Para a função $g(x)$ aqui ilustrada, encontre os seguintes limites ou explique por que eles não existem.

(a) $\lim_{x\to 1} g(x)$ (b) $\lim_{x\to 2} g(x)$ (c) $\lim_{x\to 3} g(x)$



2. Para a função $f(t)$ aqui ilustrada, encontre os seguintes limites ou explique por que eles não existem.

(a) $\lim_{t\to -2} f(t)$ (b) $\lim_{t\to -1} f(t)$ (c) $\lim_{t\to 0} f(t)$



3. Quais das seguintes afirmações sobre a função $y = f(x)$ ilustrada a seguir são verdadeiras e quais são falsas?

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe.

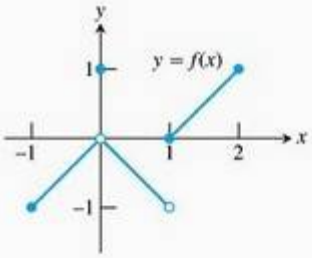
(b) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

(c) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

(d) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.

(e) $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$.

(f) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe em todo ponto x_0 em $(-1, 1)$.



4. Quais das seguintes afirmações sobre a função $y = f(x)$ ilustrada a seguir são verdadeiras e quais são falsas?

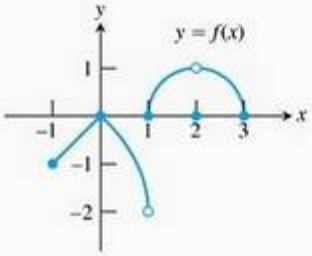
(a) $\lim_{x \to 2} f(x)$ não existe.

(b) $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$.

(c) $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe.

(d) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe em todo ponto x_0 em $(-1, 1)$.

(e) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe em todo ponto x_0 em $(1, 3)$.



Existência de limites

Nos exercícios 5 e 6, explique por que os limites não existem.

5. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$

6. $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x - 1}$

7. Suponha que uma função $f(x)$ seja definida para todos os valores reais de x com exceção de $x = x_0$. Pode-se afirmar alguma coisa sobre a existência do $\lim_{x \to x_0} f(x)$? Justifique sua resposta.

8. Suponha que uma função $f(x)$ seja definida para todos os valores reais de x em $[-1, 1]$. Pode-se afirmar alguma coisa sobre a existência do $\lim_{x \to 0} f(x)$? Justifique sua resposta.

9. Se $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$, f deve ser definida em $x = 1$? Em caso afirmativo, $f(1)$ deve ser igual a 5? Podemos concluir *alguma coisa* sobre os valores de f em $x = 1$? Explique.

10. Se $f(1) = 5$, $\lim_{x \to 1} f(x)$ deve existir? Se existe, então $f(x)$ deve ser igual a 5? Podemos concluir *alguma coisa* sobre $\lim_{x \to 1} f(x)$? Explique.

Estimando limites

T Será útil usar uma calculadora gráfica na resolução dos exercícios 11–20.

11. Seja $f(x) = (x^2 - 9)/(x + 3)$.

(a) Faça uma tabela com os valores de f nos pontos $x = -3{,}01; -3{,}01\ -3{,}001$ e assim por diante, até onde sua calculadora permitir. Em seguida, estime $\lim_{x \to -3} f(x)$. A que estimativa você chegaria se calculasse f em $x = -2{,}9; -2{,}99; -2{,}999...$?

(b) Fundamente as conclusões do item (a) esboçando o gráfico de f próximo de $x_0 = -3$ e usando os comandos "Zoom" e "Trace" para calcular os valores de y no gráfico em $x \to -3$.

(c) Encontre $\lim_{x \to -3} f(x)$ algebricamente, como no Exemplo 5.

12. Seja $g(x) = (x^2 - 2)/(x - \sqrt{2})$.

(a) Faça uma tabela com os valores de g nos pontos $x = 1{,}4; 1{,}41; 1{,}414$ e assim por diante até sucessivas aproximações decimais de $\sqrt{2}$. Calcule $\lim_{x \to \sqrt{2}} g(x)$.

(b) Fundamente as conclusões do item (a) esboçando um gráfico de g próximo de $x_0 = \sqrt{2}$ e usando os comandos "Zoom" e "Trace" para calcular os valores de y no gráfico quando $x \to \sqrt{2}$.

(c) Calcule $\lim_{x \to \sqrt{2}} g(x)$ algebricamente.

13. Seja $G(x) = (x + 6)/(x^2 + 4x - 12)$.

(a) Faça uma tabela com os valores de G em $x = -5{,}9; -5{,}99; -5{,}999$ e assim por diante. Em seguida, estime $\lim_{x \to -6} G(x)$. A que valores você chegaria se calculasse G em $x = -6{,}1; -6{,}01; -6{,}001...$?

(b) Fundamente as conclusões do item (a) por meio de um gráfico de G e use os comandos "Zoom" e "Trace" para estimar os valores de y no gráfico quando $x \to -6$.

(c) Calcule $\lim_{x \to -6} G(x)$ algebricamente.

14. Seja $h(x) = (x^2 - 2x - 3)/(x^2 - 4x + 3)$.

(a) Faça uma tabela com os valores de h quando $x = -2{,}9$; $-2{,}99$; $2{,}999$ e assim sucessivamente. Em seguida, estime $\lim_{x\to 3} h(x)$. A que valores você chegaria se calculasse h quando $x = 3{,}1$; $3{,}01$; $3{,}001$...?

(b) Fundamente as conclusões do item **(a)** esboçando um gráfico de h próximo de $x_0 = 3$ e use os comandos "Zoom" e "Trace" para estimar os valores de y no gráfico quando $x \to 3$.

(c) Calcule $\lim_{x\to 3} h(x)$ algebricamente.

15. Seja $f(x) = (x^2 - 1)/(|x| - 1)$.

(a) Faça tabelas de valores de f para os valores de x que se aproximam de $x_0 = -1$ por cima e por baixo. Em seguida, estime $\lim_{x\to -1} f(x)$.

(b) Fundamente as conclusões do item **(a)** esboçando um gráfico de f próximo de $x_0 = -1$ e use os comandos "Zoom" e "Trace" para estimar os valores de y no gráfico quando $x \to -1$.

(c) Calcule $\lim_{x\to -1} f(x)$ algebricamente.

16. Seja $F(x) = (x^2 + 3x + 2)/(2 - |x|)$.

(a) Faça tabelas de valores de F para valores de x que se aproximam de $x_0 = -2$ por cima e por baixo. Em seguida, estime $\lim_{x\to -2} F(x)$.

(b) Fundamente as conclusões do item **(a)** esboçando um gráfico de F próximo de $x_0 = -2$ e use os comandos "Zoom" e "Trace" para estimar os valores de y no gráfico quando $x \to -2$.

(c) Calcule $\lim_{x\to -2} F(x)$ algebricamente.

17. Seja $g(\theta) = (\operatorname{sen}\theta)/\theta$.

(a) Faça tabelas com os valores de g quando θ se aproxima de $\theta_0 = 0$ em ordem decrescente. Em seguida, estime $\lim_{\theta\to 0} g(\theta)$.

(b) Fundamente as conclusões do item **(a)** esboçando um gráfico de g próximo de $\theta_0 = 0$.

18. Seja $G(t) = (1 - \cos t)/t^2$.

(a) Faça tabelas com os valores de G quando t se aproxima de $t_0 = 0$ em ordem decrescente. Em seguida, estime $\lim_{t\to 0} G(t)$.

(b) Fundamente as conclusões do item **(a)** esboçando um gráfico de G próximo de $t_0 = 0$.

19. Seja $f(x) = x^{1/(1-x)}$.

(a) Faça uma tabela com os valores de f quando x se aproxima de $x_0 = 1$ em ordem decrescente. f tem um limite quando $x \to 1$? Em caso positivo, qual é? Em caso negativo, por que não?

(b) Fundamente as conclusões do item **(a)** esboçando um gráfico de f próximo de $x_0 = 1$.

20. Seja $f(x) = (3^x - 1)/x$.

(a) Faça uma tabela com os valores de f quando x se aproxima de $x_0 = 0$ em ordem decrescente. f tem um limite quando $x \to 0$? Em caso positivo, qual é? Em caso negativo, por que não?

(b) Fundamente as conclusões do item **(a)** esboçando um gráfico de f próximo de $x_0 = 0$.

Limites por substituição

Nos exercícios 21–28, calcule os limites por substituição. *Se possível, confirme suas respostas num computador ou numa calculadora.*

21. $\lim_{x\to 2} 2x$

22. $\lim_{x\to 0} 2x$

23. $\lim_{x\to 1/3} (3x - 1)$

24. $\lim_{x\to 1} \dfrac{-1}{(3x-1)}$

25. $\lim_{x\to -1} 3x(2x - 1)$

26. $\lim_{x\to -1} \dfrac{3x^2}{2x-1}$

27. $\lim_{x\to \pi/2} x \operatorname{sen} x$

28. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\cos x}{1-\pi}$

Taxas médias de variação

Nos exercícios 29–34, encontre a taxa média de variação da função no(s) seguinte(s) intervalo(s).

29. $f(x) = x^3 + 1$;

(a) $[2, 3]$ **(b)** $[-1, 1]$

30. $g(x) = x^2$;

(a) $[-1, 1]$ **(b)** $[-2, 0]$

31. $h(t) = \operatorname{cotg} t$;

(a) $[\pi/4, 3\pi/4]$ **(b)** $[\pi/6, \pi/2]$

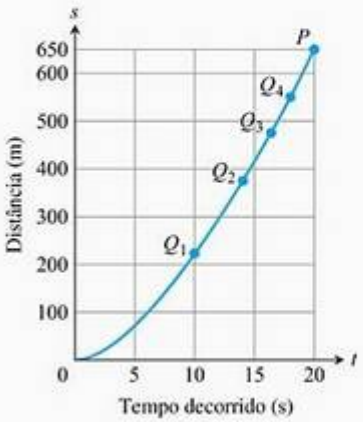
32. $g(t) = 2 + \cos t$;

(a) $[0, \pi]$ **(b)** $[-\pi, \pi]$

33. $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$; $[0, 2]$

34. $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$; $[1, 2]$

35. **A velocidade de um Ford Mustang Cobra** A figura seguinte mostra o gráfico da distância em função do tempo de um Ford Mustang Cobra 1994 que acelera a partir do repouso.



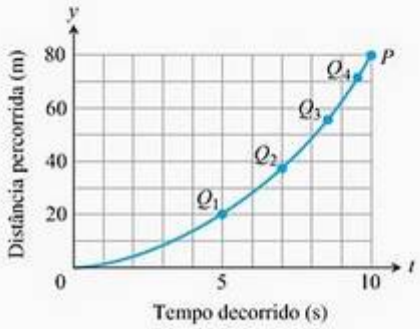
(a) Calcule os coeficientes angulares das secantes PQ_1, PQ_2, PQ_3 e PQ_4, arranjando-os em ordem em uma tabela como a da Figura 2.3. Quais são as unidades adequadas para esses coeficientes angulares?

(b) Em seguida, calcule a velocidade do Cobra em $t = 20$ s.

36. A figura a seguir mostra o gráfico da distância em função do tempo de um objeto que caiu do módulo lunar percorrendo uma distância de 80 m até a superfície da lua.

(a) Calcule o coeficiente angular das secantes PQ_1, PQ_2, PQ_3 e PQ_4, arranjando-os em uma tabela como na Figura 2.3.

(b) Qual é a velocidade aproximada do objeto ao atingir a superfície?



37. Os lucros de uma pequena empresa em cada um dos cinco anos de sua operação são dados na tabela a seguir:

T

Ano	Lucro em milhares de reais
1990	6
1991	27
1992	62
1993	111
1994	174

(a) Faça um gráfico com pontos que representem o lucro como uma função do ano, depois una-os com uma curva o mais contínua possível.

(b) Qual é a taxa média de crescimento dos lucros entre 1992 e 1994?

(c) Use seu gráfico para estimar a taxa à qual os lucros variaram em 1992.

38. Faça uma tabela de valores para a função $F(x) = (x + 2)/(x - 2)$ nos pontos $x = 1{,}2$; $x = 11/10$; $x = 101/100$; $x = 1.001/1.000$; $x = 10.001/10.000$; e $x = 1$.

T

(a) Calcule a taxa média de variação de $F(x)$ nos intervalos $[1, x]$ para cada $x \neq 1$ em sua tabela.

(b) Amplie a tabela, se necessário, e tente determinar a taxa de variação de $F(x)$ em $x = 1$.

39. Seja $g(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$.

T

(a) Calcule a taxa média de variação de $g(x)$ em relação a x nos intervalos $[1; 2]$, $[1; 1{,}5]$ e $[1; 1 + h]$.

(b) Faça uma tabela de valores da taxa média de variação de g em relação a x no intervalo $[1, 1 + h]$ para alguns valores de h aproximando-se de 0; por exemplo, $h = 0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$; $0{,}0001$; $0{,}00001$; e $0{,}000001$.

(c) O que sua tabela indica é a taxa de variação de $g(x)$ em relação a x em $x = 1$?

(d) Calcule o limite, quando h se aproxima de zero, da taxa média de variação de $g(x)$ em relação a x no intervalo $[1, 1 + h]$.

40. Seja $f(t) = 1/t$ para $t \neq 0$.

T

(a) Calcule a taxa média de variação de f em relação a t nos intervalos (i) de $t = 2$ a $t = 3$, e (ii) de $t = 2$ a $t = T$.

(b) Faça uma tabela de valores da taxa média de variação de f em relação a t no intervalo $[2, T]$, para alguns valores de T que se aproximam de 2; por exemplo, $T = 2{,}1$; $2{,}01$; $2{,}001$; $2{,}0001$; $2{,}00001$; e $2{,}000001$.

(c) O que sua tabela indica é a taxa de variação de f em relação a t em $t = 2$?

(d) Calcule o limite, quando T se aproxima de 2, da taxa média de variação de f em relação a t no intervalo de 2 a T. Você terá de fazer alguns cálculos algébricos antes de substituir $T = 2$.

USANDO O COMPUTADOR

Estimativa gráfica de limites

Nos exercícios 41–46, use o SAC (Sistema de Álgebra por Computador) para executar as seguintes etapas:

(a) Trace o gráfico da função próximo do ponto x_0.

(b) A partir de seu esboço do gráfico, dê uma estimativa de qual será o valor do limite.

41. $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

42. $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{(x+1)^2}$

43. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$

44. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$

45. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \operatorname{sen} x}$

46. $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{3 - 3\cos x}$

2.2 Como calcular limites usando as leis do limite

Companion Website

Ensaio histórico

Limites

Na Seção 2.1, usamos gráficos e calculadoras para estimar os valores dos limites. Esta seção apresenta teoremas para calcular os limites. Os três primeiros vão permitir que nos baseemos nos resultados do Exemplo 8 da seção anterior para calcular os limites de polinômios, funções racionais e potências. O quarto e o quinto, por sua vez, servirão de preparação para cálculos que veremos adiante.

Leis do limite

O próximo teorema mostra como calcular limites de funções que são combinações aritméticas de funções cujos limites já conhecemos.

Teorema 1 Leis do limite

Se L, M, c e k são números reais e $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} g(x) = M$, então

1. *Regra da soma:* $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$

   O limite da soma de duas funções é a soma de seus limites.

2. *Regra da diferença:* $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M$

   O limite da diferença de duas funções é a diferença de seus limites.

3. *Regra do produto:* $\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

   O limite do produto de duas funções é o produto de seus limites.

4. *Regra da multiplicação por constante:* $\lim_{x \to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

   O limite de uma constante multiplicada pela função é a constante multiplicada pelo limite da função.

5. *Regra do quociente:* $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$

   O limite do quociente de duas funções é o quociente de seus limites, desde que o limite do denominador não seja zero.

6. *Regra da potenciação:* se r e s são inteiros e não têm um fator comum, e $s \neq 0$, então $\lim_{x \to c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$, desde que $L^{r/s}$ seja um número real. (Se s é par, pressupomos que $L > 0$.)

   O limite de uma potência racional de uma função é a potência do limite da função, desde que esse último seja um número real.

É fácil acreditar que as propriedades do Teorema 1 são verdadeiras (muito embora esses argumentos intuitivos não constituam prova). Se x está suficientemente próximo de c, então $f(x)$ está perto de L, e $g(x)$, perto de M, segundo nossa definição informal de limite. Logo, é razoável que $f(x) + g(x)$ esteja próximo de $L + M$; $f(x) - g(x)$ esteja próximo de $L - M$; $f(x)g(x)$ esteja próximo de LM; $kf(x)$ esteja próximo de kL; e que $f(x)/g(x)$ esteja próximo de L/M se M não for zero. Provaremos a regra da soma na Seção 2.3, com base numa definição precisa de limite. As regras 2–5 serão provadas no Apêndice A.2. A regra 6 é provada em textos mais avançados.

Estes são alguns exemplos de como o Teorema 1 pode ser usado para obter limites de funções polinomiais e racionais.

EXEMPLO 1 Usando as leis do limite

Utilize as observações $\lim_{x\to c} k = k$ e $\lim_{x\to c} x = c$ (Exemplo 8 da Seção 2.1) e as propriedades dos limites para obter os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to c}(x^3 + 4x^2 - 3)$ (b) $\lim_{x\to c}\dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$ (c) $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2 - 3}$

SOLUÇÃO

(a) $\lim_{x\to c}(x^3 + 4x^2 - 3) = \lim_{x\to c} x^3 + \lim_{x\to c} 4x^2 - \lim_{x\to c} 3$ — Regras da soma e da diferença.

$= c^3 + 4c^2 - 3$ — Regras do produto e da multiplicação.

(b) $\lim_{x\to c}\dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \dfrac{\lim_{x\to c}(x^4 + x^2 - 1)}{\lim_{x\to c}(x^2 + 5)}$ — Regra do quociente.

$= \dfrac{\lim_{x\to c} x^4 \lim_{x\to c} x^2 - \lim_{x\to c} 1}{\lim_{x\to c} x^2 + \lim_{x\to c} 5}$ — Regra da soma e da diferença.

$= \dfrac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5}$ — Regra da potência ou do produto.

(c) $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{\lim_{x\to -2}(4x^2 - 3)}$ — Regra da potência com $r/s = 1/2$.

$= \sqrt{\lim_{x\to -2} 4x^2 - \lim_{x\to -2} 3}$ — Regra da diferença.

$= \sqrt{4(-2)^2 - 3}$ — Regra do produto e da multiplicação.

$= \sqrt{16 - 3}$

$= \sqrt{13}$

Duas conseqüências do Teorema 1 simplificam ainda mais a tarefa de calcular os limites de funções polinomiais e racionais. Para calcular o limite de uma função polinomial quando x se aproxima de c, simplesmente substitua c por x na fórmula da função. Para calcular o limite de uma função racional quando x se aproxima de um ponto *c no qual o denominador não é zero*, substitua c por x na fórmula da função. (Veja os exemplos 1a e 1b.)

Teorema 2 Os limites de funções polinomiais podem ser obtidos por substituição

Se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, então

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Teorema 3 **Os limites de funções racionais podem ser obtidos por substituição, caso o limite do denominador não seja zero**

Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e $Q(c) \neq 0$, então

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

Identificando fatores comuns

Pode-se demonstrar que, se $Q(x)$ é um polinômio e $Q(c) = 0$, então $(x - c)$ é um fator de $Q(x)$. Logo, se o numerador e o denominador de uma função racional de x forem ambos zero em $x = c$, eles terão $(x - c)$ como fator comum.

EXEMPLO 2 Limite de uma função racional

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$

Esse resultado é semelhante ao segundo limite do Exemplo 1, com $c = -1$, agora feito em um passo.

Eliminando algebricamente os denominadores nulos

O Teorema 3 se aplica somente quando o denominador de uma função racional não é zero no ponto c. Se o denominador for zero, cancelando fatores comuns no numerador e denominador, podemos reduzir a fração a outra cujo denominador não seja mais zero em c. Se isso acontecer, podemos obter o limite por substituição na fração simplificada.

EXEMPLO 3 Cancelando um fator comum

Resolva

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$$

SOLUÇÃO Não podemos substituir $x = 1$ porque isso resulta em um denominador zero. Testamos o numerador para ver se este também é zero em $x = 1$. Também é, portanto apresenta o fator $(x - 1)$ em comum com o denominador. Cancelar o $(x - 1)$ resulta em uma fração mais simples, com os mesmos valores da original para $x \neq 1$:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x}, \text{ se } x \neq 1$$

Usando a fração simplificada, obtemos o limite desses valores quando $x \to 1$ por substituição:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

Veja a Figura 2.8.

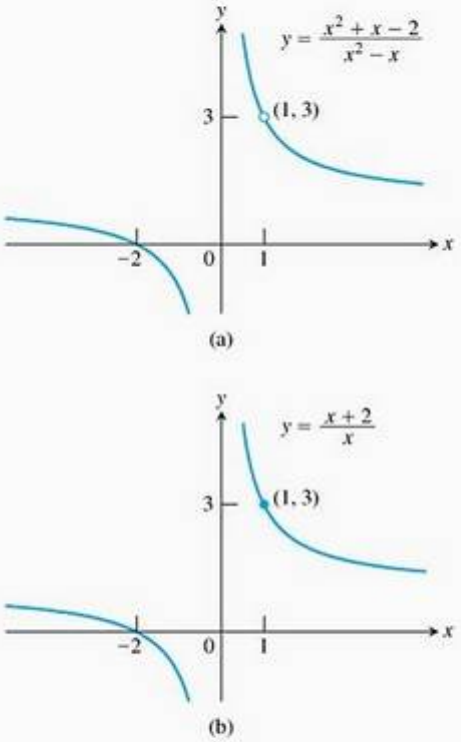


FIGURA 2.8 O gráfico de $f(x) = (x^2 + x - 2)/(x^2 - x)$ em (a) é igual ao de $g(x) = (x + 2)/x$ em (b), exceto em $x = 1$, onde f é indefinida. As funções têm o mesmo limite quando $x \to 1$ (Exemplo 3).

EXEMPLO 4 Criando e cancelando um fator comum

Resolva

$$\lim_{x \to 0} = \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$$

SOLUÇÃO Esse é o limite que consideramos no Exemplo 10 da seção anterior. Não podemos substituir $x = 0$ e, além disso, numerador e denominador não têm fatores comuns óbvios. Podemos criar um fator comum multiplicando o numerador e o denominador pela expressão $\sqrt{x^2+100}+10$ (obtida pela mudança de sinal entre as raízes quadradas). Um cálculo algébrico preliminar racionaliza o numerador:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} &= \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+100}+10}{\sqrt{x^2+100}+10} \\
&= \frac{x^2+100-100}{x^2\left(\sqrt{x^2+100}+10\right)} \\
&= \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+100}+10\right)} && \text{Fator comum de } x^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10} && \text{Cancelar } x^2 \text{ para } x \neq 0
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10} && \text{Denominador diferente de 0 em } x = 0\text{; substituir} \\
&= \frac{1}{\sqrt{0^2+100}+10} \\
&= \frac{1}{20} = 0{,}05
\end{aligned}$$

Esse cálculo fornece a resposta correta para os resultados ambíguos do computador no Exemplo 10 da seção anterior.

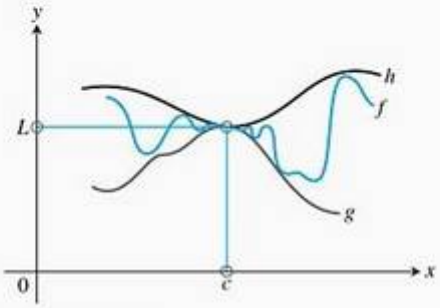


FIGURA 2.9 O gráfico de f é limitado entre os de g e h.

Teorema do confronto

O teorema a seguir vai nos permitir calcular uma série de limites nos próximos capítulos. O teorema se refere a uma função f cujos valores estão limitados entre os valores de outras duas funções, g e h, que têm o mesmo limite L no ponto c. Estando "presos" entre os valores de duas funções que se aproximam de L, os valores de f precisam também se aproximar de L (Figura 2.9). A prova está no Apêndice A.2.

Teorema 4 Teorema do confronto
Suponha que $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para qualquer x em um intervalo aberto contendo c, exceto, possivelmente, em $x = c$. Suponha também que

$$\lim_{x\to c} = g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$$

Então, $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

O teorema do confronto é também chamado "teorema do sanduíche".

EXEMPLO 5 Aplicando o teorema do confronto

Sendo

$$1-\frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1+\frac{x^2}{2}, \text{ para qualquer } x \neq 0,$$

procure $\lim_{x\to 0} u(x)$, por mais complicado que seja u.

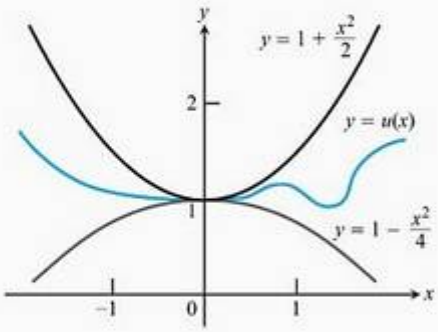


FIGURA 2.10 Qualquer função $u(x)$ cujo gráfico esteja na região entre $y = 1 + (x^2/2)$ e $y = 1 - (x^2/4)$ tem limite 1 quando $x \to 0$ (Exemplo 5).

SOLUÇÃO Como

$$\lim_{x \to 0} (1 - (x^2/4)) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} (1 + (x^2/2)) = 1$$

o teorema do confronto implica que $\lim_{x \to 0} u(x) = 1$ (Figura 2.10).

EXEMPLO 6 Outras aplicações do teorema do confronto

(a) (Ver Figura 2.11a) A partir da definição do sen θ (veja o Apêndice B.3) como $-|\theta| \le \text{sen}\ \theta \le |\theta|$ para qualquer θ, e uma vez que $\lim_{\theta \to 0} (-|\theta|) = \lim_{\theta \to 0} |\theta| = 0$, temos que

$$\lim_{\theta \to 0} \text{sen}\ \theta = 0$$

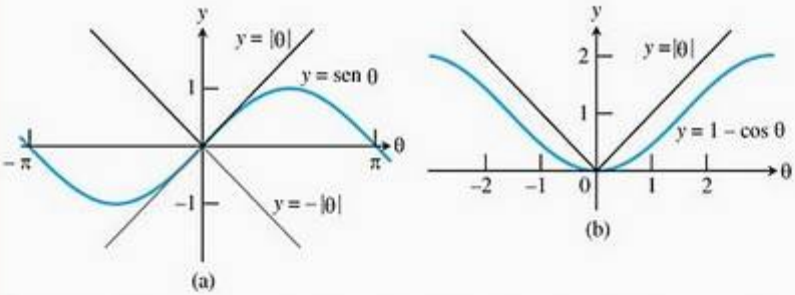


FIGURA 2.11 O teorema do confronto confirma que (a) $\lim_{\theta \to 0} \text{sen}\ \theta = 0$ e (b) $\lim_{\theta \to 0} (1 - \cos\theta) = 0$ (Exemplo 6).

(b) (Veja a Figura 2.11b) A partir da definição de $\cos\theta$, $0 \le 1 - \cos\theta \le |\theta|$ para qualquer θ, temos que $\lim_{\theta \to 0} (1 - \cos\theta) = 0$ ou

$$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$$

(c) Para qualquer função $f(x)$, se $\lim_{x \to c} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x \to c} f(x) = 0$. O argumento: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ e $-|f(x)|$ e $|f(x)|$ têm limite 0 quando $x \to c$.

Outra importante propriedade dos limites é dada pelo teorema seguinte. Uma prova dele será apresentada na próxima seção.

Teorema 5
Se $f(x) \le g(x)$ para todos os valores de x em certo intervalo aberto contendo c, exceto possivelmente no próprio $x = c$, e os limites de f e g existem quando x se aproxima de c, então

$$\lim_{x \to c} f(x) \le \lim_{x \to c} g(x)$$

A asserção resultante da substituição da desigualdade menor ou igual a, $\le$, pela desigualdade estrita, $<$, no Teorema 5, é falsa. A Figura 2.11a mostra que para $\theta \ne 0$, $-|\theta| < \text{sen}\ \theta < |\theta|$, mas no limite, conforme $\theta \to 0$, a igualdade se aplica.

Exercícios 2.2

Cálculo de limites

Calcule os limites nos exercícios 1–18.

1. $\lim_{x\to -7} (2x+5)$
2. $\lim_{x\to 12} (10-3x)$
3. $\lim_{x\to 2} (-x^2+5x-2)$
4. $\lim_{x\to -2} (x^3-2x^2+4x+8)$
5. $\lim_{t\to 6} 8(t-5)(t-7)$
6. $\lim_{s\to 2/3} 3s(2s-1)$
7. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x+6}$
8. $\lim_{x\to 5} \dfrac{4}{x-7}$
9. $\lim_{y\to -5} \dfrac{y^2}{5-y}$
10. $\lim_{y\to 2} \dfrac{y+2}{y^2+5y+6}$
11. $\lim_{x\to -1} 3(2x-1)^2$
12. $\lim_{x\to -4} (x+3)^{1.984}$
13. $\lim_{y\to -3} (5-y)^{4/3}$
14. $\lim_{z\to 0} (2z-8)^{1/3}$
15. $\lim_{h\to 0} \dfrac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$
16. $\lim_{h\to 0} \dfrac{5}{\sqrt{5h+4}+2}$
17. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{3h+1}-1}{h}$
18. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{5h+4}-2}{h}$

Calcule os limites nos exercícios 19–36.

19. $\lim_{x\to 5} \dfrac{x-5}{x^2-25}$
20. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2+4x+3}$
21. $\lim_{x\to -5} \dfrac{x^2+3x-10}{x+5}$
22. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{x-2}$
23. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^2+t-2}{t^2-1}$
24. $\lim_{t\to -1} \dfrac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$
25. $\lim_{x\to -2} \dfrac{-2x-4}{x^3+2x^2}$
26. $\lim_{y\to 0} \dfrac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$
27. $\lim_{u\to 1} \dfrac{u^4-1}{u^3-1}$
28. $\lim_{v\to 2} \dfrac{v^3-8}{v^4-16}$
29. $\lim_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$
30. $\lim_{x\to 4} \dfrac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$
31. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$
32. $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$
33. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}$
34. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$
35. $\lim_{x\to -3} \dfrac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}$
36. $\lim_{x\to 4} \dfrac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}}$

Usando as regras do limite

37. Suponha que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = -5$. Especifique as regras do Teorema 1 que são usadas para efetuar os passos (a), (b) e (c) no cálculo seguinte.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2f(x)-g(x)}{(f(x)+7)^{2/3}} = \frac{\lim_{x\to 0}(2f(x)-g(x))}{\lim_{x\to 0}(f(x)+7)^{2/3}} \quad \text{(a)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0} 2f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim_{x\to 0}(f(x)+7)\right)^{2/3}} \quad \text{(b)}$$

$$= \frac{2\lim_{x\to 0} f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} 7\right)^{2/3}} \quad \text{(c)}$$

$$= \frac{(2)(1)-(-5)}{(1+7)^{2/3}} = \frac{7}{4}$$

38. Sejam $\lim_{x\to 1} h(x) = 5$, $\lim_{x\to 1} p(x) = 1$ e $\lim_{x\to 1} r(x) = -2$. Especifique as regras do Teorema 1 que são usadas para efetuar os passos (a), (b) e (c) no cálculo seguinte.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))} = \frac{\lim_{x\to 1}\sqrt{5h(x)}}{\lim_{x\to 1}\left(p(x)(4-r(x))\right)} \quad \text{(a)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 1} 5h(x)}}{\left(\lim_{x\to 1} p(x)\right)\left(\lim_{x\to 1}(4-r(x))\right)} \quad \text{(b)}$$

$$= \frac{\sqrt{5\lim_{x\to 1} h(x)}}{\left(\lim_{x\to 1} p(x)\right)\left(\lim_{x\to 1} 4 - \lim_{x\to 1} r(x)\right)} \quad \text{(c)}$$

$$= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)} = \frac{5}{2}$$

39. Suponha $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ e $\lim_{x\to c} g(x) = -2$. Determine:

(a) $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$
(b) $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$
(c) $\lim_{x\to c} (f(x)+3g(x))$
(d) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{f(x)-g(x)}$

40. Suponha $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 4} g(x) = -3$. Determine:

(a) $\lim_{x\to 4} (g(x)+3)$
(b) $\lim_{x\to 4} xf(x)$
(c) $\lim_{x\to 4} (g(x))^2$
(d) $\lim_{x\to 4} \dfrac{g(x)}{f(x)-1}$

41. Suponha $\lim_{x\to b} f(x) = 7$ e $\lim_{x\to b} g(x) = -3$. Determine:

(a) $\lim_{x\to b} (f(x)+g(x))$
(b) $\lim_{x\to b} f(x)\cdot g(x)$

(c) $\lim_{x \to b} 4g(x)$ (d) $\lim_{x \to b} f(x)/g(x)$

42. Suponha $\lim_{x \to -2} p(x) = 4$, $\lim_{x \to -2} r(x) = 0$ e $\lim_{x \to -2} s(x) = -3$. Determine:

(a) $\lim_{x \to -2} (p(x) + r(x) + s(x))$

(b) $\lim_{x \to -2} p(x) \cdot r(x) \cdot s(x)$

(c) $\lim_{x \to -2} (-4p(x) + 5r(x))/s(x)$

Limites de taxas médias de variação

Por causa de sua conexão com retas secantes, tangentes e taxas de variação instantâneas, os limites da forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ocorrem freqüentemente em cálculo. Nos exercícios 43–48, calcule o limite para x e função f dados.

43. $f(x) = x^2, x = 1$

44. $f(x) = x^2, x = -2$

45. $f(x) = 3x - 4, x = 2$

46. $f(x) = 1/x, \ x = -2$

47. $f(x) = \sqrt{x}, \ \ x = 7$

48. $f(x) = \sqrt{3x+1}, \ \ x = 0$

Usando o teorema do confronto

49. Se $\sqrt{5 - 2x^2} \le f(x) \le \sqrt{5 - x^2}$ para $-1 \le x \le 1$, determine $\lim_{x \to 0} f(x)$.

50. Se $2 - x^2 \le g(x) \le 2 \cos x$ para todos os valores de x, determine $\lim_{x \to 0} g(x)$.

51. (a) Pode-se demonstrar que as desigualdades

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \operatorname{sen} x}{2 - 2\cos x} < 1$$

valem para todos os valores de x próximos de zero. O que isso diz a você a respeito do seguinte limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{2 - 2\cos x}?$$

Justifique sua resposta.

(b) Represente graficamente

T $y = 1 - (x^2/6)$, $y = (x \operatorname{sen} x)/(2 - 2\cos x)$ e $y = 1$ juntos para $-2 \le x \le 2$. Faça comentários sobre o comportamento do gráfico quando $x \to 0$.

52. (a) Suponha que as desigualdades

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

valham para todos os valores de x próximos de zero. (Elas valem, como você verá na Seção 11.9, Volume II.) O que isso diz a você a respeito do seguinte limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}?$$

Justifique sua resposta.

(b) Represente graficamente as equações $y = (1/2) - (x^2/24)$, $y = (1 - \cos x)/x^2$ e $y = 1/2$ juntos para $-2 \le x \le 2$. Faça comentários sobre o comportamento do gráfico quando $x \to 0$.

Teoria e exemplos

53. Se $x^4 \le f(x) \le x$ para x^2 em $[-1, 1]$ e $x^2 \le f(x) \le x^4$ para $x < -1$ e $x > 1$, em quais pontos c você determina automaticamente $\lim_{x \to c} f(x)$? O que você pode dizer sobre o valor do limite nesses pontos?

54. Suponha que $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para qualquer $x \ne 2$ e suponha que

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} h(x) = -5$$

Podemos concluir alguma coisa sobre os valores de f, g e h em $x = 2$? Seria possível $f(2) = 0$? Seria possível $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$? Justifique suas respostas.

55. Se $\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$, determine $\lim_{x \to 4} f(x)$.

56. Se $\lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule:

(a) $\lim_{x \to -2} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{x}$

57. (a) Se $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$, determine $\lim_{x \to 2} f(x)$.

(b) Se $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 4$, determine $\lim_{x \to 2} f(x)$.

58. Se $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, determine:

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$

59. (a) Represente graficamente $g(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ para estimar $\lim_{x \to 0} g(x)$, ampliando na origem se necessário.

T

(b) Confirme sua estimativa com uma prova.

60. (a) Represente graficamente $h(x) = x^2 \cos(1/x^3)$ para estimar $\lim_{x \to 0} h(x)$, ampliando na origem se necessário.

T

(b) Confirme sua estimativa com uma prova.

2.3 Definição precisa de limite

Agora que já conhecemos um pouco mais o conceito de limite, trabalhando intuitivamente com a definição informal, vamos nos concentrar na sua definição precisa. Vamos substituir expressões vagas, como "fica arbitrariamente próximo de", por condições específicas que podem ser aplicadas a qualquer exemplo. Com uma definição precisa, conseguiremos provar conclusivamente as propriedades dos limites apresentadas na seção anterior; além disso, poderemos estabelecer outros limites específicos importantes para o estudo de cálculo.

Para mostrar que o limite de $f(x)$ iguala-se ao número L quando $x \to x_0$, é preciso mostrar que a distância entre $f(x)$ e L pode ser "tão pequeno quanto quisermos" se x for mantido "suficientemente próximo" de x_0. Vejamos o que isso exige, se especificarmos o tamanho da distância entre $f(x)$ e L.

EXEMPLO 1 Função linear

Considere a função $y = 2x - 1$ próxima de $x_0 = 4$. Intuitivamente, fica claro que y está próximo de 7 quando x está próximo de 4, de maneira que $\lim_{x\to 4}(2x - 1) = 7$. No entanto, quão próximo de $x_0 = 4$ deve estar x para que $y = 2x - 1$ difira de 7 por, digamos, menos que 2 unidades?

SOLUÇÃO Pergunta-se: para quais valores de x é $|y - 7| < 2$? Para encontrarmos a resposta, primeiro expressamos $|y - 7|$ em termos de x:

$$|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|$$

A questão então se torna: que valores de x satisfazem a desigualdade $|2x - 8| < 2$? Para descobrirmos isso, resolvemos a inequação:

$$\begin{aligned} |2x - 8| &< 2 \\ -2 < 2x - 8 &< 2 \\ 6 < 2x &< 10 \\ 3 < x &< 5 \\ -1 < x - 4 &< 1 \end{aligned}$$

Ao mantermos x variando 1 unidade em torno de $x_0 = 4$, manteremos y variando 2 unidades em torno de $y_0 = 7$ (Figura 2.12).

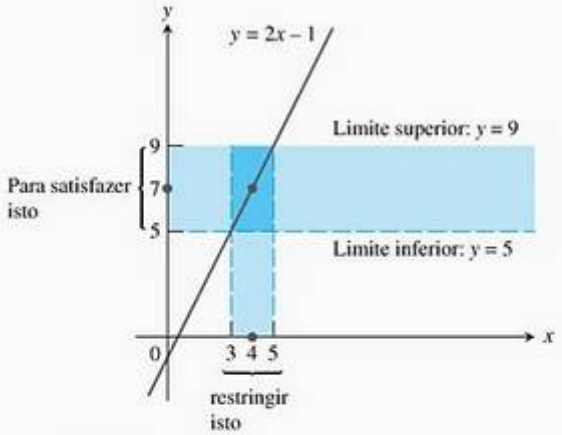


FIGURA 2.12 Ao mantermos x variando 1 unidade em torno de $x_0 = 4$, manteremos y variando 2 unidades em torno de $y_0 = 7$ (Exemplo 1).

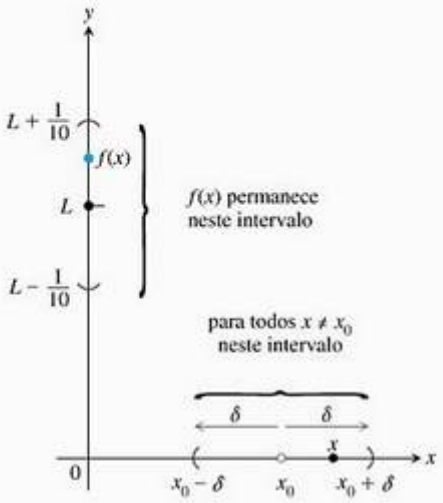


FIGURA 2.13 Como deveríamos definir $\delta > 0$ de modo que, se mantivéssemos x dentro do intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x)$ ficaria dentro do intervalo $\left(L - \frac{1}{10}, L + \frac{1}{10}\right)$?

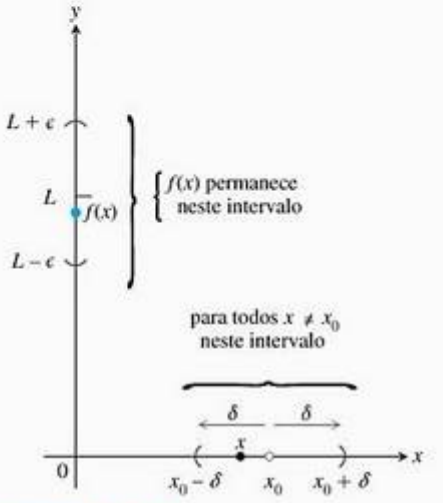


FIGURA 2.14 Relação entre δ e ϵ na definição de limite.

No exemplo anterior, determinamos quão próximo a um valor específico x_0 deve estar x para garantir que os valores $f(x)$ de certa função fiquem em dado intervalo em torno do valor-limite L. Para mostrarmos que o limite de $f(x)$ com $x \to x_0$ é realmente igual a L, precisamos provar que a distância entre $f(x)$ e L pode ficar menor que *qualquer erro prescrito*, não importando quão pequeno ele seja, desde que x seja mantido suficientemente próximo a x_0.

Definição de limite

Suponha que estejamos observando os valores de uma função $f(x)$ conforme x se aproxima de x_0 (sem levar em conta o valor de x_0). Certamente, queremos poder dizer que $f(x)$ fica a um décimo de uma unidade de L desde que x fique a alguma distância δ de x_0 (Figura 2.13). Entretanto, isso em si não é suficiente, porque, conforme x continua tendendo a x_0, o que impede que f oscile muito no intervalo de $L - (1/10)$ a $L + (1/10)$ sem tender a L?

Talvez nos digam que o erro não pode passar de 1/100 ou 1/1.000 ou 1/100.000. Em todos os casos, encontramos um novo intervalo δ em torno de x_0; assim, para satisfazer a nova tolerância de erro, temos de manter x dentro desse intervalo. E, em todos os casos, existe a possibilidade de que $f(x)$ afaste-se de L em algum momento.

As figuras da próxima página ilustram o problema. Pense nisso como uma disputa entre um cético e um estudioso. O cético apresenta desafios de ϵ para provar que o limite não existe ou, mais precisamente, que há margens para dúvidas; e o estudioso responde a cada desafio com um intervalo δ em torno de x_0.

Como interromper essa série aparentemente infinita de desafios e respostas? Provando que, para cada tolerância de erro ϵ que o cético apresente, podemos determinar, calcular ou conjurar uma distância δ correspondente que mantém x "próximo o suficiente" de x_0 para manter $f(x)$ dentro daquela tolerância de L (Figura 2.14). Isso nos leva à definição precisa de limite.

Definição Limite de uma função

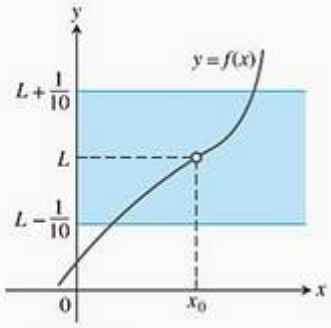
Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0. Dizemos que o **limite de $f(x)$, conforme x se aproxima de x_0, é o número L**, e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

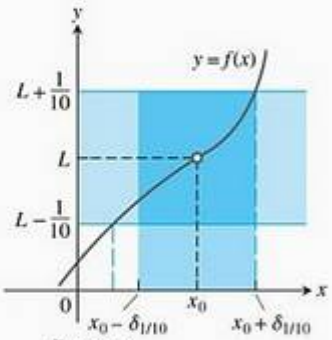
se para cada número $\epsilon > 0$ existir um número correspondente $\delta > 0$, tal que, para todos os valores de x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

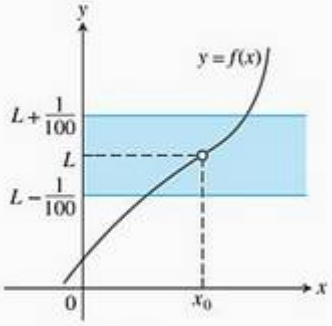
Podemos pensar nessa definição da seguinte maneira: suponha que estejamos fabricando um eixo gerador com uma tolerância estreita. Poderíamos tentar conseguir um diâmetro L, mas, como nada é perfeito, temos de nos satisfazer com uma função de diâmetro $f(x)$ que fique entre $L - \epsilon$ e $L + \epsilon$. O δ é a medida de quão preciso nosso controle de x deve ser para garantir esse grau de precisão no diâmetro do eixo. Observe que, à medida que a tolerância de erro se tornar mais estrita, talvez tenhamos de ajustar δ. Em outras palavras: o valor de δ — quão rígido nosso controle precisa ser — depende do valor de ϵ a tolerância de erro.



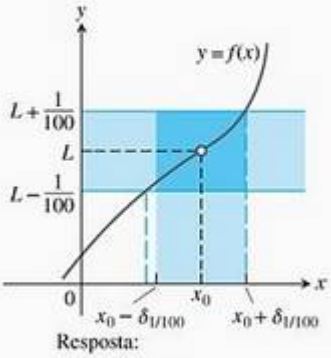
O desafio:
Faça $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{10}$



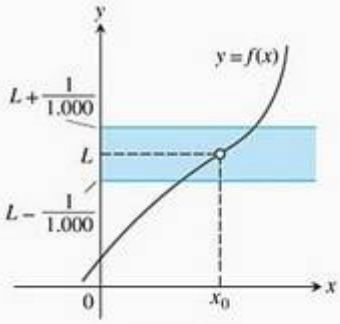
Resposta:
$|x - x_0| < \delta_{1/10}$ (um número)



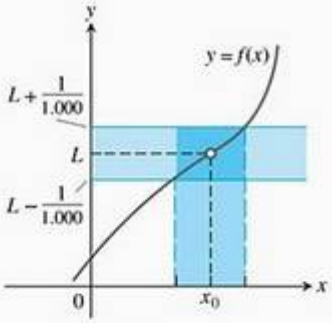
Novo desafio:
Faça $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{100}$



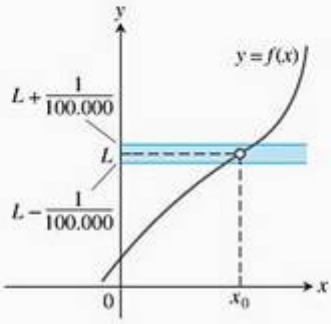
Resposta:
$|x - x_0| < \delta_{1/100}$



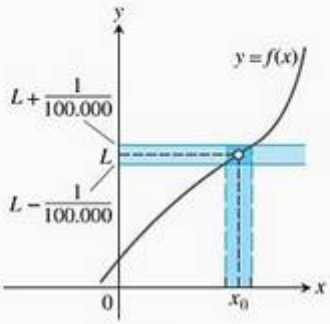
Novo desafio:
$\epsilon = \frac{1}{1.000}$



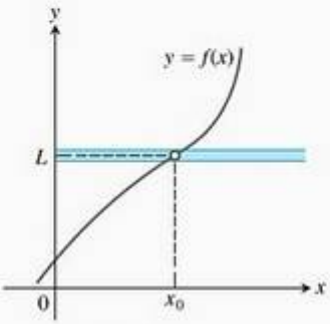
Resposta:
$|x - x_0| < \delta_{1/1.000}$



Novo desafio:
$\epsilon = \frac{1}{100.000}$



Resposta:
$|x - x_0| < \delta_{1/100.000}$



Novo desafio:
$\epsilon = \cdots$

Exemplos: testando a definição

A definição formal de limite não nos diz como determinar o limite de uma função, mas nos permite verificar se um suposto limite está correto. Os exemplos anteriores mostram como a definição pode ser usada para verificar hipóteses de limite referentes a funções específicas. (Os dois primeiros exemplos correspondem a partes dos exemplos 7 e 8 da Seção 2.1.) No entanto, o objetivo real da definição não é fazer cálculos como esses, e sim provar teoremas gerais, de maneira que o cálculo de limites específicos possa ser simplificado.

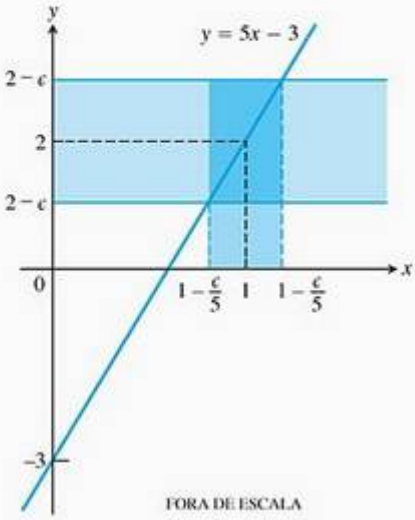


FIGURA 2.15 Se $f(x) = 5x - 3$, então $0 < |x - 1| < \epsilon/5$ garante que $|f(x) - 2| < \epsilon$ (Exemplo 2).

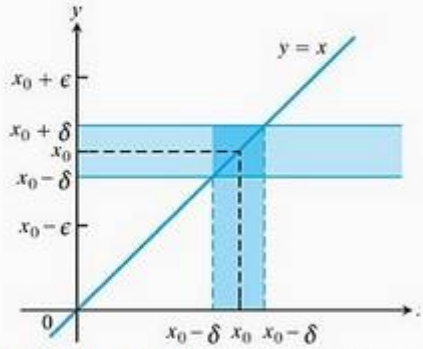


FIGURA 2.16 Para a função $f(x) = x$, determinamos que $0 < |x - x_0| < \delta$ vai garantir $|f(x) - x_0| < \epsilon$ sempre que $\delta \le \epsilon$ (Exemplo 3a).

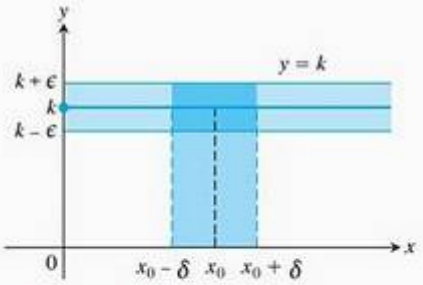


FIGURA 2.17 Para a função $f(x) = k$, determinamos que $|f(x) - k| < \epsilon$ para qualquer δ positivo (Exemplo 3b).

EXEMPLO 2 Testando a definição

Mostre que

$$\lim_{x \to 1} (5x - 3) = 2$$

SOLUÇÃO Seja $x_0 = 1$, $f(x) = 5x - 3$ e $L = 2$ na definição de limite. Para qualquer $\epsilon > 0$, precisamos encontrar um $\delta > 0$ adequado, tal que se $x \neq 1$ e x está a uma distância menor que δ de $x_0 = 1$, isto é, sempre que

$$0 < |x - 1| < \delta$$

é verdade que $f(x)$ está a uma distância menor que ϵ de $L = 2$, de modo que

$$|f(x) - 2| < \epsilon$$

Encontramos δ ao resolveja a inequação ϵ:

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| < \epsilon$$
$$5|x - 1| < \epsilon$$
$$|x - 1| < \epsilon/5$$

Então, podemos tomar $\delta = \epsilon/5$ (Figura 2.15). Se $0 < |x - 1| < \delta = \epsilon/5$, então

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| = 5|x - 1| < 5(\epsilon/5) = \epsilon$$

o que prova que $\lim_{x \to 1} (5x - 3) = 2$.

O valor de $\delta = \epsilon/5$ não é o único que fará $0 < |x - 1| < \delta$ implicar $|5x - 5| < \epsilon$. Qualquer δ positivo menor fará o mesmo. A definição não pede o "melhor" δ positivo, mas apenas um que funcione.

EXEMPLO 3 Limites da identidade e funções constantes

Prove que:

(a) $\lim_{x \to x_0} x = x_0$ **(b)** $\lim_{x \to x_0} k = k$ (k constante).

SOLUÇÃO

(a) Seja $\epsilon > 0$ dado. Precisamos determinar um $\delta > 0$ tal que, para todos os valores de x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ implique que } |x - x_0| < \epsilon$$

A implicação existirá se δ for igual a ϵ ou qualquer número positivo menor (Figura 2.16). Isso prova que $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

(b) Seja $\epsilon > 0$ dado. Precisamos determinar um $\delta > 0$ tal que, para todos os valores de x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ implique que } |k - k| < \epsilon$$

Como $k - k = 0$, podemos usar qualquer número positivo para δ e a implicação permanecerá (Figura 2.17). Isso prova que $\lim_{x \to x_0} k = k$.

Determinando deltas algebricamente para epsilones

Nos exemplos 2 e 3, o intervalo de valores em torno de x_0 para o qual $|f(x) - L|$ era menor que ϵ era simétrico em relação a x_0, e pudemos tomar δ como a metade do comprimento desse intervalo. Quando não há essa simetria, como costuma acontecer, podemos tomar δ como a distância de x_0 ao extremo *mais próximo* do intervalo.

FIGURA 2.18 Um intervalo aberto de raio 3 em torno de $x_0 = 5$ estará dentro do intervalo aberto (2, 10).

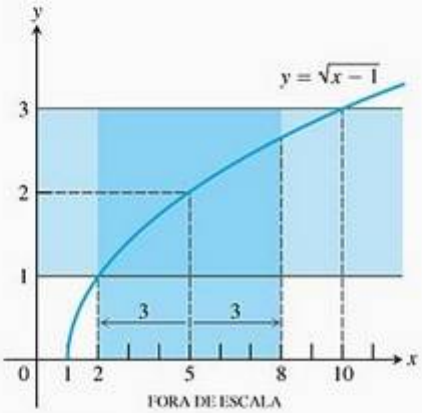


FIGURA 2.19 Função e intervalos no Exemplo 4.

EXEMPLO 4 Determinando delta algebricamente

Para o limite $\lim_{x\to 5} \sqrt{x-1} = 2$, determine um $\delta > 0$ que sirva para $\epsilon = 1$. Ou seja, um $\delta > 0$, tal que, para todo x,

$$0 < |x-5| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x-1} - 2| < 1.$$

SOLUÇÃO Organizamos a busca em duas etapas, como exposto a seguir.

PASSO 1: *Resolva a inequação* $|\sqrt{x-1} - 2| < 1$ *para encontrar um intervalo contendo* $x_0 = 5$ *no qual a desigualdade valha para todo* $x \neq x_0$.

$$\begin{aligned} |\sqrt{x-1} - 2| &< 1 \\ -1 < \sqrt{x-1} - 2 &< 1 \\ 1 < \sqrt{x-1} &< 3 \\ 1 < x - 1 &< 9 \\ 2 < x &< 10 \end{aligned}$$

A desigualdade vale para todo x no intervalo aberto (2, 10), portanto ela vale para todo $x \neq 5$ nesse intervalo (veja a Figura 2.19).

PASSO 2: *Determine um valor de* $\delta > 0$ *para colocar o intervalo centrado* $5 - \delta < x < 5 + \delta$ (centrado em $x_0 = 5$) *dentro do intervalo* (2, 10). A distância de 5 até o extremo mais próximo de (2, 10) é 3 (Figura 2.18). Se tomarmos $\delta = 3$ ou qualquer número positivo menor, então a desigualdade $0 < |x - 5| < \delta$ colocará x automaticamente entre 2 e 10, fazendo $|\sqrt{x-1} - 2| < 1$ (Figura 2.19)

$$0 < |x-5| < 3 \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x-1} - 2| < 1.$$

Como determinar algebricamente um δ para dado f, L, x_0 e $\epsilon > 0$

O processo para determinar um $\delta > 0$, tal que, para todos os valores de x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

pode ser organizado em duas etapas:

1. *Resolva a inequação* $|f(x) - L| < \epsilon$ a fim de determinar um intervalo aberto (a, b) contendo x_0 no qual a inequação valha para todos os $x \neq x_0$.
2. *Determine um valor de* $\delta > 0$ que coloque o intervalo aberto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ centrado em x_0 dentro do intervalo (a, b). A inequação $|f(x) - L| < \epsilon$ terá validade para todos os $x \neq x_0$ nesse intervalo δ.

EXEMPLO 5 Determinando delta algebricamente

Prove que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ se

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

SOLUÇÃO Nossa tarefa é mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que, para todos os valores de x,

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 4| < \epsilon.$$

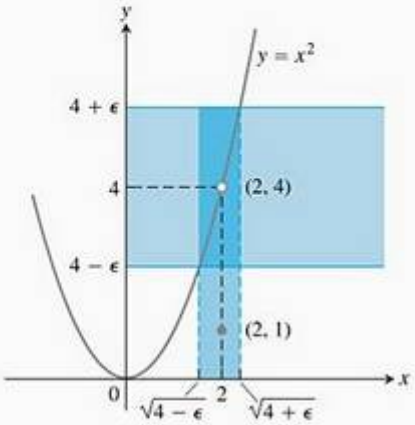


FIGURA 2.20 Um intervalo contendo $x = 2$ de modo que a função do Exemplo 5 satisfaça $|f(x) - 4| < \epsilon$.

1. *Resolva a inequação $|f(x) - 4| < \epsilon$ a fim de determinar um intervalo aberto contendo $x_0 = 2$ no qual a inequação valha para todos os $x \neq x_0$.*

Para $x \neq x_0 = 2$, temos $f(x) = x^2$, e a inequação a resolver é $|x^2 - 4| < \epsilon$:

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &< \epsilon \\ -\epsilon < x^2 - 4 &< \epsilon \\ 4 - \epsilon < x^2 &< 4 + \epsilon \\ \sqrt{4-\epsilon} < |x| &< \sqrt{4+\epsilon} \\ \sqrt{4-\epsilon} < x &< \sqrt{4+\epsilon}. \end{aligned}$$

Pressuponha $\epsilon < 4$; ver adiante.
Um intervalo aberto em torno de $x_0 = 2$ que resolve a inequação.

A inequação $|f(x) - 4| < \epsilon$ vale para todos os $x \neq 2$ dentro do intervalo $(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon})$ (Figura 2.20).

2. *Determine um valor de $\delta > 0$ que coloque o intervalo centrado $(2 - \delta, 2 + \delta)$ dentro do intervalo $(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon})$.*

Imagine que δ seja a distância de $x_0 = 2$ até o extremo mais próximo de $(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon})$. Em outras palavras, imagine que $\delta = \min\left\{2 - \sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon} - 2\right\}$, *o mínimo* (o menor) dos dois números $2 - \sqrt{4-\epsilon}$ e $\sqrt{4+\epsilon} - 2$. Se δ tiver esse ou qualquer outro valor positivo mais baixo, a inequação $0 < |x - 2| < \delta$ vai automaticamente colocar x entre $\sqrt{4-\epsilon}$ e $\sqrt{4+\epsilon}$ tornando $|f(x) - 4| < \epsilon$. Para todos os valores de x,

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \epsilon$$

Isso completa a prova para $\epsilon < 4$.

Por que não havia problemas em pressupor $\epsilon < 4$? Porque, ao determinar um δ tal que, para todos os valores de x, $0 < |x - 2| < \delta$ implicava $|f(x) - 4| < \epsilon < 4$, acabamos determinando um δ que também funciona para qualquer ϵ maior.

Por fim, observe a liberdade que ganhamos ao considerar $\delta = \min\{2 - \sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon} - 2\}$. Não tivemos de perder tempo decidindo qual número era o menor dos dois — se é que havia um menor. Apenas imaginamos que δ representasse o menor e seguimos em frente até finalizar a argumentação.

Usando a definição para provar teoremas

Normalmente, não nos fundamentamos na definição formal de limite para verificar limites específicos, tais como os mencionados nos exemplos anteriores. Em vez disso, recorremos a teoremas gerais sobre limites, em particular aos teoremas da Seção 2.2. A definição é usada para provar esses teoremas (Apêndice A.2). Como exemplo, provaremos a parte 1 do Teorema 1, a regra da soma.

EXEMPLO 6 Provando a regra para o limite de uma soma

Dado que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} g(x) = M$, prove que

$$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

SOLUÇÃO Seja $\epsilon > 0$ dado. Queremos determinar um número positivo δ, tal que, para todos os valores de x,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon.$$

Reagrupando os termos, ficamos com

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\le |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Desigualdade triangular: $|a + b| \le |a| + |b|$

Uma vez que $\lim_{x \to c} f(x) = L$, existe um número $\delta_1 > 0$, tal que, para todos os valores de x,

$$0 < |x - c| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon/2.$$

De modo similar, uma vez que $\lim_{x \to c} g(x) = M$, existe um número $\delta_2 > 0$, tal que, para todos os valores de x,

$$0 < |x - c| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \epsilon/2.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, o menor entre δ_1 e δ_2. Se $0 < |x - c| < \delta$, então $|x - c| < \delta_1$, logo $|f(x) - L| < \epsilon/2$ e $|x - c| < \delta_2$, logo $|g(x) - M| < \epsilon/2$. Portanto

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isso mostra que $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$.

Vamos provar também o Teorema 5 da Seção 2.2.

EXEMPLO 7

Dado que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} g(x) = M$, e que $f(x) \le g(x)$ para todos os valores de x num intervalo aberto contendo c (exceto possivelmente no próprio c, prove que $L \le M$.

SOLUÇÃO Usaremos o método de provar por contradição. Suponha, em vez disso, que $L > M$. Assim, pela propriedade do limite da diferença, vista no Teorema 1,

$$\lim_{x \to c} (g(x) - f(x)) = M - L$$

Logo, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

Como $L - M > 0$ por hipótese, tomemos $\epsilon = L - M$ em particular e teremos um número $\delta > 0$, tal que

$$|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < L - M \text{ sempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

Como $a \le |a|$ para qualquer número a, temos

$$(g(x) - f(x)) - (M - L) < L - M \text{ sempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

o que pode ser simplificado para

$$g(x) < f(x) \text{ sempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

Mas isso contradiz $f(x) \le g(x)$. Logo, a desigualdade $L > M$ só pode ser falsa. Portanto, $L \le M$.

Exercícios 2.3

Centrando intervalos em torno de um ponto

Nos exercícios 1–6, esboce o intervalo (a, b) no eixo x com o ponto x_0 dentro. Em seguida, determine um valor de $\delta > 0$ tal que, para todos os valores de x, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow a < x < b$.

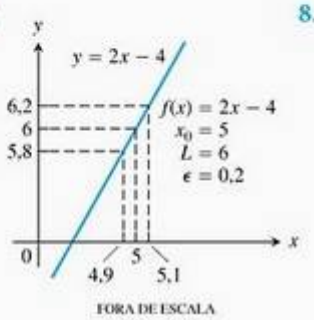
1. $a = 1; \quad b = 7; \quad x_0 = 5$
2. $a = 1; \quad b = 7; \quad x_0 = 2$
3. $a = -7/2; \quad b = -1/2; \quad x_0 = -3$
4. $a = -7/2; \quad b = -1/2; \quad x_0 = -3/2$
5. $a = 4/9; \quad b = 4/7; \quad x_0 = 1/2$
6. $a = 2{,}7591; \quad b = 3{,}2391; \quad x_0 = 3$

Encontrando deltas graficamente

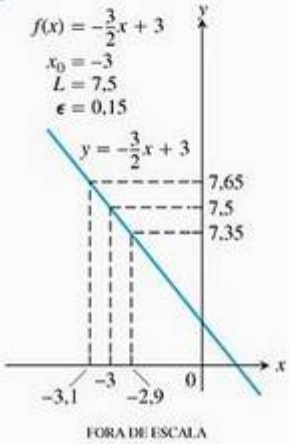
Nos exercícios 7–14, use os gráficos para determinar um $\delta > 0$, tal que, para todo x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

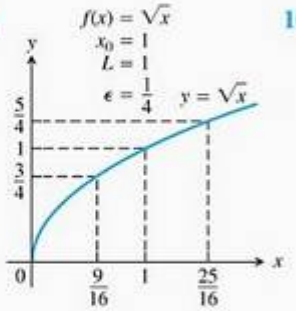
7.



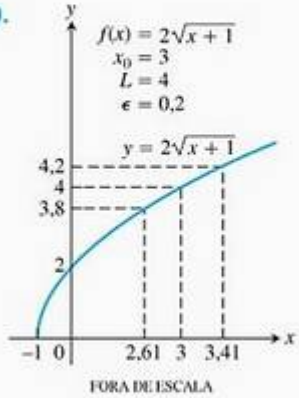
8.



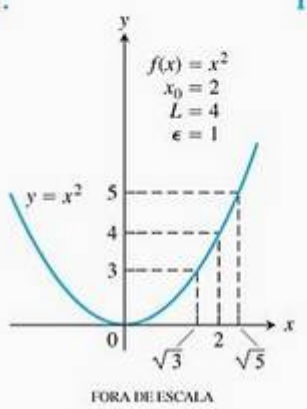
9.



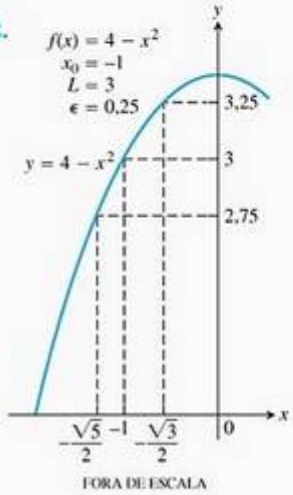
10.



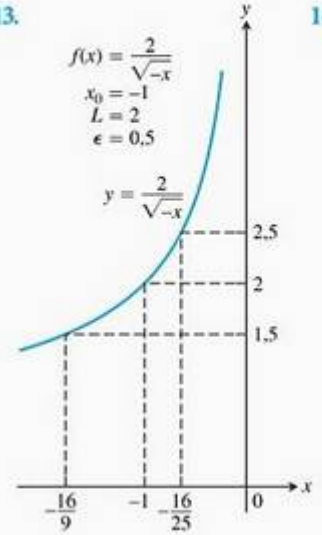
11.



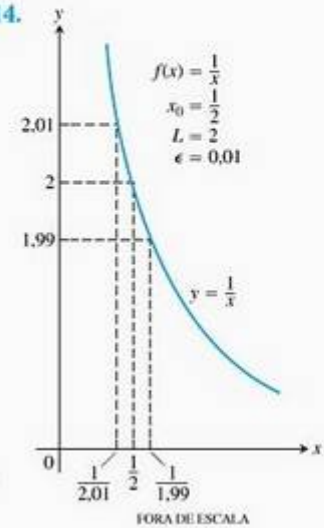
12.



13.



14.



Encontrando deltas algebricamente

Cada um dos exercícios 15–30 dá uma função $f(x)$ e os números L, x_0 e $\varepsilon > 0$. Em cada caso, encontre um intervalo aberto em torno de x_0 no qual a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ valha. Dê então um valor para $\delta > 0$ tal que para todo x satisfazendo $0 < |x - x_0| < \delta$ a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ seja verdadeira.

15. $f(x) = x + 1, \quad L = 5, \quad x_0 = 4, \quad \varepsilon = 0{,}01$
16. $f(x) = 2x - 2, \quad L = -6, \quad x_0 = -2, \quad \varepsilon = 0{,}02$
17. $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad L = 1, \quad x_0 = 0, \quad \varepsilon = 0{,}1$
18. $f(x) = \sqrt{x}, \quad L = 1/2, \quad x_0 = 1/4, \quad \varepsilon = 0{,}1$
19. $f(x) = \sqrt{19 - x}, \quad L = 3, \quad x_0 = 10, \quad \varepsilon = 1$
20. $f(x) = \sqrt{x - 7}, \quad L = 4, \quad x_0 = 23, \quad \varepsilon = 1$

21. $f(x) = 1/x, \quad L = 1/4, \quad x_0 = 4, \quad \epsilon = 0{,}05$

22. $f(x) = x^2, \quad L = 3, \quad x_0 = \sqrt{3}, \quad \epsilon = 0{,}1$

23. $f(x) = x^2, \quad L = 4, \quad x_0 = -2, \quad \epsilon = 0{,}5$

24. $f(x) = 1/x, \quad L = -1, \quad x_0 = -1, \quad \epsilon = 0{,}1$

25. $f(x) = x^2 - 5, \quad L = 11, \quad x_0 = 4, \quad \epsilon = 1$

26. $f(x) = 120/x, \quad L = 5, \quad x_0 = 24, \quad \epsilon = 1$

27. $f(x) = mx, \quad m > 0, \quad L = 2m, \quad x_0 = 2, \quad \epsilon = 0{,}03$

28. $f(x) = mx, \quad m > 0, \quad L = 3m, \quad x_0 = 3, \quad \epsilon = c > 0$

29. $f(x) = mx + b, \quad m > 0, \quad L = (m/2) + b,$
$x_0 = 1/2, \quad \varepsilon = c > 0$

30. $f(x) = mx + b, \quad m > 0, \quad L = m + b, \quad x_0 = 1,$
$\epsilon = 0{,}05$

Mais sobre limites formais

Cada um dos exercícios 31–36 dá uma função $f(x)$, um ponto x_0 e um número positivo ϵ. Determine $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Depois, determine um número $\delta > 0$ tal que para todos os valores de x

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

31. $f(x) = 3 - 2x, \quad x_0 = 3, \quad \epsilon = 0{,}02$

32. $f(x) = -3x - 2, \quad x_0 = -1, \quad \epsilon = 0{,}03$

33. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad x_0 = 2, \quad \epsilon = 0{,}05$

34. $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x + 5}, \quad x_0 = -5, \quad \epsilon = 0{,}05$

35. $f(x) = \sqrt{1 - 5x}, \quad x_0 = -3, \quad \epsilon = 0{,}5$

36. $f(x) = 4/x, \quad x_0 = 2, \quad \epsilon = 0{,}4$

Prove as afirmações sobre limites feitas nos exercícios 37–50.

37. $\lim_{x \to 4} (9 - x) = 5$

38. $\lim_{x \to 3} (3x - 7) = 2$

39. $\lim_{x \to 9} \sqrt{x - 5} = 2$

40. $\lim_{x \to 0} \sqrt{4 - x} = 2$

41. $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ se $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

42. $\lim_{x \to -2} f(x) = 4$ se $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}$

43. $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x} = 1$

44. $\lim_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{3}$

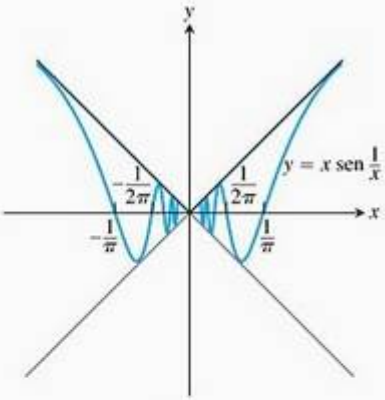
45. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = -6$

46. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

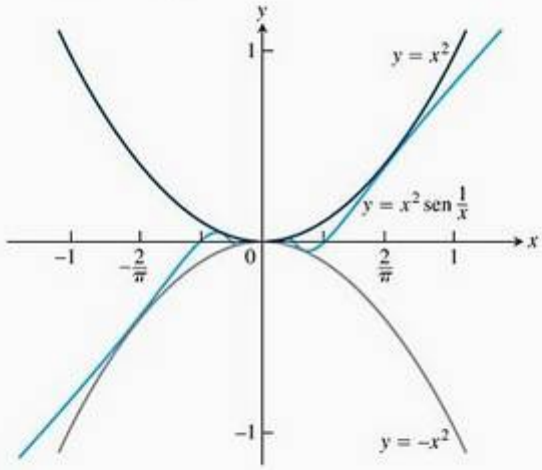
47. $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ se $f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & x < 1 \\ 6x - 4, & x \geq 1 \end{cases}$

48. $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ se $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ x/2, & x \geq 0 \end{cases}$

49. $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$



50. $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$



Teoria e exemplos

51. Defina o que significa dizer que $\lim_{x \to 0} g(x) = k$.

52. Prove que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{h \to 0} f(h + c) = L$.

53. **Uma afirmação incorreta sobre limites** Mostre com um exemplo que a seguinte afirmação está incorreta:

O número L é o limite de $f(x)$ à medida que x se aproxima de x_0, se $f(x)$ se aproxima de L quando x se aproxima de x_0.

Explique por que a função do seu exemplo não tem o valor dado de L como um limite quando $x \to x_0$.

54. Outra afirmação incorreta sobre limites Mostre com um exemplo que a seguinte afirmação está incorreta:

O número L é o limite de $f(x)$ à medida que x se aproxima de x_0, se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um valor de x para o qual $|f(x) - L| < \epsilon$.

Explique por que a função do seu exemplo não tem o valor dado de L como um limite quando $x \to x_0$.

55. Torneando cilindros para motores Antes de fabricar cilindros com uma área da seção transversal de 9 pol^2 para um certo motor você precisa saber qual desvio pode aceitar em relação ao diâmetro do cilindro ideal, que é $x_0 = 3{,}385$ pol, e ter ainda a área diferindo de no máximo 0,01 pol^2 das 9 pol^2 necessárias. Para descobrir isso, você faz: $A = \pi(x/2)^2$ e procura o intervalo no qual tem de manter x para fazer $|A - 9| \le 0{,}01$. Qual intervalo você encontra?

56. Fabricando resistores elétricos A lei de Ohm para circuitos elétricos, como na ilustração da figura abaixo, diz que $V = RI$. Nessa equação, V é uma voltagem constante, I é a corrente em amperes e R é a resistência em ohms. Sua empresa recebeu um pedido para fornecer resistores para um circuito no qual V será 120 V, sendo $I = 5 \pm 0{,}1$ A. Em qual intervalo R deve ficar para que I esteja a 0,1 A do valor alvo $I_0 = 5$ A?

Em que situação um número L não é o limite de $f(x)$ quando $x \to x_0$?

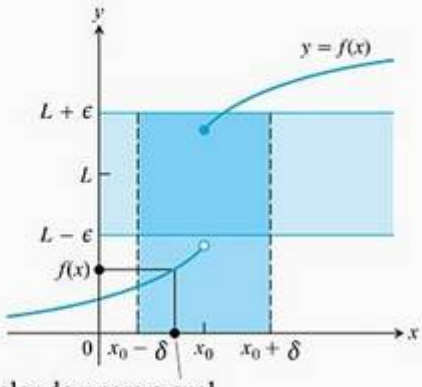
Podemos provar que $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq L$ fornecendo um $\epsilon > 0$ tal que nenhum $\delta > 0$ possível satisfaça a condição

Para todos os valores de x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Conseguimos isso para nosso candidato ϵ mostrando que, para cada $\delta > 0$, existe um valor de x tal que

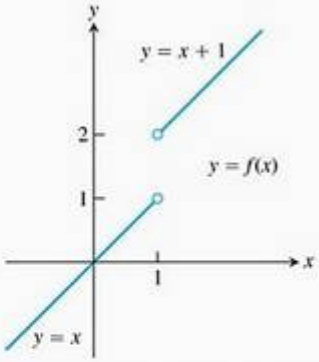
$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - L| \ge \epsilon$$



um valor de x para o qual

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - L| \ge \epsilon.$$

57. Seja $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$



(a) Seja $\epsilon = 1/2$. Mostre que nenhum $\delta > 0$ possível satisfaz a seguinte condição:

Para todos os valores de x,

$$0 < |x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 2| < 1/2.$$

Isto é, para cada $\delta > 0$ mostre que existe um valor x tal que

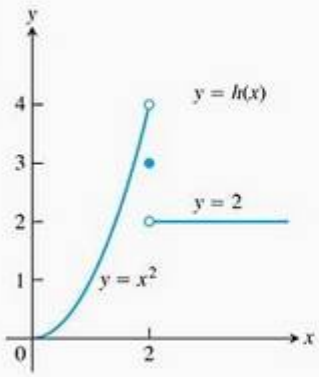
$$0 < |x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 2| \ge 1/2.$$

Isso mostrará que $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 2$.

(b) Mostre que $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 1$.

(c) Mostre que $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 1{,}5$.

58. Seja $h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$



Mostre que

(a) $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 4$

(b) $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 3$

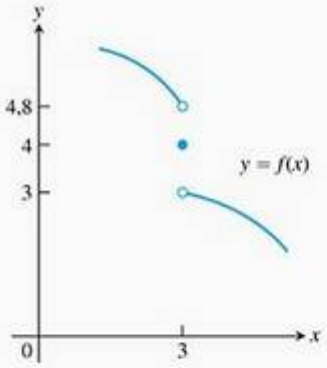
(c) $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 2$

59. Para a função representada no gráfico a seguir, explique por quê

(a) $\lim_{x \to 3} f(x) \neq 4$

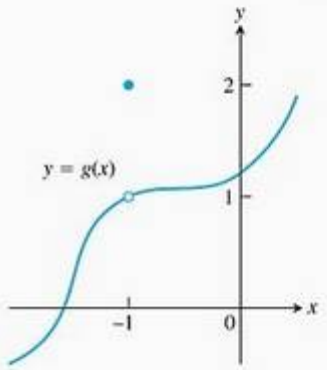
(b) $\lim_{x \to 3} f(x) \neq 4{,}8$

(c) $\lim_{x \to 3} f(x) \neq 3$



60. (a) Para a função representada no gráfico a seguir, mostre que $\lim_{x \to -1} g(x) \neq 2$.

(b) Parece que $\lim_{x \to -1} g(x)$ existe? Em caso positivo, qual o valor do limite? Em caso negativo, por que não?



USANDO O COMPUTADOR

Nos exercícios 61–66, você aprofundará a exploração encontrando deltas graficamente. Use o SAC para executar as seguintes etapas:

(a) Trace a função $y = f(x)$ próximo ao ponto x_0.

(b) Descubra o valor do limite L e então o avalie simbolicamente para ver se está correto.

(c) Usando o valor $\epsilon = 0{,}2$, trace as retas $y_1 = L - \epsilon$ e $y^2 = L + \epsilon$ juntamente com a função f perto de x_0.

(d) A partir de seu gráfico na parte (c), estime um $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Teste sua estimativa traçando f, y_1 e y_2 no intervalo $0 < |x - x_0| < \delta$. Para sua janela de inspeção, use $x_0 - 2\delta \leq x \leq x_0 + 2\delta$ e $L - 2\epsilon \leq y \leq L + 2\epsilon$. Se nenhum valor da função estiver fora do intervalo $[L - \epsilon, L + \epsilon]$, então o valor de δ escolhido foi muito alto. Tente novamente com um valor mais baixo.

(e) Repita os itens (c) e (d) sucessivamente para $\epsilon = 0{,}1$; $0{,}05$; e $0{,}001$.

61. $f(x) = \dfrac{x^4 - 81}{x - 3}, \quad x_0 = 3$

62. $f(x) = \dfrac{5x^3 - 9x^2}{2x^5 - 3x^2}, \quad x_0 = 0$

63. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{3x}, \quad x_0 = 0$

64. $f(x) = \dfrac{x(1 - \cos x)}{x - \operatorname{sen} x}, \quad x_0 = 0$

65. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}, \quad x_0 = 1$

66. $f(x) = \dfrac{3x^2 - (7x + 1)\sqrt{x} + 5}{x - 1}, \quad x_0 = 1$

2.4 Limites laterais e limites envolvendo o infinito

Nesta seção, estenderemos o conceito de limite para *limites laterais*, isto é, os limites que existem quando x se aproxima do número x_0 pela esquerda (onde $x < x_0$) ou pela direita ($x > x_0$) apenas. Também analisaremos os gráficos de certas funções racionais, bem como outras funções que apresentam comportamento de limite à medida que $x \to \pm\infty$.

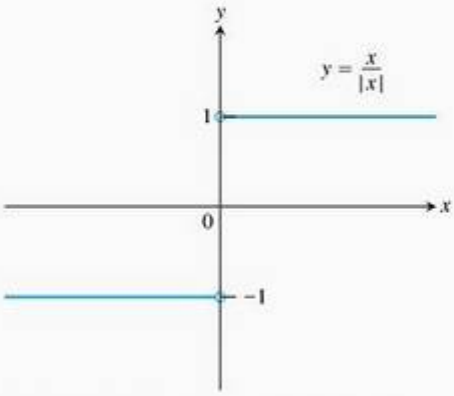


FIGURA 2.21 Limites à direita e à esquerda diferentes na origem.

Limites laterais

Para ter um limite L quando x se aproxima de c, uma função f deve ser definida em *ambos os lados* de c e seus valores $f(x)$ devem se aproximar de L quando x se aproxima de c de cada lado. Por isso, limites comuns são **bilaterais**.

Se f não tem um limite bilateral em c, ainda pode ter um limite lateral, ou seja, um limite cuja aproximação ocorre apenas de um lado. Se a aproximação for feita pelo lado direito, o limite será um **limite à direita**. Se for pelo lado esquerdo, será um **limite à esquerda**.

A função $f(x) = x/|x|$ (Figura 2.21) tem o limite 1 quando x se aproxima de 0 pela direita e limite −1 quando x se aproxima de 0 pela esquerda. Como os valores desses limites laterais não são iguais, não existe um único número do qual $f(x)$ se aproxime quando x se aproxima de 0. Assim, $f(x)$ não tem um limite (bilateral) em 0.

Intuitivamente, se $f(x)$ é definida em um intervalo (c, b), onde $c < b$, e se $f(x)$ fica arbitrariamente próxima de L conforme x se aproxima de c nesse intervalo, então f tem **limite lateral à direita** L em c. Escrevemos

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

O símbolo "$x \to c^+$" significa que consideramos apenas valores de x maiores que c.

De modo similar, se $f(x)$ é definida em um intervalo (a, c), onde $a < c$ e se $f(x)$ fica arbitrariamente próxima de M, conforme x se aproxima de c nesse intervalo, então f tem **limite lateral à esquerda** M em c. Escrevemos

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = M$$

O símbolo "$x \to c^-$" significa que consideramos apenas valores de x menores que c.

Essas definições informais são ilustradas na Figura 2.22. Para a função $f(x) = x/|x|$ na Figura 2.21, temos

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

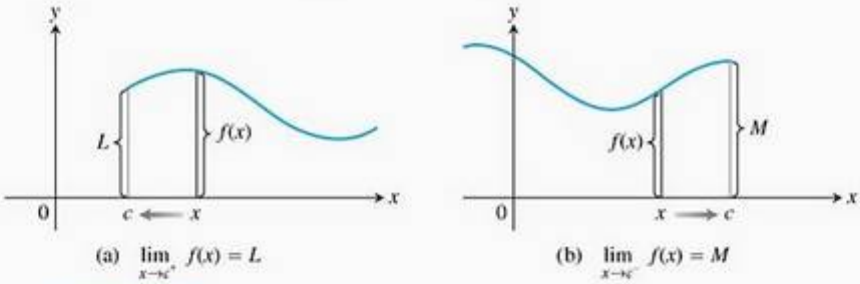


FIGURA 2.22 **(a)** Limite à direita conforme x se aproxima de c. **(b)** Limite à esquerda conforme x se aproxima de c.

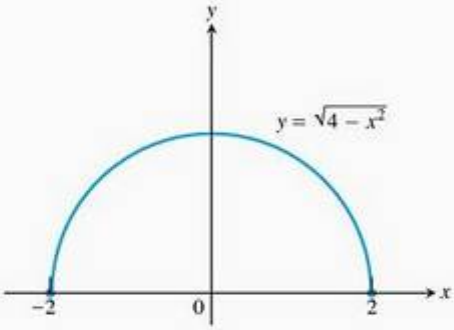


FIGURA 2.23 $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$ e $\lim_{x \to 2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$ (Exemplo 1).

EXEMPLO 1 Limites laterais para um semicírculo

O domínio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é $[-2, 2]$; seu gráfico é um semicírculo na Figura 2.23. Temos

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$$

A função não tem um limite pela esquerda em $x = -2$ ou pela direita em $x = 2$. A função não tem limites bilaterais em −2 ou 2.

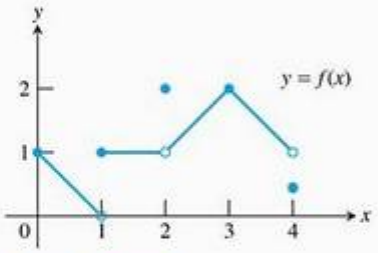


FIGURA 2.24 Gráfico da função do Exemplo 2.

Limites laterais têm todas as propriedades enumeradas no Teorema 1 da Seção 2.2. O limite lateral à direita da soma de duas funções é a soma de seus limites laterais à direita e assim por diante. Os teoremas para limites de funções polinomiais e racionais são válidos para limites laterais, assim como o teorema do confronto e o Teorema 5. Limites laterais estão relacionados a limites da seguinte maneira:

Teorema 6
Uma função $f(x)$ terá um limite quando x se aproximar de c se e somente se tiver um limite lateral à direita e um à esquerda, e os dois limites laterais forem iguais:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

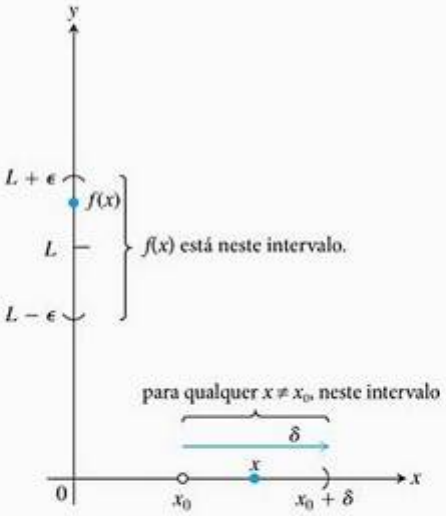


FIGURA 2.25 Intervalos associados com a definição de limite à direita.

EXEMPLO 2 Limites da função no gráfico da Figura 2.24

Em $x = 0$: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existem. A função não é definida à esquerda de $x = 0$.

Em $x = 1$: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ ainda que $f(1) = 1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ não existe. Os limites à direita e à esquerda não são iguais.

Em $x = 2$: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ ainda que $f(2) = 2$

Em $x = 3$: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$

Em $x = 4$: $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$ ainda que $f(4) \neq 1$

$\lim_{x\to 4^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 4} f(x)$ não existem. A função não é definida à direita de $x = 4$.

Em qualquer outro ponto c em $[0, 4]$, $f(x)$ tem limite $f(c)$.

Definições precisas de limites laterais

A definição formal de limite dada na Seção 2.3 é pontualmente modificada para limites laterais.

Definições Limites à direita e à esquerda
Dizemos que $f(x)$ tem um **limite à direita L em x_0** e escrevemos

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \qquad \text{(Veja a Figura 2.25.)}$$

se para qualquer número $\epsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$, de maneira que, para todos os valores de x,

$$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Dizemos que f tem um **limite à esquerda L em x_0** e escrevemos

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \qquad \text{(Veja a Figura 2.26.)}$$

se para qualquer número $\epsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$, de maneira que, para todos os valores de x,

$$x_0 - \delta < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

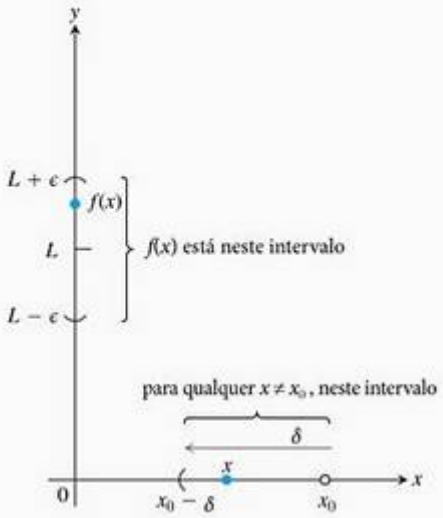


FIGURA 2.26 Intervalos associados com a definição de limite à esquerda.

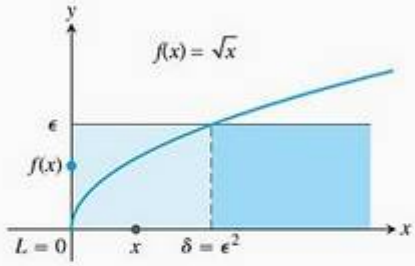


FIGURA 2.27 $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ no Exemplo 3.

EXEMPLO 3 Aplicando a definição para encontrar delta

Prove que

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

SOLUÇÃO Digamos que $\epsilon > 0$ seja dado. Aqui $x_0 = 0$ e $L = 0$, logo, queremos descobrir um $\delta > 0$, de maneira que, para todos os valores de x,

$$0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\sqrt{x} - 0\right| < \epsilon$$

ou

$$0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} < \epsilon$$

Se elevarmos ao quadrado de ambos os lados dessa última desigualdade, teremos

$$x < \epsilon^2 \quad \text{se} \quad 0 < x < \delta$$

Se escolhermos $\delta = \epsilon^2$, teremos

$$0 < x < \delta = \epsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} < \epsilon$$

ou

$$0 < x < \epsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\sqrt{x} - 0\right| < \epsilon$$

De acordo com a definição, isso mostra que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ (Figura 2.27).

As funções examinadas até aqui tiveram um tipo de limite em cada ponto de interesse. Em geral, este não é o caso.

EXEMPLO 4 Uma função que oscila demais

Mostre que $y = \text{sen}\,(1/x)$ não tem limite lateral quando x se aproxima de zero de ambos os lados (Figura 2.28).

SOLUÇÃO Conforme x se aproxima de zero, seu recíproco, $1/x$, cresce sem limitação e os valores de sen $(1/x)$ repetem-se ciclicamente de -1 a 1. Não há nenhum número L do qual os valores da função vão ficando cada vez mais próximos conforme x tende a zero. Isso é válido mesmo quando restringimos x a valores positivos ou negativos. A função não tem limite à direita nem à esquerda em $x = 0$.

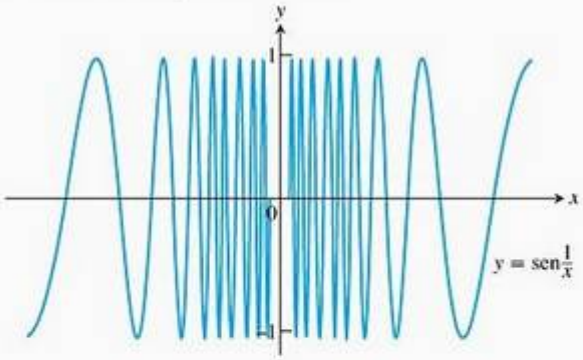


FIGURA 2.28 A função $y = \text{sen}\,(1/x)$ não apresenta limite à direita nem à esquerda para x aproximando-se de zero (Exemplo 4).

Limites envolvendo (sen θ)/θ

Um fato importante sobre (sen θ)/θ é que, medido em radianos, seu limite quando $\theta \to 0$ é 1. Podemos ver isso na Figura 2.29 e confirmar algebricamente usando o teorema do confronto. Você verá a importância desse limite na Seção 3.4, em que taxas instantâneas de variação das funções trigonométricas serão estudadas.

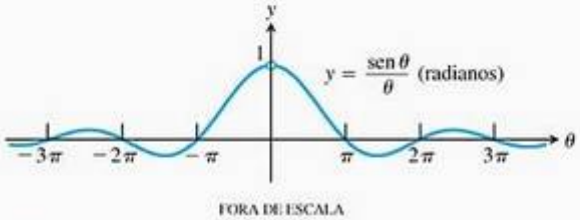


FIGURA 2.29 O gráfico de $f(\theta) = (\text{sen}\,\theta)/\theta$.

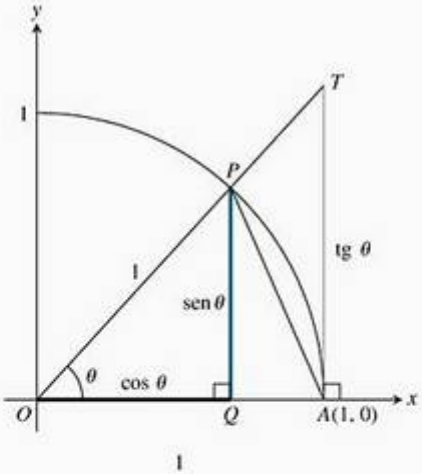


FIGURA 2.30 Figura para a prova do Teorema 7. TA/AO = tg θ, mas AO = 1, então TA = tg θ

Teorema 7

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1 \quad (\theta \text{ em radianos}) \tag{1}$$

PROVA O objetivo é mostrar que os limites à direita e à esquerda são iguais a 1. Então saberemos que o limite bilateral também é 1.

Para mostrar que o limite à direita é 1, começamos com valores positivos de θ menores que $\pi/2$ (Figura 2.30). Observe que

$$\text{Área } \Delta OAP < \text{área do setor } OAP < \text{área } \Delta OAT.$$

Podemos expressar essas áreas em termos de θ da seguinte maneira:

$$\text{Área } \Delta OAP = \frac{1}{2}\,\text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2}(1)(\text{sen}\,\theta) = \frac{1}{2}\text{sen}\,\theta$$

$$\text{Área do setor } OAP = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2} \tag{2}$$

$$\text{Área } \Delta OAT = \frac{1}{2}\,\text{base} \times \text{altura}\ \frac{1}{2}(1)(\text{tg}\,\theta) = \frac{1}{2}\text{tg}\,\theta$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\text{sen}\,\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\text{tg}\,\theta$$

A última desigualdade não se altera se dividimos os três termos pelo número (1/2) sen θ, que é positivo, já que $0 < \theta < \pi/2$:

$$1 < \frac{\theta}{\text{sen}\,\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

Tomando os recíprocos, a desigualdade é invertida:

$$1 > \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} > \cos\theta$$

Uma vez que $\lim_{\theta \to 0^+} \cos\theta = 1$ (Exemplo 6b, Seção 2.2), do teorema do confronto resulta

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$$

A medida em radianos na Equação (2): A área do setor OAP será $\theta/2$ somente se θ for medido em radianos.

Tenhamos em mente que sen θ e θ são ambas *funções ímpares* (Seção 1.2). Então, $f(\theta) = (\text{sen}\,\theta)/\theta$ é uma *função par*, com um gráfico simétrico em relação ao eixo y (veja a Figura 2.29). Essa simetria implica que o limite à esquerda em 0 existe e tem valor igual ao limite à direita:

$$\lim_{\theta\to 0^-} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$$

então $\lim_{\theta\to 0} (\text{sen}\,\theta)/\theta = 1$ pelo Teorema 6.

EXEMPLO 5 Usando $\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$

Mostre que **(a)** $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ e **(b)** $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,2x}{5x} = \frac{2}{5}$

SOLUÇÃO

(a) Usando a fórmula $\cos h = 1 - 2\,\text{sen}^2\,(h/2)$, calculamos

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} -\frac{2\,\text{sen}^2(h/2)}{h} \\ &= -\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}\,\theta}{2}\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{Seja } \theta = h/2. \\ &= -(1)(0) = 0.\end{aligned}$$

(b) A Equação (1) não se aplica à fração original. Precisamos de $2x$ no denominador, e não $5x$. Produzimos o $2x$ multiplicando numerador e denominador por 2/5:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,2x}{5x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(2/5)\cdot \text{sen}\,2x}{(2/5)\cdot 5x} \\ &= \frac{2}{5}\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,2x}{2x} \qquad \text{Agora, a Equação (1) se aplica a } \theta = 2x. \\ &= \frac{2}{5}(1) = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

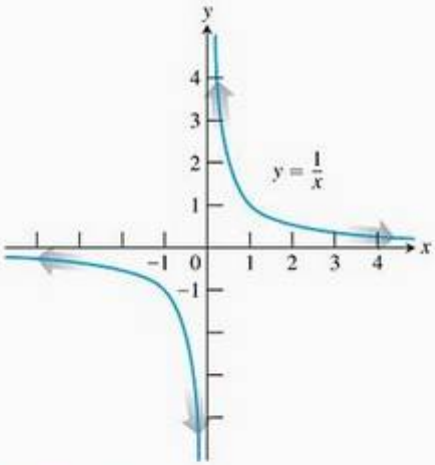


FIGURA 2.31 O gráfico de $y = 1/x$.

Limites finitos quando $x \to \pm\infty$

O símbolo para o infinito (∞) não representa um número real. Usamos ∞ para descrever o comportamento de uma função quando os valores em seu domínio ou imagem ultrapassam qualquer limitante. Por exemplo, a função $f(x) = 1/x$ é definida para qualquer valor de $x \neq 0$ (Figura 2.31). Quando x é positivo e vai ficando cada vez maior, $1/x$ torna-se cada vez menor. Quando x é negativo e cada vez maior em módulo, $1/x$ novamente é cada vez menor. Podemos sintetizar essas observações dizendo que $f(x) = 1/x$ tem limite 0 quando $x \to \pm\infty$, ou que 0 é um *limite de* $f(x) = 1/x$ *no infinito e no menos infinito*. Eis uma definição precisa.

Definições **Limites quando x tende a ∞ ou $-\infty$**

1. Dizemos que $f(x)$ possui o **limite L quando x tende ao infinito** e escrevemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

se, para cada número $\epsilon > 0$, existe um número M correspondente tal que, para todos os valores de x,

$$x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

2. Dizemos que $f(x)$ possui o **limite L com x tendendo a menos infinito** e escrevemos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

se, para cada número $\epsilon > 0$, existe um número N correspondente tal que, para todos os valores de x

$$x < N \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Intuitivamente, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ se, à medida que x se distancia da origem no sentido positivo, $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L. De modo similar, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ se, à medida que x se distancia da origem no sentido negativo, $f(x)$ fica arbitrariamente mais próximo de L.

A estratégia para calcular limites de funções quando $x \to \pm\infty$ é semelhante àquela usada para o cálculo de limites finitos da Seção 2.2. Lá, primeiro calculamos o limite das funções constante e identidade $y = k$ e $y = x$. Então, estendemos esses resultados a outras funções aplicando um teorema sobre limites de combinações algébricas. Aqui, faremos a mesma coisa, exceto pelo fato de as funções iniciais serem $y = k$ e $y = 1/x$ em vez de $y = k$ e $y = x$.

Os fatos básicos a serem verificados aplicando a definição formal são

$$\lim_{x\to\pm\infty} k = k \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{3}$$

Provaremos o último agora e deixaremos o primeiro para os exercícios 75 e 76.

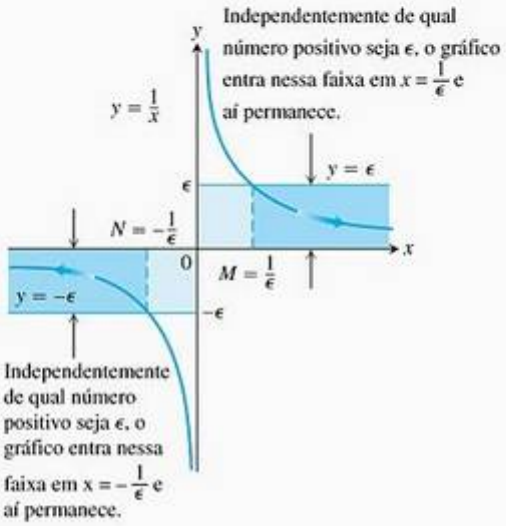


FIGURA 2.32 A geometria por trás do Exemplo 6.

EXEMPLO 6 Limites no infinito para $f(x) = 1/x$

Demonstre que

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ (b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

SOLUÇÃO

(a) Seja $\epsilon > 0$ dado. Precisamos determinar um número M tal que, para todos os valores de x,

$$x > M \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

As implicações valerão se $M = 1/\epsilon$ ou qualquer número positivo maior (Figura 2.32). Isso prova que $\lim_{x\to\infty} (1/x) = 0$.

(b) Seja $\epsilon > 0$ dado. Precisamos determinar um número N tal que, para todos os valores de x,

$$x < N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

As implicações valerão se $N = -1/\epsilon$ ou qualquer número menor que $-1/\epsilon$ (Figura 2.32). Isso prova que $\lim_{x\to-\infty} (1/x) = 0$.

Limites tendendo ao infinito apresentam propriedades semelhantes às dos limites finitos.

Teorema 8 Leis do limite quando $x \pm\infty$

Se L, M e k são números reais e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M, \text{ então}$$

1. *Regra da soma:* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + g(x)) = L + M$

2. *Regra da diferença:* $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-g(x)) = L - M$
3. *Regra do produto:* $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$
4. *Regra da multiplicação por constante:* $\lim_{x\to\pm\infty}(k\cdot f(x)) = k\cdot L$
5. *Regra do quociente:* $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$
6. *Regra da potenciação:* Se r e s são inteiros e não têm fatores comuns, $s \neq 0$, então

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)^{(r/s)} = L^{r/s}$$

desde que $L^{r/s}$ seja um número real. (Se s for par, pressupomos que $L > 0$.)

Essas propriedades são como as do Teorema 1, Seção 2.2, e as aplicaremos da mesma maneira.

EXEMPLO 7 Usando o Teorema 8

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$ Regra da soma.

$= 5 + 0 = 5$ Limites conhecidos.

(b) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}$

$= \lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}$ Regra do produto.

$= \pi\sqrt{3}\cdot 0\cdot 0 = 0$ Limites conhecidos.

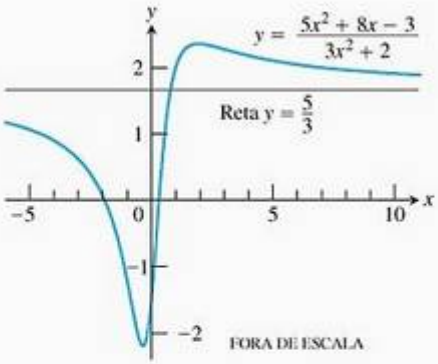


FIGURA 2.33 Gráfico da função do Exemplo 8. A curva se aproxima da reta $y = 5/3$ à medida que $|x|$ aumenta.

Limites no infinito de funções racionais

Para determinar o limite de uma função racional quando $x \to \pm\infty$, podemos dividir o numerador e o denominador pela maior potência de x que aparece no denominador. O que acontece depois depende dos graus dos polinômios envolvidos.

EXEMPLO 8 Numerador e denominador de mesmo grau

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{5+(8/x)-(3/x^2)}{3+(2/x^2)}$$ Divida o numerador e o denominador por x^2.

$$= \frac{5+0-0}{3+0} = \frac{5}{3}$$ Veja a Figura 2.33.

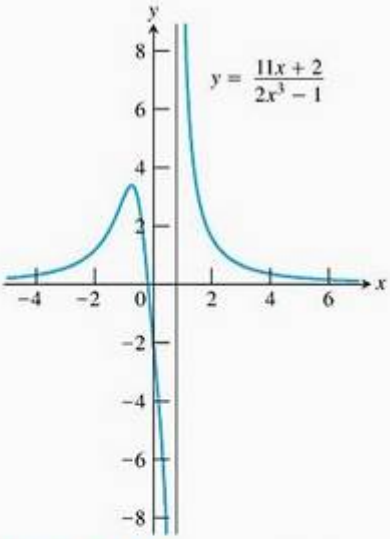


FIGURA 2.34 Gráfico da função do Exemplo 9. A curva se aproxima do eixo x à medida que $|x|$ aumenta.

EXEMPLO 9 Grau do numerador menor que o grau do denominador

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{11x+2}{2x^3-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(11/x^2)+(2/x^3)}{2-(1/x^3)}$$ Divida o numerador e o denominador por x^3.

$$= \frac{0+0}{2-0} = 0$$ Veja a Figura 2.34.

Daremos um exemplo do caso em que o grau do numerador é maior que o grau do denominador na próxima seção (Exemplo 8, Seção 2.5).

Assíntotas horizontais

Se a distância entre o gráfico de uma função e uma reta fixa se aproxima de zero à medida que um ponto se afasta da origem, dizemos que a curva se aproxima assintoticamente da reta e que a reta é uma *assíntota* do gráfico.

Analisando $f(x) = 1/x$ (veja a Figura 2.31), podemos observar que o eixo x é uma assíntota da curva à direita porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

e à esquerda porque

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Dizemos que o eixo x é uma *assíntota horizontal* do gráfico de $f(x) = 1/x$.

Definição **Assíntota horizontal**
A reta $y = b$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico da função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

A curva

$$f(x) = \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$$

que vemos na Figura 2.33 (Exemplo 8) tem a reta $y = 5/3$ como uma assíntota horizontal à direita e à esquerda, porque

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{5}{3} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{5}{3}$$

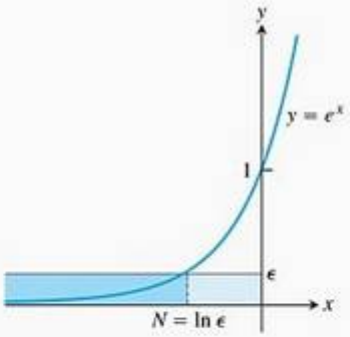


FIGURA 2.35 O gráfico de $y = e^x$ se aproxima do eixo à medida que $x \to -\infty$ (Exemplo 10).

EXEMPLO 10 **Assíntota horizontal de $y = e^x$**

O eixo x (a reta $y = 0$) é uma assíntota horizontal do gráfico de $y = e^x$ porque

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Para comprovar isso, usaremos a definição de um limite à medida que x se aproxima de $-\infty$. Portanto, seja $\epsilon > 0$ dado, mas arbitrário. Temos de determinar uma constante N tal que, para todos os valores de x,

$$x < N \quad \Rightarrow \quad |e^x - 0| < \epsilon$$

Agora $|e^x - 0| = e^x$, logo a condição que precisa ser satisfeita sempre que $x < N$ é

$$e^x < \epsilon$$

Seja $x = N$ o número em que $e^x = \epsilon$. Como e^x é uma função crescente, se $x < N$, então $e^x < \epsilon$. Determinamos N obtendo o logaritmo natural de ambos os lados da equação $e^N = \epsilon$, de modo que $N = \ln \epsilon$ (veja a Figura 2.35). Com esse valor de N a condição é satisfeita, e concluímos que $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

EXEMPLO 11 Substituindo por uma nova variável

Encontre $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(1/x)$.

SOLUÇÃO Introduzimos a nova variável $t = 1/x$. Pelo Exemplo 6, sabemos que $t \to 0^+$ quando $x \to \infty$ (veja a Figura 2.31). Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+} \operatorname{sen} t = 0$$

Da mesma maneira, podemos investigar o comportamento de $y = f(1/x)$ quando $x \to 0$ estudando $y = f(x)$ quando $x \to \pm\infty$.

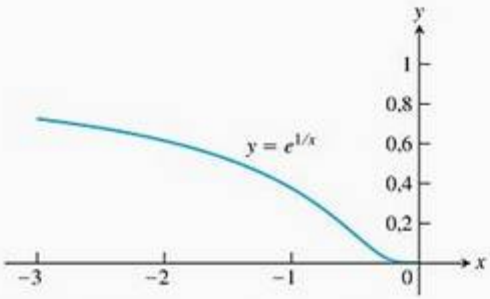


FIGURA 2.36 O gráfico de $y = e^{1/x}$ para $x < 0$ mostra que $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$ (Exemplo 12).

EXEMPLO 12 Usando a substituição

Encontre $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$

SOLUÇÃO Tomamos $t = 1/x$. Pela Figura 2.31 sabemos que $t \to -\infty$ quando $x \to 0^-$. Portanto,

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0 \quad \text{Exemplo 10}$$

(Veja a Figura 2.36.)

O teorema do confronto revisto

O teorema do confronto também se aplica a limites quando $x \to \pm\infty$.

EXEMPLO 13 Uma curva pode cruzar sua assíntota horizontal

Usando o teorema do confronto, encontre a assíntota horizontal da curva

$$y = 2 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

SOLUÇÃO Estamos interessados no comportamento do gráfico quando $x \to \pm\infty$. Dado que

$$0 \le \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right|$$

e que $\lim_{x\to\pm\infty} |1/x| = 0$, temos que $\lim_{x\to\pm\infty} (\operatorname{sen} x)/x = 0$ de acordo com o teorema do confronto. Assim,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(2 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 2 + 0 = 2$$

e a reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal da curva tanto à esquerda como à direita (Figura 2.37).

Esse exemplo ilustra que uma curva pode cruzar uma de suas assíntotas horizontais, talvez várias vezes.

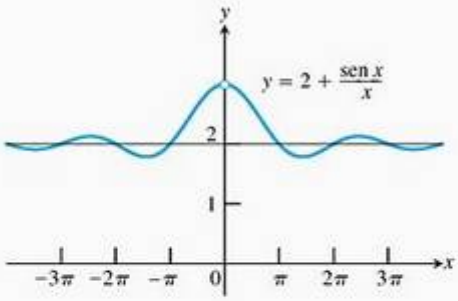


FIGURA 2.37 Uma curva pode cruzar uma de suas assíntotas infinitas vezes (Exemplo 13).

O gráfico de uma função pode ter mais de uma assíntota horizontal. Por exemplo, o gráfico da função arco tangente que discutiremos adiante (Seção 3.8) tem duas assíntotas horizontais.

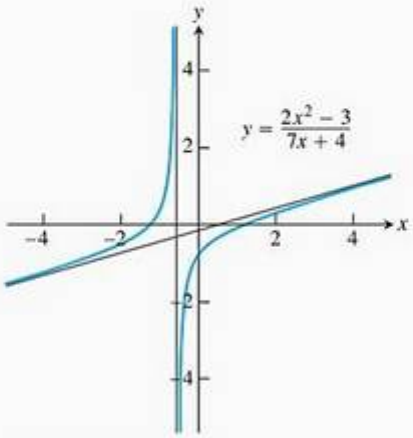


FIGURA 2.38 A função do Exemplo 14 tem uma assíntota oblíqua.

Assíntotas oblíquas

Caso o numerador de uma função racional tenha um grau maior do que o denominador, o gráfico apresentará uma **assíntota oblíqua (inclinada)**. Encontramos uma equação para a assíntota dividindo o numerador pelo denominador para expressar f como uma função linear mais um resto que é igual a zero quando $x \to \pm\infty$. Eis um exemplo.

EXEMPLO 14 Encontrando uma assíntota oblíqua

Encontre a assíntota oblíqua para o gráfico de

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

da Figura 2.38.

SOLUÇÃO Após dividirmos o numerador pelo denominador encontramos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2 - 3}{7x + 4} \\ &= \underbrace{\left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}\right)}_{\text{função linear } g(x)} + \underbrace{\frac{-115}{49\,(7x + 4)}}_{\text{resto}} \end{aligned}$$

Quando $x \to \pm\infty$, o resto, cuja magnitude fornece a distância vertical entre os gráficos de f e g, vai a zero, tornando a reta (inclinada)

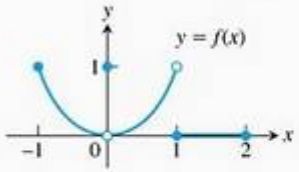
$$g(x) = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$$

uma assíntota do gráfico de f (Figura 2.38). A reta $y = g(x)$ é uma assíntota tanto à direita quanto à esquerda. Na próxima seção, você verá que a função $f(x)$ fica arbitrariamente grande em valor absoluto quando x se aproxima de $-4/7$, ponto em que o denominador se torna zero (Figura 2.38).

Exercícios 2.4

Obtendo limites graficamente

1. Quais das afirmações a seguir sobre a função $y = f(x)$ representada no gráfico são verdadeiras e quais são falsas?



(a) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$ (b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

(c) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$ (d) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

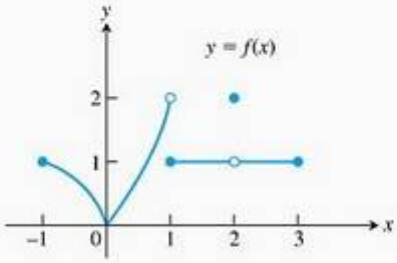
(e) $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe. (f) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

(g) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ (h) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

(i) $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ (j) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$

(k) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ não existe. (l) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$

2. Quais das afirmações a seguir sobre a função $y = f(x)$ representada no gráfico são verdadeiras e quais são falsas?



(a) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$ (b) $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ não existe.

(c) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$ (d) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

(e) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$ (f) $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe.

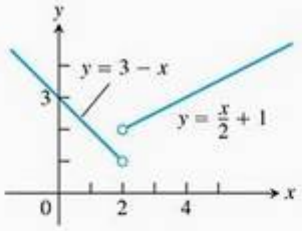
(g) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$

(h) $\lim_{x \to c} f(x)$ existe para qualquer c no intervalo aberto $(-1, 1)$.

(i) $\lim_{x \to c} f(x)$ existe para qualquer c no intervalo aberto $(1, 3)$.

(j) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$ (k) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ não existe.

3. Seja $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \dfrac{x}{2} + 1, & x > 2 \end{cases}$



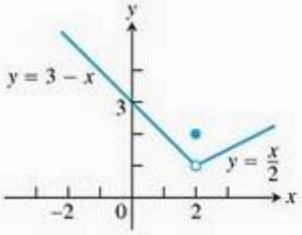
(a) Determine $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

(b) Existe $\lim_{x \to 2} f(x)$? Se existe, qual? Se não, por quê?

(c) Determine $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 4^+} f(x)$.

(d) Existe $\lim_{x \to 4} f(x)$? Se existe, qual? Se não, por quê?

4. Seja $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \dfrac{x}{2}, & x > 2 \end{cases}$



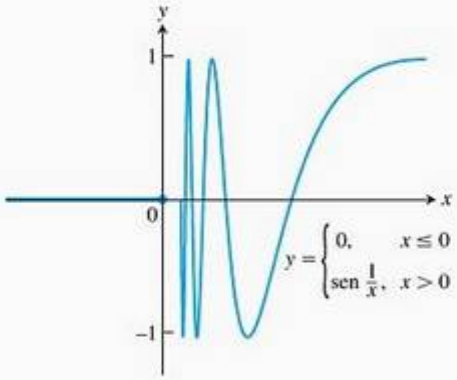
(a) Determine $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e $f(2)$.

(b) Existe $\lim_{x \to 2} f(x)$? Se existe, qual? Se não, por quê?

(c) Determine $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to -1^+} f(x)$.

(d) Existe $\lim_{x \to -1} f(x)$? Se existe, qual? Se não, por quê?

5. Seja $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

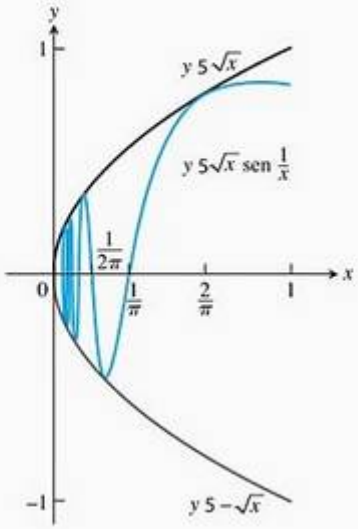


(a) Existe $\lim_{x \to 0^+} f(x)$? Se existe, qual? Se não, por quê?

(b) Existe $\lim_{x \to 0^-} f(x)$? Se existe, qual? Se não, por quê?

(c) Existe $\lim_{x \to 0} f(x)$? Se existe, qual? Se não, por quê?

6. Seja $g(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen}(1/x)$.



(a) Existe $\lim_{x \to 0^+} g(x)$? Se existe, qual? Se não, por quê?

(b) Existe $\lim_{x \to 0^-} g(x)$? Se existe, qual? Se não, por quê?

(c) Existe $\lim_{x \to 0} g(x)$? Se existe, qual? Se não, por quê?

7. (a) Represente graficamente $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \ne 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

(b) Determine $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

(c) Existe $\lim_{x \to 1} f(x)$? Se existe, qual? Se não, por quê?

8. (a) Represente graficamente $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \ne 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

(b) Determine $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^-} f(x)$.

(c) Existe $\lim_{x \to 1} f(x)$? Se existe, qual? Se não, por quê?

Represente graficamente as funções dos exercícios 9 e 10. Depois, responda às questões seguintes.

(a) Quais são o domínio e a imagem de f?

(b) Em quais pontos c existe $\lim_{x\to c} f(x)$, caso exista?

(c) Em quais pontos existe apenas o limite à esquerda?

(d) Em quais pontos existe apenas o limite à direita?

9. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x<2\\ 2, & x=2\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}x, & -1\le x<0, \text{ ou } 0<x\le 1\\ 1, & x=0\\ 0, & x<-1 \text{ ou } x>1\end{cases}$

Obtendo limites laterais algebricamente

Resolva os limites dos exercícios 11–18.

11. $\lim_{x\to -0.5^+}\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$

12. $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

13. $\lim_{x\to -2^+}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\left(\dfrac{2x+5}{x^2+x}\right)$

14. $\lim_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left(\dfrac{x+6}{x}\right)\left(\dfrac{3-x}{7}\right)$

15. $\lim_{h\to 0^+}\dfrac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

16. $\lim_{h\to 0^-}\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$

17. (a) $\lim_{x\to -2^+}(x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$ (b) $\lim_{x\to -2^-}(x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$

18. (a) $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$ (b) $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

Use o gráfico da função maior inteiro contido $y=\lfloor x\rfloor$ (às vezes escrita $y=\text{int } x$), Figura 1.10 da Seção 1.1, para determinar os limites nos exercícios 19 e 20.

19. (a) $\lim_{\theta\to 3^+}\dfrac{\lfloor\theta\rfloor}{\theta}$ (b) $\lim_{\theta\to 3^-}\dfrac{\lfloor\theta\rfloor}{\theta}$

20. (a) $\lim_{t\to 4^+}\left(t-\lfloor t\rfloor\right)$ (b) $\lim_{t\to 4^-}\left(t-\lfloor t\rfloor\right)$

Usando $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}=1$

Determine os limites nos exercícios 21–36.

21. $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{2}\theta}{\sqrt{2}\theta}$

22. $\lim_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} kt}{t}$ (k constante)

23. $\lim_{y\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 3y}{4y}$

24. $\lim_{h\to 0^-}\dfrac{h}{\operatorname{sen} 3h}$

25. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$

26. $\lim_{t\to 0}\dfrac{2t}{\operatorname{tg} t}$

27. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{cosec} 2x}{\cos 5x}$

28. $\lim_{x\to 0}6x^2(\cot x)(\operatorname{cosec} 2x)$

29. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+x\cos x}{\operatorname{sen} x\cos x}$

30. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-x+\operatorname{sen} x}{2x}$

31. $\lim_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(1-\cos t)}{1-\cos t}$

32. $\lim_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} h)}{\operatorname{sen} h}$

33. $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$

34. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 4x}$

35. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{sen} 8x}$

36. $\lim_{y\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 3y\operatorname{cotg} 5y}{y\operatorname{cotg} 4y}$

Calculando limites quando $x\to\pm\infty$

Nos exercícios 37–42, encontre o limite de cada função quando (a) $x\to\infty$ e (b) $x\to-\infty$. (Você pode visualizar sua resposta com um computador ou uma calculadora gráfica.)

37. $f(x)=\dfrac{2}{x}-3$

38. $f(x)=\pi-\dfrac{2}{x^2}$

39. $g(x)=\dfrac{1}{2+(1/x)}$

40. $g(x)=\dfrac{1}{8-(5/x^2)}$

41. $h(x)=\dfrac{-5+(7/x)}{3-(1/x^2)}$

42. $h(x)=\dfrac{3-(2/x)}{4+(\sqrt{2}/x^2)}$

Encontre os limites nos exercícios 43–50.

43. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

44. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\cos\theta}{3\theta}$

45. $\lim_{t\to-\infty}\dfrac{2-t+\operatorname{sen} t}{t+\cos t}$

46. $\lim_{r\to\infty}\dfrac{r+\operatorname{sen} r}{2r+7-5\operatorname{sen} r}$

47. $\lim_{x\to\infty}e^{-x}\operatorname{sen} x$

48. $\lim_{x\to-\infty}e^x\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

49. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

50. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+e^{-x}}{\operatorname{sen}(1/x)-2x^2}$

Limites de funções racionais

Nos exercícios 51–60, determine o limite de cada função quando (a) $x\to\infty$ e (b) $x\to-\infty$.

51. $f(x)=\dfrac{2x+3}{5x+7}$

52. $f(x)=\dfrac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7}$

53. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$

54. $f(x)=\dfrac{3x+7}{x^2-2}$

55. $h(x)=\dfrac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$

56. $g(x)=\dfrac{1}{x^3-4x+1}$

57. $g(x) = \dfrac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6}$

58. $h(x) = \dfrac{9x^4 + x}{2x^4 + 5x^2 - x + 6}$

59. $h(x) = \dfrac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$

60. $h(x) = \dfrac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9}$

Limites com expoente fracionário ou negativo

O processo pelo qual determinamos o limite de funções racionais é igualmente aplicável a razões contendo expoentes fracionários ou negativos de x: divida o numerador e o denominador pela maior potência de x no denominador e continue a partir daí. Encontre o limite para os exercícios 61–66.

61. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$

62. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$

63. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$

64. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$

65. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$

66. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$

Teoria e exemplos

67. Uma vez que conheça $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$ em um ponto interior do domínio de f, você pode determinar $\lim_{x\to a} f(x)$? Justifique sua resposta.

68. Se você sabe que $\lim_{x\to c} f(x)$ existe, pode determinar seu valor calculando $\lim_{x\to c^+} f(x)$? Justifique sua resposta.

69. Suponha que f seja uma função ímpar de x. O fato de saber que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$ diz a você algo sobre $\lim_{x\to 0^-} f(x)$? Justifique sua resposta.

70. Suponha que f seja uma função par de x. Sabendo que $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$, você pode dizer alguma coisa sobre $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ ou $\lim_{x\to -2^+} f(x)$? Justifique sua resposta.

71. Suponha que $f(x)$ e $g(x)$ sejam polinômios em x e que $\lim_{x\to\infty} (f(x)/g(x)) = 2$. Você pode concluir alguma coisa sobre $\lim_{x\to-\infty} (f(x)/g(x))$? Justifique sua resposta.

72. Suponha que $f(x)$ e $g(x)$ sejam polinômios em x. O gráfico de $(f(x)/g(x))$ poderá ter uma assíntota se $g(x)$ nunca for zero? Justifique sua resposta.

73. Quantas assíntotas horizontais pode ter o gráfico de uma função racional dada? Justifique sua resposta.

74. Ache $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)$

Use as definições formais de limites quando $x \to \pm\infty$ para estabelecer os limites nos exercícios 75 e 76.

75. Se f tem o valor constante $f(x) = k$, então $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k$.

76. Se f tem o valor constante $f(x) = k$, então $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k$.

Definições formais de limites laterais

77. Dado $\epsilon > 0$, ache um intervalo $I = (5, 5 + \delta)$, $\delta > 0$, tal que se x está em I, então $\sqrt{x - 5} < \epsilon$. De que limite se está verificando a existência e qual é seu valor?

78. Dado $\epsilon > 0$, procure um intervalo $I = (4 - \delta, 4)$, $\delta > 0$, tal que se x está em I, então $\sqrt{4 - x} < \varepsilon$. De que limite se está verificando a existência e qual é seu valor?

Use as definições de limites à direita e à esquerda para provar as afirmações sobre limites feitas nos exercícios 79 e 80.

79. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = -1$

80. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x - 2}{|x - 2|} = 1$

81. **Função maior inteiro contido** Determine (a) $\lim_{x\to 400^+} \lfloor x \rfloor$ e (b) $\lim_{x\to 400^-} \lfloor x \rfloor$; em seguida, use as definições de limite para comprovar seus resultados. (c) Com base em suas respostas nos itens (a) e (b), é possível dizer algo sobre $\lim_{x\to 400} \lfloor x \rfloor$? Justifique suas respostas.

82. **Limites laterais** Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

Determine (a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e (b) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; em seguida, use as definições de limite para comprovar seus resultados. (c) Com base em suas respostas nos itens (a) e (b), é possível dizer algo sobre $\lim_{x\to 0} f(x)$? Justifique sua resposta.

Fazendo gráficos — "visualizando" limites no infinito

Às vezes, a mudança numa variável pode transformar uma expressão desconhecida numa outra cujo limite sabemos determinar, tal como visto no Exemplo 11, no qual substituímos $t = 1/x$ para determinar um limite quando $x \to \infty$. Isso sugere uma maneira criativa de "visualizar" limites no infinito. Descreva o procedimento e use-o para imaginar e determinar limites nos exercícios 83–88.

83. $\lim\limits_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

84. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos(1/x)}{1 + (1/x)}$

85. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x + 4}{2x - 5}$

86. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{1/x}$

87. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(3 + \dfrac{2}{x}\right)\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$

88. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3}{x^2} - \cos\dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$

2.5 Limites infinitos e assíntotas verticais

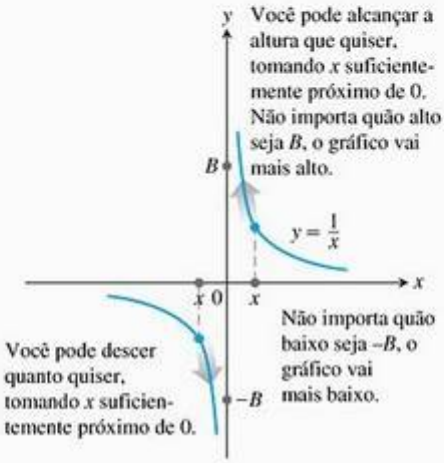


FIGURA 2.39 Limites infinitos laterais: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Nesta seção, estenderemos o conceito de limite para *limites infinitos*, que não são mais limites, e sim representam um uso inteiramente novo do termo limite. Limites infinitos nos proporcionam símbolos e uma linguagem úteis para descrever o comportamento de funções cujos valores se tornam arbitrariamente grandes, sejam positivos ou negativos. Continuaremos nossa análise de gráficos de funções racionais iniciada na seção anterior, usando assíntotas verticais e termos dominantes para valores de x numericamente grandes.

Limites infinitos

Vamos analisar novamente a função $f(x) = 1/x$. Conforme $x \to 0^+$, os valores de f crescem sem limitação, alcançando e ultrapassando todo número real positivo. Isto é, dado qualquer número real positivo B, mesmo que muito grande, os valores de f ficam ainda maiores (Figura 2.39). Então, f não tem limite quando $x \to 0^+$. Entretanto, é conveniente descrever o comportamento de f dizendo que $f(x)$ tende a ∞ conforme $x \to 0^+$. Escrevemos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Ao escrever isso, *não* estamos dizendo que o limite existe. Tampouco estamos dizendo que existe um número real ∞, porque não existe tal número. Em vez disso, estamos dizendo que $\lim_{x\to 0^+} (1/x)$ *não existe porque* $1/x$ *torna-se arbitrariamente grande e positivo à medida que* $x \to 0^+$.

Quando $x \to 0^-$, os valores de $f(x) = 1/x$ tornam-se arbitrariamente grandes (em valor absoluto) e negativos. Dado qualquer número real negativo $-B$, os valores de f vão ficar ainda abaixo de $-B$ (veja a Figura 2.39). Escrevemos

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Novamente, não estamos dizendo que existe limite e que ele é igual ao número $-\infty$. *Não existe* um número real $-\infty$. Estamos descrevendo o comportamento de uma função cujo limite, quando $x \to 0^-$, *não existe porque seus valores se tornam arbitrariamente grandes e negativos.*

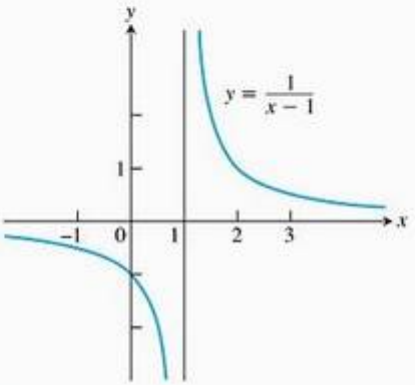


FIGURA 2.40 Próximo de $x = 1$, a função $y = 1/(x - 1)$ comporta-se como a função $y = 1/x$ próximo de $x = 0$. Seu gráfico é o gráfico de $y = 1/x$ deslocado 1 unidade para a direita (Exemplo 1).

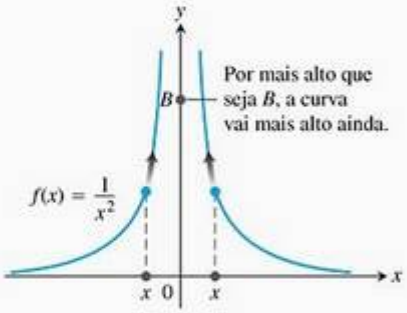
EXEMPLO 1 Limites laterais infinitos

Determine $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$ e $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$

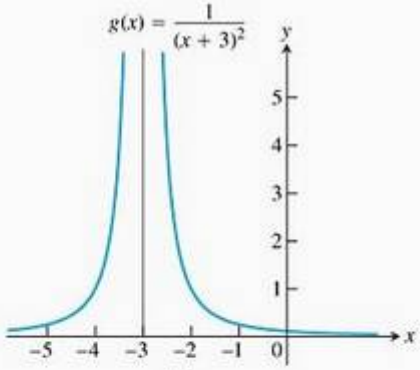
SOLUÇÃO GEOMÉTRICA O gráfico de $y = 1/(x - 1)$ é o gráfico de $y = 1/x$ deslocado 1 unidade para a direita (Figura 2.40). Portanto, $y = 1/(x - 1)$ próximo de 1 comporta-se exatamente como $y = 1/x$ próximo de 0:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

SOLUÇÃO ANALÍTICA Pense no número $x - 1$ e seu recíproco. Conforme $x \to 1^+$, temos $(x - 1) \to 0^+$ e $1/(x - 1) \to \infty$. Conforme $x \to 1^-$, temos $(x - 1) \to 0^-$ e $1/(x - 1) \to -\infty$.



(a)



(b)

FIGURA 2.41 Gráficos das funções do Exemplo 2. (a) $f(x)$ tende ao infinito quando $x \to 0$. (b) $g(x)$ tende ao infinito quando $x \to -3$.

EXEMPLO 2 Limites infinitos bilaterais

Discuta o comportamento de

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ próximo de $x = 0$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ próximo de $x = -3$

SOLUÇÃO

(a) Quando x se aproxima de zero por qualquer um dos lados, os valores de $1/x^2$ são positivos e se tornam arbitrariamente grandes (Figura 2.41a):

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

(b) O gráfico de $g(x) = 1/(x + 3)^2$ é o gráfico de $f(x) = 1/x^2$ deslocado 3 unidades para a esquerda (Figura 2.41b). Portanto, próximo de -3, g se comporta exatamente como f próximo de 0.

$$\lim_{x \to -3} g(x) = \lim_{x \to -3} \frac{1}{(x+3)^2} = \infty$$

A função $y = 1/x$ não apresenta um comportamento consistente quando $x \to 0$. Temos $1/x \to \infty$ se $x \to 0^+$, mas $1/x \to -\infty$ se $x \to 0^-$. Tudo o que podemos dizer sobre $\lim_{x \to 0} (1/x)$ é que ele não existe. A função $y = 1/x^2$ é diferente. Seus valores tendem ao infinito quando x tende a zero por um dos lados, por isso podemos dizer que $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$.

EXEMPLO 3 Funções racionais podem se comportar de várias maneiras próximo ao zero de seus denominadores

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x+2} = 0$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty$ Os valores são negativos para $x > 2$, x próximo de 2.

(d) $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty$ Os valores são positivos para $x < 2$, x próximo de 2.

(e) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)}$ não existe. Veja os itens (c) e (d).

(f) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x \to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x \to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$

Nos itens (a) e (b), o efeito do zero no denominador em $x = 2$ é cancelado porque o numerador nesses itens é zero também. Logo, existe um limite finito. Isso não se aplica ao item (f), em que o cancelamento ainda deixa um zero no denominador.

Definições precisas de limites infinitos

Em vez de exigir que $f(x)$ permaneça arbitrariamente próximo a um número finito L para todos x suficientemente próximos de x_0, as definições de

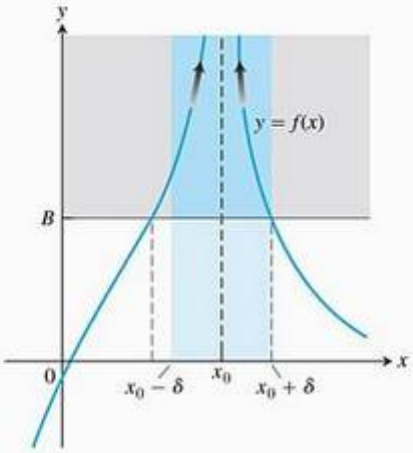


FIGURA 2.42 Para $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, a curva de $f(x)$ fica acima da reta $y = B$.

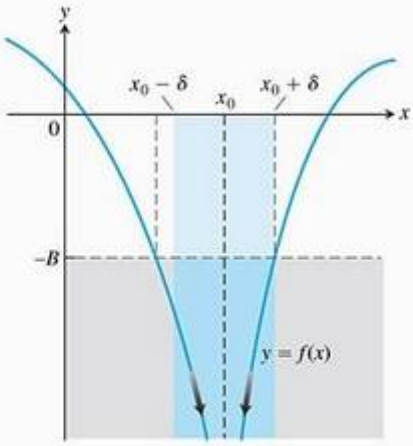


FIGURA 2.43 Para $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, a curva de $f(x)$ fica abaixo da reta $y = -B$.

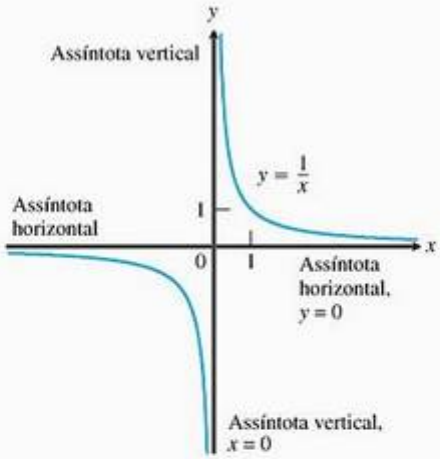


FIGURA 2.44 Os eixos cartesianos são assíntotas de ambos os ramos da hipérbole $y = 1/x$.

limites infinitos exigem que $f(x)$ esteja arbitrariamente longe da origem. Exceto por essa diferença, a linguagem é idêntica àquela vista anteriormente. As figuras 2.42 e 2.43 ilustram essas definições.

Definições Infinito e menos infinito como limites

1. Dizemos que **$f(x)$ tende ao infinito quando x tende a x_0** e escrevemos
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$
se para cada número real positivo B existe um $\delta > 0$ correspondente tal que para todo x
$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > B$$
2. Dizemos que **$f(x)$ tende ao menos infinito quando x tende a x_0** e escrevemos
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$
se para cada número real negativo $-B$ existe um $\delta > 0$ correspondente tal que, para todo x,
$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > -B$$

As definições precisas para limites laterais infinitos em x_0 são análogas e serão dadas nos exercícios.

EXEMPLO 4 Usando a definição de limites infinitos

Prove que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

SOLUÇÃO Dado $B > 0$, queremos determinar $\delta > 0$ tal que
$$0 < |x - 0| < \delta \quad \text{implique} \quad \frac{1}{x^2} > B$$
Agora,
$$\frac{1}{x^2} > B \quad \text{se e somente se} \quad x^2 < \frac{1}{B}$$
ou, de modo equivalente,
$$|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}$$

Logo, escolhendo $\delta = 1/\sqrt{B}$ (ou qualquer outro número positivo menor), vemos que
$$|x| < \delta \quad \text{implica} \quad \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \geq B$$

Assim, por definição,
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Assíntotas verticais

Observe que a distância entre um ponto no gráfico de $y = 1/x$ e o eixo y tende a zero quando o ponto se move ao longo da curva verticalmente e afastando-se da origem (Figura 2.44). Esse comportamento ocorre porque
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Dizemos que a reta $x = 0$ (o eixo y) é uma *assíntota vertical* do gráfico de $y = 1/x$. Observe que o denominador é zero em $x = 0$ e a função é indefinida nesse ponto.

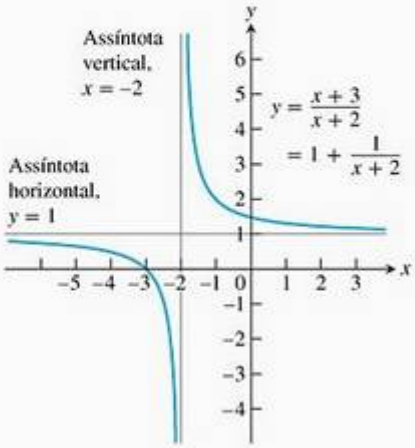


FIGURA 2.45 As retas $y = 1$ e $x = -2$ são as assíntotas da curva $y = (x + 3)/(x + 2)$ (Exemplo 5).

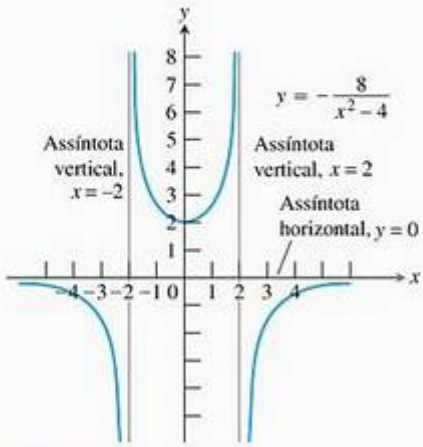


FIGURA 2.46 Gráfico de $y = -8/(x^2 - 4)$. Veja que a curva se aproxima do eixo x apenas por um lado. As assíntotas não precisam ser bilaterais (Exemplo 6).

Definições Assíntota vertical

Uma reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

EXEMPLO 5 Procurando assíntotas

Encontre as assíntotas horizontal e vertical do gráfico de

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

SOLUÇÃO Estamos interessados no comportamento da curva quando $x \to \pm\infty$ e quando $x \to -2$, onde o denominador é zero.

Vemos rapidamente quais são as assíntotas se reescrevemos a função racional como uma polinômio com um resto, dividindo $(x + 3)$ por $(x + 2)$.

$$\begin{array}{r|l} x+3 & x+2 \\ \cline{2-2} -x-2 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Isso nos permite reescrever y:

$$y = 1 + \frac{1}{x+2}$$

Agora, vemos que a curva em questão é o gráfico de $y = 1/x$ deslocado 1 unidade para cima e 2 para a direita (Figura 2.45). As assíntotas, em vez de serem os eixos cartesianos, agora são as retas $y = 1$ e $x = -2$.

EXEMPLO 6 Assíntotas não são necessariamente bilaterais

Encontre as assíntotas horizontal e vertical do gráfico de

$$f(x) = -\frac{8}{x^2 - 4}$$

SOLUÇÃO Estamos interessados no comportamento do gráfico quando $x \to \pm\infty$ e quando $x \to \pm 2$, onde o denominador é zero. Observe que f é uma função par de x, então o gráfico é simétrico em relação ao eixo y.

(a) O *comportamento quando* $x \to \pm\infty$. Uma vez que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal da curva à direita. Por simetria, também é uma assíntota à esquerda (Figura 2.46). Observe que a curva se aproxima do eixo x apenas pelo lado negativo (ou por baixo).

(b) O *comportamento quando* $x \to \pm 2$. Uma vez que

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) \quad \infty,$$

a reta $x = 2$ é uma assíntota vertical tanto à esquerda quanto à direita de $x = 2$. Por simetria, o mesmo vale para a reta $x = -2$.

Não há outras assíntotas porque f tem um limite finito em qualquer outro ponto.

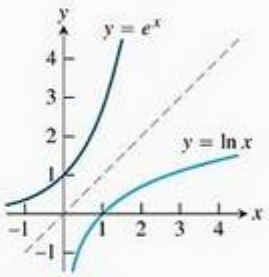


FIGURA 2.47 A reta $x = 0$ é uma assíntota vertical da função logaritmo natural (Exemplo 7).

EXEMPLO 7 Assíntotas verticais do logaritmo natural

No gráfico da função logaritmo natural, o eixo y (a reta $x = 0$) é uma assíntota vertical. Podemos ver isso a partir do gráfico traçado na Figura 2.47 (que é a reflexão do gráfico da função exponencial natural ao longo da reta $y = x$) e do fato de que o eixo x é uma assíntota horizontal de $y = e^x$ (Exemplo 10, Seção 2.4). Logo,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

O mesmo resultado é verdadeiro para $y = \log_a x$ sempre que $a > 1$.

EXEMPLO 8 Curvas com infinitas assíntotas

As curvas

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{e} \quad y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

apresentam assíntotas verticais em múltiplos inteiros ímpares de $\pi/2$, onde $\cos x = 0$ (Figura 2.48).

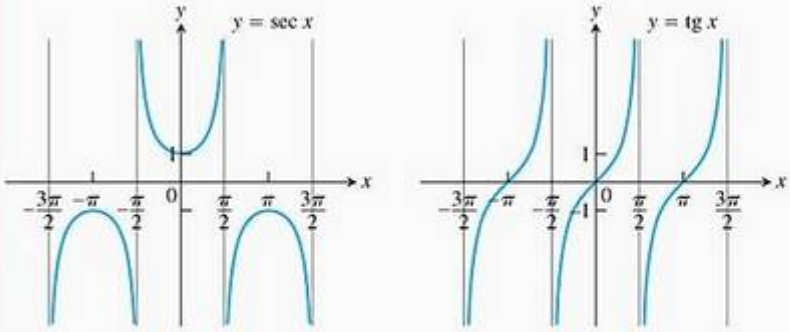


FIGURA 2.48 Os gráficos de sec x e tg x têm um número infinito de assíntotas verticais (Exemplo 8).

Os gráficos de

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad \text{e} \quad y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

têm assíntotas verticais para múltiplos inteiros de π, quando $\operatorname{sen} x = 0$ (Figura 2.49).

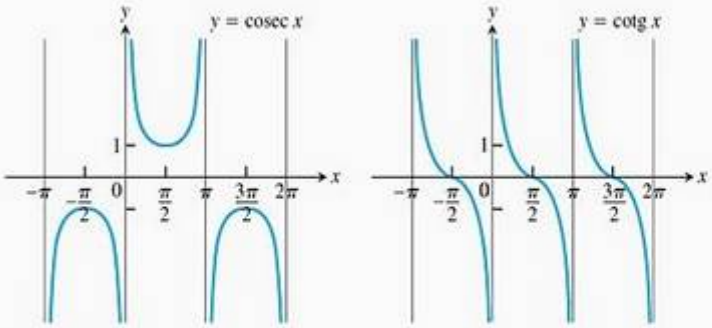


FIGURA 2.49 Os gráficos de cosec x e cotg x (Exemplo 8).

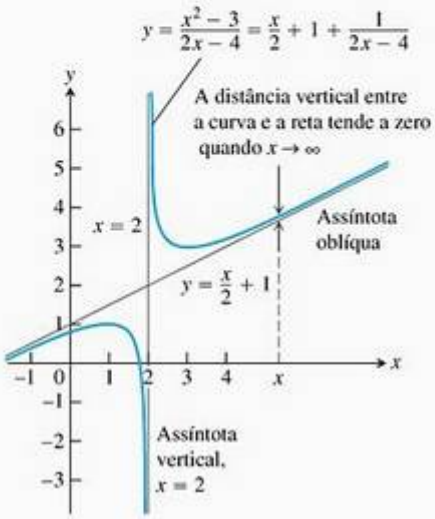


FIGURA 2.50 O gráfico de $f(x) = (x^2 - 3)/(2x - 4)$ apresenta uma assíntota vertical e uma assíntota oblíqua (Exemplo 9).

EXEMPLO 9 Uma função racional com grau de numerador maior que o grau do denominador

Determine as assíntotas do gráfico de

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$$

SOLUÇÃO Estamos interessados no comportamento quando $x \to \pm\infty$ e também quando $x \to 2$, ponto em que o denominador é zero. Dividimos $(2x - 4)$ por $(x^2 - 3)$:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 3 & 2x - 4 \\ \cline{2-2} -x^2 + 2x & \frac{x}{2} + 1 \\ \hline 2x - 3 & \\ -2x + 4 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Isso nos diz que

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4} = \underbrace{\frac{x}{2}+1}_{\text{linear}} + \underbrace{\frac{1}{2x-4}}_{\text{resto}}$$

Uma vez que $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, a reta $x = 2$ é uma assíntota vertical bilateral. Quando $x \to \pm\infty$, o resto tende a 0 e $f(x) \to (x/2) + 1$. A reta $y = (x/2) + 1$ é uma assíntota obliqua à direita e à esquerda (Figura 2.50).

Observe no Exemplo 9 que, se o grau do numerador numa função racional é maior que o grau do denominador, o limite é $+\infty$ ou $-\infty$, dependendo dos sinais assumidos pelo numerador e pelo denominador conforme $|x|$ se torna grande.

Termos dominantes

De todas as observações que podemos fazer rapidamente sobre a função

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$$

do Exemplo 9, provavelmente a mais útil é que

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x-4}$$

Isso nos diz imediatamente que

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1 \quad \text{Para } x \text{ numericamente grande.}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2x-4} \quad \text{Para } x \text{ próximo de 2.}$$

Se queremos saber como f se comporta, descobrimos do seguinte modo. Ele se comporta como $y = (x/2) + 1$ quando x é numericamente grande e a contribuição de $1/(2x - 4)$ para o valor total de f é insignificante. Ele se comporta como $1/(2x - 4)$ quando x está tão próximo de 2 que $1/(2x - 4)$ faz a contribuição dominante.

Dizemos que $(x/2) + 1$ **domina** quando x é numericamente grande, e que $1/(2x - 4)$ domina quando x está próximo de 2. **Termos dominantes** como

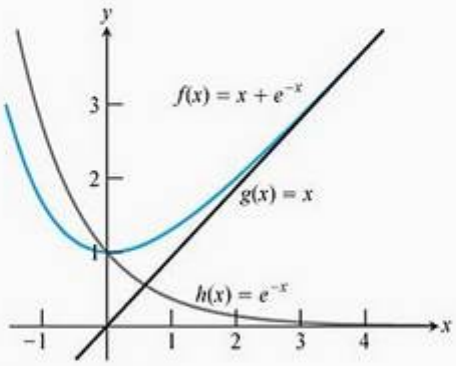


FIGURA 2.51 O gráfico de $f(x) = x + e^{-x}$ assemelha-se ao de $g(x) = x$ à direita do eixo y e ao de $h(x) = e^{-x}$ à esquerda do eixo y (Exemplo 10).

estes são o elemento-chave para prever o comportamento de uma função. Veremos a seguir uma maneira de descrever esse comportamento quando $|x|$ se torna numericamente grande.

(a) A função g é um **modelo de comportamento final à direita** para f se e somente se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

(b) A função g é um **modelo de comportamento final à esquerda** para f se e somente se

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Modelos de comportamento final de uma função à esquerda e à direita não precisam ser a mesma função, como o próximo exemplo demonstra.

EXEMPLO 10 Encontrando modelos de comportamento final

Seja $f(x) = x + e^{-x}$. Demonstre que $g(x) = x$ é um modelo de comportamento final à direita para f, enquanto $h(x) = e^{-x}$ é um modelo de comportamento final à esquerda para f.

SOLUÇÃO À direita,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right) = 1, \text{ pois } \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{x} = 0$$

À esquerda,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+e^{-x}}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{-x}}+1\right) = 1, \text{ pois } \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = 0$$

(Veja o Exercício 65.) O gráfico de f na Figura 2.51 fundamenta essas conclusões a respeito do modelo de comportamento final.

EXEMPLO 11 Dois gráficos que parecem idênticos numa escala ampla

Sejam $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = 3x^4$. Demonstre que, apesar de f e g serem bastante diferentes para valores numéricos pequenos de x, essas funções são quase idênticas quando $|x|$ é muito grande.

SOLUÇÃO Os gráficos de f e g comportam-se de modo totalmente diferente próximos à origem (Figura 2.52a), mas parecem quase idênticos em uma escala mais ampla (Figura 2.52b).

Podemos testar a afirmação de que o termo $3x^4$ em f, representado graficamente por g, domina o polinômio f para valores numericamente grandes de x examinando a razão das duas funções quando $x \to \pm\infty$. Obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^4-2x^3+3x^2-5x+6}{3x^4}\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{2}{3x}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{3x^3}+\frac{2}{x^4}\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

portanto f e g são praticamente idênticas para $|x|$ grande. Em outras palavras, a função g é um modelo de comportamento tanto à direita quanto à esquerda para a função f.

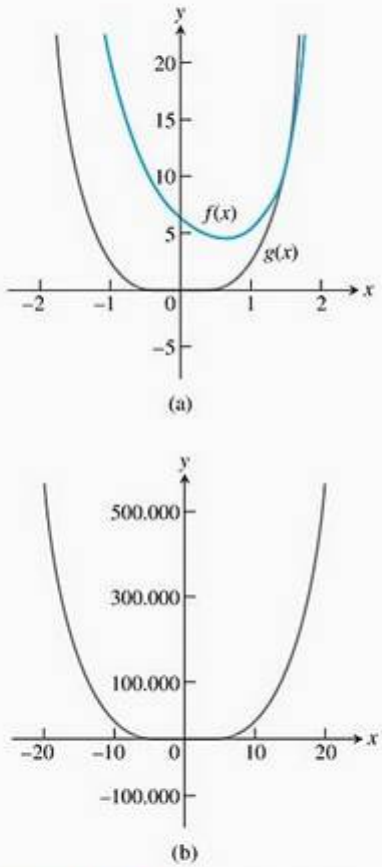


FIGURA 2.52 Os gráficos de f e g são (a) distintos para $|x|$ pequeno e (b) praticamente idênticos para $|x|$ grande (Exemplo 11).

Exercícios 2.5

Limites infinitos

Determine os limites nos exercícios 1–12.

1. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{3x}$
2. $\lim_{x \to 0^-} \frac{5}{2x}$
3. $\lim_{x \to 2^-} \frac{3}{x-2}$
4. $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3}$
5. $\lim_{x \to -8^+} \frac{2x}{x+8}$
6. $\lim_{x \to -5^-} \frac{3x}{2x+10}$
7. $\lim_{x \to 7} \frac{4}{(x-7)^2}$
8. $\lim_{x \to 0} \frac{-1}{x^2(x+1)}$
9. (a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{3x^{1/3}}$ (b) $\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{3x^{1/3}}$
10. (a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x^{1/5}}$ (b) $\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x^{1/5}}$
11. $\lim_{x \to 0} \frac{4}{x^{2/5}}$
12. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}}$

Determine os limites nos exercícios 13–16.

13. $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \operatorname{tg} x$
14. $\lim_{x \to (-\pi/2)^+} \sec x$
15. $\lim_{\theta \to 0^-} (1 + \operatorname{cosec} \theta)$
16. $\lim_{\theta \to 0} (2 - \operatorname{cotg} \theta)$

Cálculos adicionais

Determine os limites nos exercícios 17–22.

17. $\lim \frac{1}{x^2 - 4}$ quando
    (a) $x \to 2^+$ (b) $x \to -2^-$
    (c) $x \to -2^+$ (d) $x \to -2^-$
18. $\lim \frac{x}{x^2 - 1}$ quando
    (a) $x \to 1^+$ (b) $x \to 1^-$
    (c) $x \to -1^+$ (d) $x \to -1^-$
19. $\lim \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} \right)$ quando
    (a) $x \to 0^+$ (b) $x \to 0^-$
    (c) $x \to \sqrt[3]{2}$ (d) $x \to -1$
20. $\lim \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$ quando
    (a) $x \to -2^+$ (b) $x \to -2^-$
    (c) $x \to 1^+$ (d) $x \to 0^-$
21. $\lim \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2}$ quando
    (a) $x \to 0^+$ (b) $x \to 2^+$
    (c) $x \to 2^-$ (d) $x \to 2$
    (e) Podemos dizer algo sobre o limite quando $x \to 0$? O quê?
22. $\lim \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x}$ quando
    (a) $x \to 2^+$ (b) $x \to -2^+$
    (c) $x \to 0^-$ (d) $x \to 1^+$
    (e) Podemos dizer algo sobre o limite quando $x \to 0$? O quê?

Determine os limites nos exercícios 23–26.

23. $\lim \left(2 - \frac{3}{t^{1/3}} \right)$ quando
    (a) $t \to 0^+$ (b) $t \to 0^-$
24. $\lim \left(\frac{1}{t^{3/5}} + 7 \right)$ quando
    (a) $t \to 0^+$ (b) $t \to 0^-$
25. $\lim \left(\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}} \right)$ quando
    (a) $x \to 0^+$ (b) $x \to 0^-$
    (c) $x \to 1^+$ (d) $x \to 1^-$
26. $\lim \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}} \right)$ quando
    (a) $x \to 0^+$ (b) $x \to 0^-$
    (c) $x \to 1^+$ (d) $x \to 1^-$

Esboçando o gráfico de funções racionais

Esboce o gráfico das funções descritas nos exercícios 27–38. Inclua as equações e os gráficos das assíntotas e dos termos dominantes.

27. $y = \dfrac{1}{x-1}$

28. $y = \dfrac{1}{x+1}$

29. $y = \dfrac{1}{2x+4}$

30. $y = \dfrac{-3}{x-3}$

31. $y = \dfrac{x+3}{x+2}$

32. $y = \dfrac{2x}{x+1}$

33. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

34. $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

35. $y = \dfrac{x^2-4}{x-1}$

36. $y = \dfrac{x^2-1}{2x+4}$

37. $y = \dfrac{x^2-1}{x}$

38. $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$

Criando gráficos a partir de valores e limites

Nos exercícios 39–42, esboce o gráfico de uma função $y = f(x)$ que satisfaça as condições dadas. Nenhuma fórmula é necessária; simplesmente indique os eixos cartesianos e trace uma curva apropriada. (As respostas não são únicas, portanto seus gráficos não precisam ser idênticos aos da seção de respostas.)

39. $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ e $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

40. $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -2$

41. $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$

42. $f(2) = 1$, $f(-1) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$

Criando funções

Nos exercícios 43–46, encontre uma função que satisfaça as condições dadas e esboce o gráfico dela. (Aqui as respostas não são únicas. Qualquer função que satisfaça as condições é aceitável. Se ajudar, use fórmulas definidas em partes.)

43. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \infty$

44. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x) = \infty$

45. $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = -1$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 1$

46. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} k(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} k(x) = -\infty$

Definição formal de limite infinito

Use definições formais para provar as afirmações sobre limites nos exercícios 47–50.

47. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{x^2} = -\infty$

48. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{|x|} = \infty$

49. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-2}{(x-3)^2} = \infty$

50. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{-1}{(x+5)^2} = \infty$

Definições formais de limites laterais infinitos

51. Esta é a definição de **limite à direita infinito**.

> Dizemos que $f(x)$ tende ao infinito quando x tende a x_0 pela direita e escrevemos
>
> $$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$$
>
> se, para qualquer número real positivo B, existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que, para todos os valores de x,
>
> $$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > B$$

Modifique a definição a fim de incluir os seguintes casos.

(a) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$

(b) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$

(c) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

Use as definições formais do Exercício 51 para provar as afirmações sobre limites feitas nos exercícios 52–56.

52. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$

53. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

54. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$

55. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = \infty$

56. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-x^2} = \infty$

Representando termos graficamente

Cada uma das funções nos exercícios 57–60 é dada como a soma ou a diferença de dois termos. Primeiro represente os termos graficamente (com o mesmo conjunto de eixos). Depois, usando esses gráficos como guia, esboce o gráfico da função.

57. $y = \sec x + \dfrac{1}{x}$, $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

58. $y = \sec x - \dfrac{1}{x^2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

59. $y = \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{x^2}$ $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

60. $y = \dfrac{1}{x} - \operatorname{tg} x$, $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

Fazendo gráficos

Trace as curvas nos exercícios 61–64. Explique a relação entre a fórmula da curva e o que você vê.

61. $y = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

62. $y = \dfrac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$

63. $y = x^{2/3} + \dfrac{1}{x^{1/3}}$

64. $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x^2+1}\right)$

Nos exercícios 65–68, use o gráfico de $y = f(1/x)$ para encontrar $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

65. $f(x) = xe^x$

66. $f(x) = x^2e^{-x}$

67. $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$

68. $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{\ln|x|}$

Esboce os gráficos das funções nos exercícios 69 e 70. Responda então às seguintes perguntas:

(a) Como o gráfico se comporta quando $x \to 0^+$?

(b) Como o gráfico se comporta quando $x \to \pm\infty$?

(c) Como o gráfico se comporta em $x = 1$ e $x = -1$?

Justifique suas respostas.

69. $y = \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^{2/3}$

70. $y = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{2/3}$

Modelos de comportamento final

Nos exercícios 71–76, ache **(a)** uma função básica e simples que seja um comportamento final à direita e **(b)** uma função simples e básica como um comportamento final à esquerda para a função.

71. $y = e^x - 2x$

72. $y = x^2 + e^{-x}$

73. $y = x + \ln|x|$

74. $y = x^2 + \operatorname{sen} x$

75. $y = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x+3}$

76. $y = \dfrac{2x^4 - x^3 + x^2 - 1}{2-x}$

2.6 Continuidade

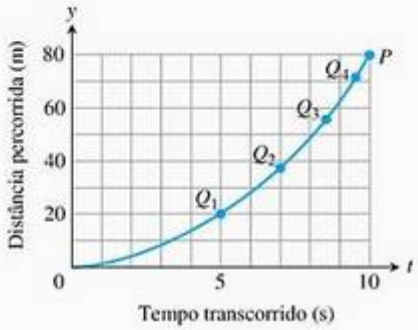


FIGURA 2.53 Unindo os pontos por uma curva não interrompida a partir dos dados experimentais Q_1, Q_2, Q_3, de um objeto em queda.

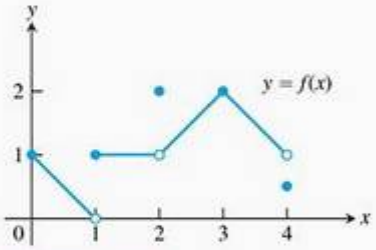


FIGURA 2.54 A função é contínua em $[0, 4]$, exceto em $x = 1$, $x = 2$ e $x = 4$ (Exemplo 1).

Quando colocamos em um sistema de coordenadas alguns pontos do gráfico de uma função cujos valores foram gerados em laboratório ou coletados no campo, geralmente unimos esses pontos por uma curva não interrompida para mostrar quais seriam os valores prováveis da função em todos os instantes em que não medimos (Figura 2.53). Fazendo isso, supomos que estamos trabalhando com uma *função contínua*, então os valores variam continuamente e não saltam de um valor para outro sem assumir todos os valores entre eles. Podemos determinar o limite de uma função contínua quando x se aproxima de c simplesmente calculando o valor da função em c. (Na Seção 2.2, vimos que isso valia também para polinômios.)

Qualquer função $y = f(x)$ cujo gráfico possa ser esboçado sobre seu domínio em um único movimento contínuo, sem levantar o lápis, é um exemplo de função contínua. Nesta seção, investigaremos o que significa exatamente o fato de uma função ser contínua. Também estudaremos as propriedades das funções contínuas e veremos que muitos dos tipos de função apresentados na Seção 1.2 são contínuos.

Continuidade em um ponto

Para entendermos a continuidade, precisamos considerar uma função como a da Figura 2.54 cujos limites foram investigados no Exemplo 2, Seção 2.4.

EXEMPLO 1 Investigando a continuidade

Encontre os pontos nos quais a função f na Figura 2.54 é contínua e aqueles em que é descontínua.

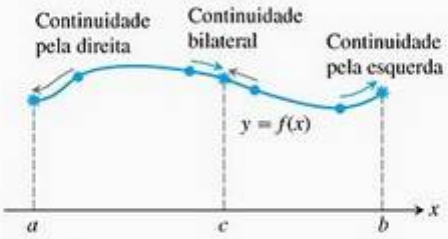


FIGURA 2.55 Continuidade nos pontos a, b e c.

SOLUÇÃO A função f é contínua em todos os pontos de seu domínio $[0, 4]$, exceto para $x = 1$, $x = 2$ e $x = 4$. Nesses pontos, há saltos no gráfico. Perceba a relação existente entre o limite de f e o valor de f em cada ponto do domínio da função.

Pontos nos quais f é contínua:

Quando $x = 0$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

Quando $x = 3$, $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$

Quando $0 < c < 4$, $c \neq 1, 2$, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Pontos nos quais f é descontínua:

Quando $x = 1$, $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe.

Quando $x = 2$, $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$, mas $1 \neq f(2)$.

Quando $x = 4$, $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 1$, mas $1 \neq f(4)$.

Quando $c < 0$, $c > 4$, estes pontos não estão no domínio de f.

Para definirmos a continuidade em um ponto do domínio de uma função, precisamos definir a continuidade em um ponto interior (o que envolve um limite bilateral) e em um ponto extremo (o que envolve um limite lateral) (Figura 2.55).

Definição **Contínua em um ponto**

Ponto interior: Uma função $y = f(x)$ é **contínua em um ponto interior** c de seu domínio quando

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Extremidades: Uma função $y = f(x)$ é **contínua na extremidade esquerda** a ou é **contínua na extremidade direita** b de seu domínio quando

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b), \text{ respectivamente.}$$

Se uma função f não é contínua em um ponto c, dizemos que f é **descontínua** em c e que c é um **ponto de descontinuidade** de f. Observe que c não precisa pertencer ao domínio de f.

Uma função f será **contínua à direita** de um ponto $x = c$ em seu domínio se $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$. Será **contínua à esquerda** de c se $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$. Assim, uma função será contínua em uma extremidade esquerda a de seu domínio se for contínua à direita de a, e será contínua em uma extremidade direita b de seu domínio se for contínua à esquerda de b. Uma função será contínua em um ponto interior c de seu domínio se e somente se for contínua à direita e à esquerda de c (Figura 2.55).

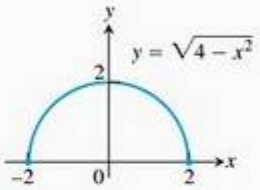


FIGURA 2.56 Uma função que é contínua em todos os pontos de seu domínio (Exemplo 2).

EXEMPLO 2 Uma função contínua em seu domínio

A função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é contínua em todos os pontos de seu domínio, $[-2, 2]$ (Figura 2.56), inclusive em $x = -2$, quando f é contínua à direita, e $x = 2$, quando f é contínua à esquerda.

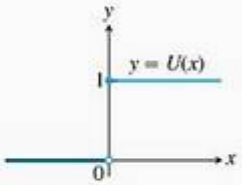


FIGURA 2.57 Uma função que apresenta continuidade à direita da origem, mas não à esquerda. Ela apresenta uma descontinuidade nesse ponto (Exemplo 3).

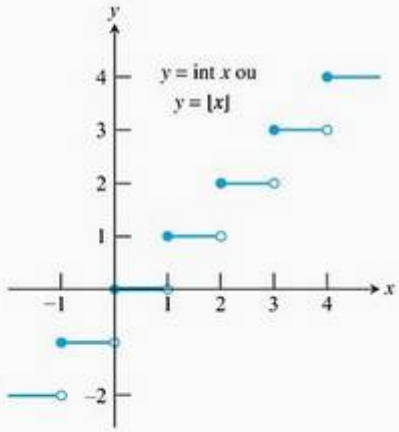


FIGURA 2.58 A função maior inteiro é contínua em todo ponto não inteiro. Ela é contínua à direita, mas não à esquerda, de cada ponto inteiro (Exemplo 4).

EXEMPLO 3 A função "salto unitário" tem descontinuidade de salto

A função "salto unitário" $U(x)$, traçada na Figura 2.57, é contínua à direita em $x = 0$, mas não é nem contínua à esquerda nem contínua em $x = 0$. Ela apresenta descontinuidade de salto em $x = 0$.

Resumimos a continuidade em um ponto na forma de um teste.

Teste de continuidade

Uma função $f(x)$ será contínua em $x = c$ se e somente se ela obedecer às três condições seguintes:

1. $f(c)$ existe (c está no domínio de f)
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ existe (f tem um limite quando $x \to (c)$)
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ (o limite é igual ao valor da função)

Para a continuidade em um lado e a continuidade em um ponto final, os limites nas partes 2 e 3 do teste devem ser trocados pelos limites laterais apropriados.

EXEMPLO 4 A função maior inteiro contido

A função $y = \lfloor x \rfloor$ ou $y = \text{int } x$, apresentada no Capítulo 1, está representada na Figura 2.58. Ela é descontínua em todo inteiro porque não existe limite em qualquer inteiro n:

$$\lim_{x\to n^-} \text{int } x = n - 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to n^+} \text{int } x = n,$$

de forma que os limites à esquerda e à direita não são iguais quando $x \to n$. Como int $n = n$, a função maior inteiro é contínua à direita de cada n inteiro (mas não contínua à esquerda).

A função maior inteiro é contínua em cada número real não inteiro. Por exemplo,

$$\lim_{x\to 1,5} \text{int } x = 1 = \text{int } 1,5$$

Em geral, se $n - 1 < c < n$, n um inteiro, então

$$\lim_{x\to c} \text{int } x = n - 1 = \text{int } c$$

A Figura 2.59 apresenta uma relação de tipos de descontinuidade. A função na Figura 2.59a é contínua em $x = 0$. A função na Figura 2.59b seria contínua se tivesse $f(0) = 1$. A função na Figura 2.59c seria contínua se $f(0)$ fosse 1 em vez de 2. As descontinuidades nas figuras 2.59b e 2.59c são **removíveis**. Cada função tem um limite quando $x \to 0$, e podemos removeja a descontinuidade fazendo $f(0)$ igual a seu limite.

As descontinuidades na Figura 2.59d em f são mais sérias: $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe, e não há forma de melhorar a situação trocando f em 0. A função escada na Figura 2.59d tem uma **descontinuidade de salto**: os limites laterais existem, mas têm valores distintos. A função $f(x) = 1/x^2$ na Figura 2.59e tem uma descontinuidade infinita. A função na Figura 2.59f apresenta uma **descontinuidade oscilante**: ela oscila demais para ter um limite quando $x \to 0$.

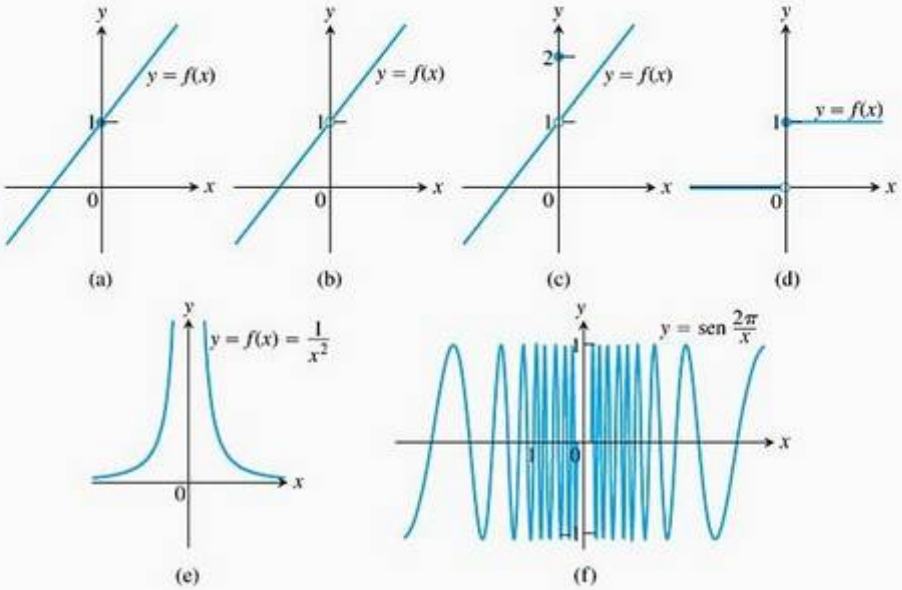


FIGURA 2.59 A função em (a) é contínua em $x = 0$; as funções nos itens (b) a (f) não são.

Funções contínuas

Uma função é **contínua em um intervalo** se e somente se for contínua em cada ponto do intervalo. Por exemplo, a função em forma de semicírculo representada na Figura 2.56 é contínua no intervalo $[-2, 2]$, que é o seu domínio. Uma **função contínua** é aquela que é contínua em cada ponto de seu domínio. Uma função contínua não precisa ser contínua em todo intervalo. Por exemplo, $y = 1/x$ não é contínua em $[-1, 1]$ (Figura 2.60), mas é contínua em todo o seu domínio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

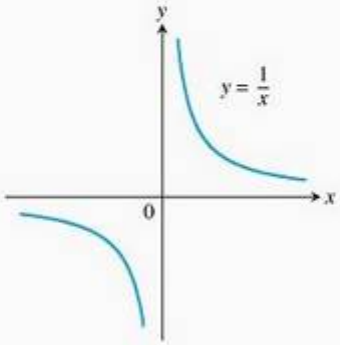


FIGURA 2.60 A função $y = 1/x$ é contínua em cada valor de x, exceto em $x = 0$. Ela apresenta um ponto de descontinuidade em $x = 0$ (Exemplo 5).

EXEMPLO 5 Identificando funções contínuas

(a) A função $y = 1/x$ (Figura 2.60) é uma função contínua por ser contínua em cada ponto de seu domínio. Entretanto, ela apresenta um ponto de descontinuidade em $x = 0$, porque aí não é definida; isto é, ela é descontínua em qualquer intervalo contendo $x = 0$.

(b) A função identidade $f(x) = x$ é contínua em todos os pontos, de acordo com o Exemplo 3, da Seção 2.3.

Combinações algébricas de funções contínuas são contínuas em qualquer lugar em que elas sejam definidas.

Teorema 9 **Propriedades de funções contínuas**

Se as funções f e g são contínuas em $x = c$, então as seguintes combinações são contínuas em $x = c$.

1. *Somas:*	$f + g$	
2. *Diferenças:*	$f - g$	
3. *Produtos:*	$f \cdot g$	
4. *Multiplicação por constantes:*	$k \cdot f$,	para qualquer número k.
5. *Quocientes:*	f/g,	uma vez que $g(c) \neq 0$.
6. *Potenciações:*	$f^{r/s}$,	uma vez que ela é definida num intervalo aberto contendo c, onde r e s são inteiros.

A maioria dos resultados no Teorema 9 é facilmente provada pelas regras do limite no Teorema 1, Seção 2.2. Por exemplo, para provar a propriedade da soma temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(f+g)(x) &= \lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) \\ &= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x), && \text{Regra da soma, Teorema 1.} \\ &= f(c)+g(c) && \text{Continuidade de } f, g \text{ em } c. \\ &= (f+g)(c)\end{aligned}$$

Isso mostra que $f + g$ é contínua.

EXEMPLO 6 Funções racionais e polinomiais são contínuas

(a) Todo polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ é contínuo porque $\lim_{x\to c} P(x) = P(c)$, de acordo com o Teorema 2, Seção 2.2.

(b) Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios, então a função racional $P(x)/Q(x)$ é contínua em todos os pontos em que é definida ($Q(c) \neq 0$), de acordo com a regra do quociente do Teorema 9.

EXEMPLO 7 Continuidade da função valor absoluto

A função $f(x) = |x|$ é contínua em qualquer valor de x. Se $x > 0$, temos $f(x) = x$, um polinômio. Se $x < 0$, temos $f(x) = -x$, outro polinômio. Por fim, na origem, $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$.

As funções $y = \text{sen}\, x$ e $y = \cos x$ são contínuas em $x = 0$, de acordo com o Exemplo 6 da Seção 2.2. Ambas são, na verdade, contínuas em qualquer ponto (veja o Exercício 62). O Teorema 9 implica, portanto, que todas as seis funções trigonométricas sejam contínuas em qualquer ponto em que sejam definidas. Por exemplo, $y = \text{tg}\, x$ é contínua em $\cdots \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2) \cup \cdots$.

A função inversa de qualquer função contínua também é contínua em todo o seu domínio. Esse resultado é sugerido pela observação de que o gráfico de f^{-1}, sendo a reflexão do gráfico f ao longo da reta $y = x$, não pode ter quaisquer interrupções quando o gráfico de f não tem interrupções. Uma prova rigorosa de que f^{-1} é contínua sempre que f é contínua é dada em textos mais avançados. Segue-se que as funções trigonométricas inversas são todas contínuas em seus domínios.

Na Seção 1.5, definimos informalmente a função exponencial $y = a^x$ por meio de seu gráfico. Recorde-se de que obtivemos o gráfico a partir do gráfico de $y = a^x$ para um número racional x preenchendo os vazios nos pontos irracionais x, de modo que a função $y = a^x$ foi definida para ser contínua ao longo de toda a reta real. A função inversa $y = \log_a x$ também é contínua. Em particular, a função exponencial natural $y = e^x$ e a função logaritmo natural $y = \ln x$ são ambas contínuas em seus domínios.

Compostas

Todas as compostas de funções contínuas são contínuas. A idéia é que, se $f(x)$ é contínua em $x = c$ e $g(x)$ é contínua em $x = f(c)$, então $g \circ f$ é contínua em $x = c$ (Figura 2.61). Nesse caso, o limite quando $x \to c$ é $g(f(c))$.

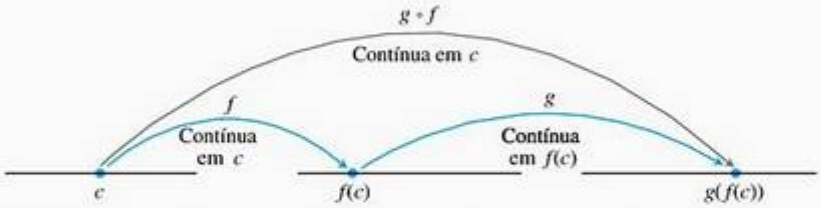


FIGURA 2.61 Compostas de funções contínuas são contínuas.

Teorema 10 Composta de funções contínuas
Se f é contínua em c e g é contínua em $f(c)$, então a composta $g \circ f$ é contínua em c.

Intuitivamente, o Teorema 10 é razoável porque se x está próximo de c, então $f(x)$ fica próximo de $f(c)$ e, como g é contínua em $f(c)$, segue-se que $g(f(x))$ fica próximo de $g(f(c))$.

A continuidade das compostas vale para qualquer número finito de funções. O único requisito é que cada função seja contínua onde é aplicada. Para um resumo da prova do Teorema 10, veja o Exercício 6 do Apêndice A.2.

EXEMPLO 8 Aplicando os teoremas 9 e 10

Mostre que as seguintes funções são contínuas em qualquer ponto de seus respectivos domínios.

(a) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ (b) $y = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x^4}$

(c) $y = \left|\dfrac{x-2}{x^2-2}\right|$ (d) $y = \left|\dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2+2}\right|$

SOLUÇÃO

(a) A função raiz quadrada é contínua em $[0, \infty)$ porque é uma potência racional da função identidade contínua $f(x) = x$ (Item 6, Teorema 9). A função dada é, assim, a composta pelo polinômio $f(x) = x^2 - 2x - 5$ com a função raiz quadrada $g(t) = \sqrt{t}$.

(b) O numerador é uma potência racional da função identidade; o denominador é um polinômio positivo em qualquer ponto. Portanto, o quociente é contínuo.

(c) O quociente $(x - 2)/(x^2 - 2)$ é contínuo para qualquer $x \neq \pm\sqrt{2}$, e a função é a composição desse quociente com a função valor absoluto contínua (Exemplo 7).

(d) Como a função seno é contínua em qualquer ponto (Exercício 62), o termo numerador x sen x é o produto das funções contínuas, e o termo denominador $x^2 + 2$ é um polinômio positivo em qualquer ponto. A função dada é a composta por um quociente de funções contínuas com a função valor absoluto contínua (Figura 2.62).

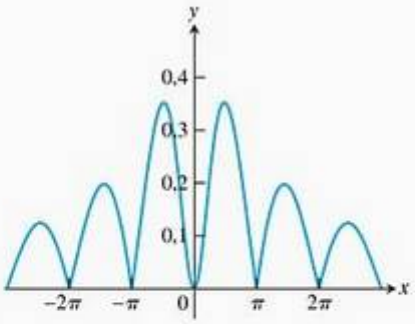


FIGURA 2.62 O gráfico sugere que $y = |(x \operatorname{sen} x)/(x^2 + 2)|$ é função contínua (Exemplo 8d).

Na verdade, o Teorema 10 é conseqüência de um resultado mais geral que vamos estabelecer e provar a seguir.

Teorema 11
Se g é contínua no ponto b e $\lim_{x\to c} f(x) = b$, então

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(b) = g(\lim_{x\to c}(f(x))$$

PROVA Seja $\epsilon > 0$ dado. Como g é contínua em b, existe um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(y) - g(b)| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |y - b| < \delta_1$$

Como $\lim_{x\to c} f(x) = b$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \delta_1 \text{ sempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

Se consideramos $y = f(x)$, temos então que

$$|y - b| < \delta_1 \text{ sempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

o que implica, de acordo com a primeira afirmação, que $|g(y) - g(b)| = |g(f(x)) - g(b)| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - c| < \delta$. De acordo com a definição de limite, isso prova que $\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(b)$.

EXEMPLO 9 Aplicando o Teorema 11

(a) $$\lim_{x\to 1} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1-x}{1-x^2}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x^2}\right)$$ O arco seno é contínuo.

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}\right)$$ Cancele o fator comum $(1 - x)$.

$$= \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}\, e^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}\cdot\exp\left(\lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x\right)$$ A exponencial é contínua.

$$= 1\cdot e^0 = 1$$

Extensão contínua até um ponto

A função $y = (\operatorname{sen} x)/x$ é contínua em qualquer ponto, exceto em $x = 0$. Nesse ponto, ela é como a função $y = 1/x$. Mas $y = (\operatorname{sen} x)/x$ é diferente de $y = 1/x$ porque tem um limite finito quando $x \to 0$ (Teorema 7). É possível, portanto, estender o domínio da função para incluir o ponto $x = 0$ de maneira tal que a função estendida seja contínua em $x = 0$. Definimos

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

A função $F(x)$ é contínua em $x = 0$ porque

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = F(0)$$

(Veja a Figura 2.63.)

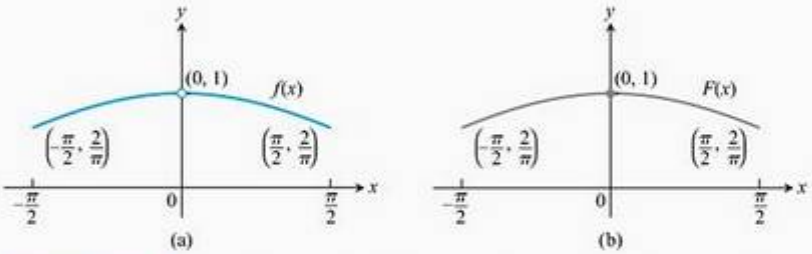


FIGURA 2.63 O gráfico (a) de $f(x) = (\text{sen } x)/x$ para $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ não inclui o ponto (0, 1) porque a função não é definida em $x = 0$. (b) Podemos removeja a descontinuidade do gráfico definindo a nova função $F(x)$ com $F(0) = 1$ e $F(x) = f(x)$ em qualquer outro ponto. Note que $F(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$.

Mais comumente, uma função (como uma função racional) pode ter um limite mesmo em um ponto onde não é definida. Se $f(c)$ não é definida, mas $\lim_{x\to c} f(x) = L$ existe, podemos definir uma nova função $F(x)$ pela regra

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \text{ está no domínio de } f \\ L, & \text{se } x = c \end{cases}$$

A função F é contínua em $x = c$. É conhecida como a **extensão contínua** de f em $x = c$. No caso de funções f racionais, as extensões contínuas normalmente são encontradas cancelando-se os fatores comuns.

EXEMPLO 10 Uma extensão contínua

Mostre que

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}, \quad x \neq 2$$

tem uma extensão contínua em $x = 2$ e determine essa extensão.

SOLUÇÃO Embora $f(2)$ não seja definida, se $x \neq 2$, temos

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

A nova função

$$F(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

é igual a $f(x)$ para $x \neq 2$, mas é contínua em $x = 2$, tendo nesse ponto o valor de 5/4. Logo, F é a extensão contínua de f em $x = 2$, e

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} f(x) = \frac{5}{4}$$

O gráfico de f está na Figura 2.64. A extensão contínua F tem o mesmo gráfico, exceto pelo fato de que não tem um furo em (2, 5/4). Na prática, F é a função f com o ponto de descontinuidade em $x = 2$ removido.

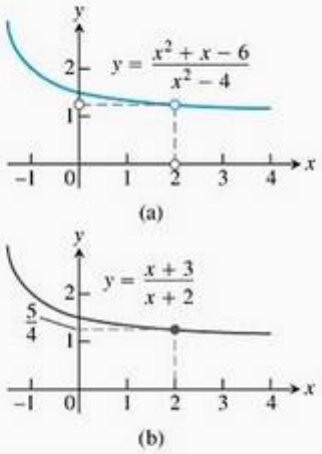


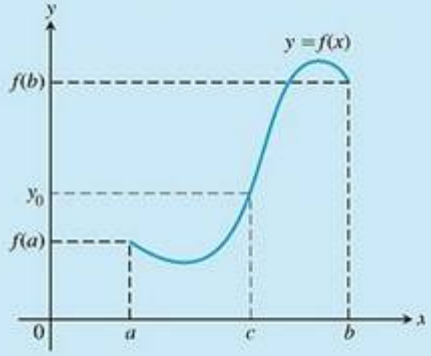
FIGURA 2.64 (a) O gráfico de $f(x)$ e (b) o gráfico de sua extensão contínua $F(x)$ (Exemplo 10).

Teorema do valor intermediário para funções contínuas

Funções contínuas em intervalos apresentam propriedades que as tornam particularmente úteis em matemática e suas aplicações. Uma delas é

a *propriedade do valor intermediário*. Diz-se que uma função tem a **propriedade do valor intermediário** se sempre que ela assume dois valores também assume todos os valores intermediários.

Teorema 12
O teorema do valor intermediário para funções contínuas
Uma função $y = f(x)$ que é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ assume cada valor entre $f(a)$ e $f(b)$. Em outras palavras, se y_0 for qualquer valor entre $f(a)$ e $f(b)$, então $y_0 = f(c)$ para algum c em $[a, b]$.



Geometricamente, o teorema do valor intermediário diz que qualquer reta horizontal $y = y_0$ cruzando o eixo y entre os números $f(a)$ e $f(b)$ cruzará a curva $y = f(x)$ pelo menos uma vez no intervalo $[a, b]$.

A prova do teorema do valor intermediário depende da propriedade de completude do sistema de números reais e pode ser encontrada em textos mais avançados.

A continuidade de f no intervalo é essencial para o Teorema 12. Se f é descontínua em um ponto do intervalo, a conclusão do teorema pode falhar, como acontece no caso da função traçada na Figura 2.65.

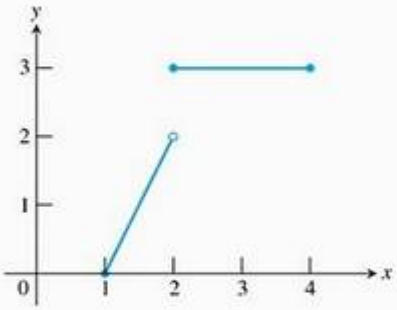


FIGURA 2.65 A função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 1 \le x < 2 \\ 3, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

não assume todos os valores entre $f(1) = 0$ e $f(4) = 3$; ela não assume qualquer valor entre 2 e 3.

UMA CONSEQÜÊNCIA PARA O ESBOÇO DE GRÁFICOS: CONECTIVIDADE O Teorema 12 fornece a razão pela qual o gráfico de uma função contínua em um intervalo não pode ter qualquer quebra nesse intervalo. O gráfico será **conexo** — uma curva, constituída por um só pedaço, como o gráfico de sen x. Não terá saltos como o gráfico da função maior inteiro contido (Figura 2.58) ou ramificações separadas como o gráfico de $1/x$ (Figura 2.60).

UMA CONSEQÜÊNCIA PARA A DETERMINAÇÃO DE RAÍZES

Chamamos a solução de uma equação $f(x) = 0$ uma **raiz** da equação ou **zero** da função f. O teorema do valor intermediário nos diz que, se f é contínua, então qualquer intervalo em que f muda de sinal contém um zero da função.

Em termos práticos, quando vemos o gráfico de uma função contínua cruzar o eixo horizontal na tela de um computador, sabemos que ela não está pulando o eixo. Existe realmente um ponto em que o valor da função é zero. Essa conseqüência leva a um procedimento para estimar os zeros de qualquer função contínua de que podemos esboçar o gráfico:

1. Esboce o gráfico da função sobre um intervalo grande para ver de maneira aproximada onde os zeros estão.
2. Aproxime ("zoom") em cada zero para estimar o valor de sua abscissa.

Você pode pôr em prática esse procedimento em sua calculadora gráfica ou computador em alguns dos exercícios. A Figura 2.66 mostra a seqüência típica de passos na solução gráfica da equação $x^3 - x - 1 = 0$.

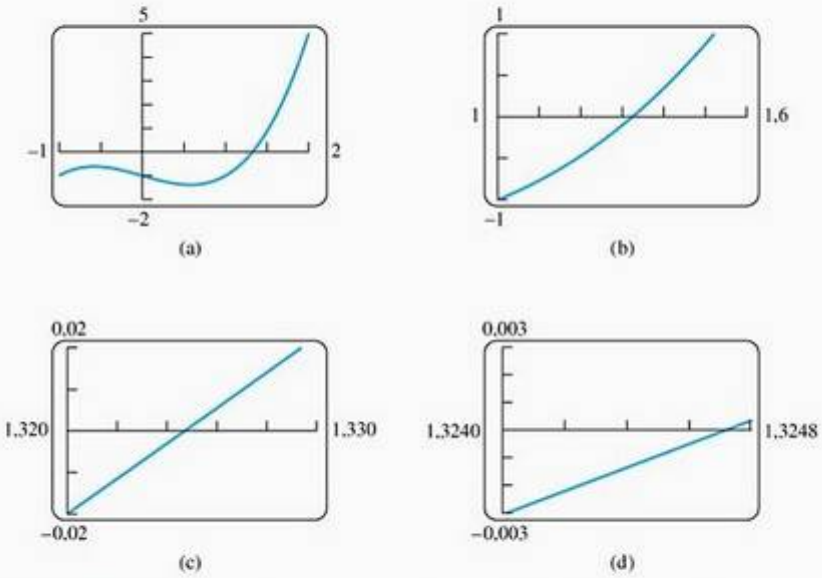


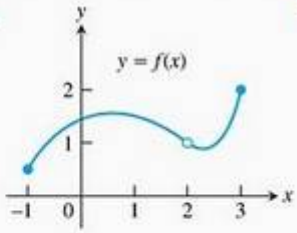
FIGURA 2.66 "Zoom" num zero da função $f(x) = x^3 - x - 1$. O zero está próximo de $x = 1{,}3247$.

Exercícios 2.6

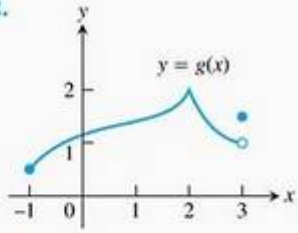
Continuidade em gráficos

Nos exercícios 1–4, diga se a função traçada é contínua em $[-1, 3]$. Se não, onde ela deixa de ser contínua e por quê?

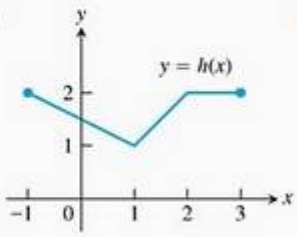
1.



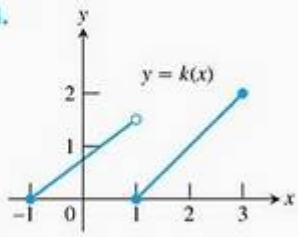
2.



3.



4.



Os exercícios 5–10 são sobre a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \le x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

traçada na figura a seguir.

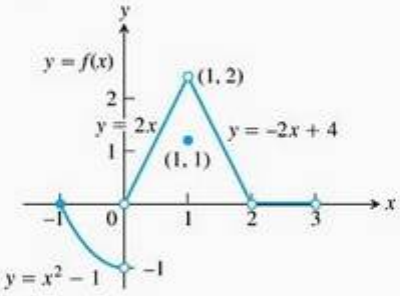


Gráfico para os exercícios 5–10

5. (a) Existe $f(-1)$? **(b)** Existe $\lim_{x \to -1^+} f(x)$?

(c) Existe $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$?

(d) f é contínua em $x = -1$?

6. (a) Existe $f(1)$?

(b) Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$?

(c) Existe $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$?

(d) f é contínua em $x = 1$?

7. (a) f é definida em $x = 2$? (Veja a definição de f.)

(b) f é contínua em $x = 2$?

8. Em quais valores de x, f é contínua?

9. Qual valor deve ser atribuído para $f(2)$ para tornar a função estendida contínua em $x = 2$?

10. Para qual novo valor $f(1)$ deve ser mudada para removeja a descontinuidade?

Aplicando o teste de continuidade

Nos exercícios 11 e 12, em quais pontos as funções deixam de ser contínuas? Em quais pontos, se houver algum, as descontinuidades são removíveis? E não removíveis? Justifique as respostas.

11. Exercício 1, Seção 2.4.

12. Exercício 2, Seção 2.4.

Em quais intervalos as funções são contínuas nos exercícios 13–28?

13. $y = \dfrac{1}{x-2} - 3x$

14. $y = \dfrac{1}{(x+2)^2} + 4$

15. $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 4x + 3}$

16. $y = \dfrac{x+3}{x^2 - 3x - 10}$

17. $y = |x-1| + \operatorname{sen} x$

18. $y = \dfrac{1}{|x|+1} - \dfrac{x^2}{2}$

19. $y = \dfrac{\cos x}{x}$

20. $y = \dfrac{x+2}{\cos x}$

21. $y = \operatorname{cosec} 2x$

22. $y = \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$

23. $y = \dfrac{x \operatorname{tg} x}{x^2+1}$

24. $y = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{1+\operatorname{sen}^2 x}$

25. $y = \sqrt{2x+3}$

26. $y = \sqrt[4]{3x-1}$

27. $y = (2x-1)^{1/3}$

28. $y = (2-x)^{1/5}$

Funções compostas

Determine os limites nos exercícios 29–34. As funções são contínuas no ponto sendo aproximado?

29. $\lim\limits_{x\to\pi} \operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)$

30. $\lim\limits_{t\to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\cos(\operatorname{tg} t)\right)$

31. $\lim\limits_{t\to 1} \sec(y\sec^2 y - \operatorname{tg}^2 y - 1)$

32. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}\cos(\operatorname{sen} x^{1/3})\right)$

33. $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} e^{\sqrt{x}}\right)$

34. $\lim\limits_{x\to 1} \cos^{-1}(\ln\sqrt{x})$

Extensão contínua

35. Defina $g(3)$ de maneira que estenda $g(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ para torná-la contínua em $x = 3$.

36. Defina $h(2)$ de maneira que estenda $h(t) = (t^2 + 3t - 10)/(t - 2)$ para torná-la contínua em $t = 2$.

37. Defina $f(1)$ de maneira que estenda $f(s) = (s^3 - 1)/(s^2 - 1)$ para torná-la contínua em $s = 1$.

38. Defina $g(4)$ de maneira que estenda $g(x) = (x^2 - 16)/(x^2 - 3x - 4)$ para torná-la contínua em $x = 4$.

39. Para qual valor de a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

é contínua em qualquer x?

40. Para qual valor de b

$$g(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ bx^2, & x \geq -2 \end{cases}$$

é contínua em qualquer x?

T Nos exercícios 41–44, esboce o gráfico da função f para verificar se ela parece ter uma extensão contínua para a origem. Se parece, use os comandos "trace" e "zoom" para encontrar um bom valor possível para a função estendida em $x = 0$. Se a função não parece ter uma extensão contínua, pode ser estendida para ser contínua à direita ou à esquerda na origem? Em caso afirmativo, em sua opinião, qual deve ser o valor da função estendida?

41. $f(x) = \dfrac{10^x - 1}{x}$

42. $f(x) = \dfrac{10^{|x|} - 1}{x}$

43. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}$

44. $f(x) = (1 + 2x)^{1/x}$

Teoria e exemplos

45. Sabe-se que uma função contínua $y = f(x)$ é negativa em $x = 0$ e positiva em $x = 1$. Por que a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução entre $x = 0$ e $x = 1$? Ilustre com um esboço.

46. Por que a equação $\cos x = x$ tem pelo menos uma solução?

47. **Raízes de uma equação cúbica** Mostre que a equação $x^3 - 15x + 1 = 0$ tem três soluções no intervalo $[-4, 4]$.

48. **Valor de uma função** Mostre que a função $F(x) = (x - a)^2 \cdot (x - b)^2 + x$ assume o valor $(a + b)/2$ para algum valor de x.

49. **Resolvendo uma equação** Se $f(x) = x^3 - 8x + 10$, mostre que há pelo menos um valor de c para o qual $f(c)$ é igual a (a) π; (b) $-\sqrt{3}$; (c) 5.000.000.

50. Explique por que as cinco afirmações seguintes pedem a mesma informação.

    (a) Determine os zeros de $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

    (b) Determine a abscissa dos pontos onde a curva $y = x^3$ cruza a reta $y = 3x + 1$.

    (c) Determine todos os valores de x para os quais $x^3 - 3x = 1$.

    (d) Determine a abscissa dos pontos onde a curva cúbica $y = x^3 - 3x$ cruza a reta $y = 1$.

    (e) Resolva a equação $x^3 - 3x - 1 = 0$.

51. **Descontinuidade removível** Dê um exemplo de uma função $f(x)$ que seja contínua para todos os valores de x, exceto $x = 2$, onde ela apresenta uma descontinuidade removível. Explique como você sabe que f é descontínua em $x = 2$ e que a descontinuidade é removível.

52. **Descontinuidade não removível** Dê um exemplo de uma função $g(x)$ que seja contínua para todos os valores de x, exceto $x = -1$, onde ela apresenta uma descontinuidade não removível. Explique como você sabe que g é descontínua aí e por que a descontinuidade não é removível.

53. **Uma função descontínua em todos os pontos**

    (a) Use o fato de que todo intervalo não vazio de números reais contém números tanto racionais como irracionais para mostrar que a função

    $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ for racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ for irracional} \end{cases}$$

    é descontínua em todos os pontos.

    (b) f é contínua à direita ou à esquerda em algum ponto?

54. Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas para $0 \le x \le 1$, poderia $f(x)/g(x)$ ser descontínua em um ponto de $[0, 1]$? Justifique sua resposta.

55. Se a função produto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é contínua em $x = 0$, $f(x)$ e $g(x)$ devem ser contínuas em $x = 0$? Justifique sua resposta.

56. **Composta descontínua de funções contínuas** Dê um exemplo de funções f e g, ambas contínuas em $x = 0$, para as quais a composta $f \circ g$ é descontínua em $x = 0$. Isso contradiz o Teorema 10? Justifique sua resposta.

57. **Funções contínuas que nunca são zero** É verdade que uma função contínua que nunca é zero em um intervalo nunca muda de sinal nesse intervalo? Justifique sua resposta.

58. **Esticando um elástico** É verdade que se você esticar um elástico movendo uma ponta para a direita e a outra para a esquerda, algum ponto do elástico continuará em sua posição original? Justifique sua resposta.

59. **Um teorema de ponto fixo** Suponha que uma função f seja contínua no intervalo fechado $[0, 1]$ e que $0 \le f(x) \le 1$ para cada x em $[0, 1]$. Mostre que deve existir um número c em $[0, 1]$ tal que $f(c) = c$ (c é chamado um **ponto fixo** de f).

60. **A propriedade da preservação de sinal de funções contínuas** Seja f definida em um intervalo (a, b) e suponha que $f(c) \neq 0$ em algum c onde f seja contínua. Mostre que existe um intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ em c onde f tenha o mesmo sinal que $f(c)$. Perceba quão importante é essa conclusão. Apesar de f ser definida em todo (a, b), não é necessário que seja contínua em qualquer outro ponto, exceto c. Isso e a condição $f(c) \neq 0$ são suficientes para que f seja diferente de zero (positiva ou negativa) em todo um (pequeno) intervalo.

61. Prove que f é contínua em c se, e somente se,

    $$\lim_{h \to 0} f(c + h) = f(c)$$

62. Use o Exercício 61 em conjunto com as identidades

    $$\text{sen}\,(h + c) = \text{sen}\, h \cos c + \cos h\, \text{sen}\, c$$
    $$\cos\,(h + c) = \cos h \cos c - \text{sen}\, h\, \text{sen}\, c$$

    para provar que $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = \cos x$ são contínuas em qualquer ponto $x = c$.

Resolvendo equações graficamente

T Use uma calculadora ou um computador para resolver as equações nos exercícios 63–70.

63. $x^3 - 3x - 1 = 0$

64. $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

65. $x(x - 1)^2 = 1$ (uma raiz)

66. $x^x = 2$

67. $\sqrt{x} + \sqrt{1 + x} = 4$

68. $x^3 - 15x + 1 = 0$ (três raízes)

69. $\cos x = x$ (uma raiz). Certifique-se de estar usando o modo radiano.

70. $2\,\text{sen}\, x = x$ (três raízes). Certifique-se de estar usando o modo radiano.

2.7 Retas tangentes e derivadas

Nesta seção, continuamos a discussão sobre secantes e tangentes iniciada na Seção 2.1. Calcularemos limites dos coeficientes angulares das secantes para determinar as tangentes às curvas.

O que *é* uma tangente a uma curva?

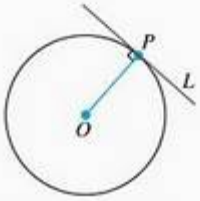


FIGURA 2.67 L será tangente ao círculo em P se passar por P perpendicularmente ao raio OP.

Para círculos, a tangência é "natural". Uma reta L será tangente a um círculo em um ponto P se L passar por P perpendicularmente ao raio em P (Figura 2.67). Uma reta como essa apenas *toca* o círculo. Mas o que significa dizer que uma reta L é tangente a outra curva C em um ponto P? Generalizando a partir da geometria do círculo, podemos dizer que significa uma das afirmações a seguir:

1. L passa por P perpendicularmente à reta de P ao centro de C.
2. L passa somente por um ponto de C: o ponto P.
3. L passa por P e fica somente de um lado de C.

Embora essas afirmações sejam válidas se C for um círculo, nenhuma delas funcionará de maneira consistente para curvas mais gerais. A maioria das curvas não tem centro, e uma reta que talvez quiséssemos chamar "tangente" pode cortar C em outros pontos ou cruzar C no ponto de tangência (Figura 2.68).

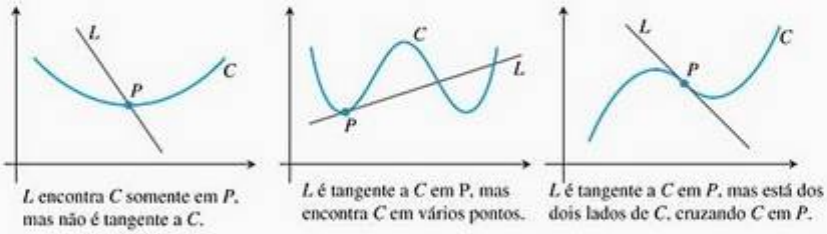


FIGURA 2.68 Derrubando mitos sobre retas tangentes.

Para definirmos "tangência" para curvas em geral, precisamos de um método *dinâmico*, que leve em conta o comportamento das secantes que passam por P e pontos próximos Q, quando Q se move em direção a P ao longo da curva (Figura 2.69). Assim:

1. Começamos com o que *podemos* calcular — o coeficiente angular da secante PQ.

Companion Website
Biografia histórica
Pierre de Fermat (1601–1665)

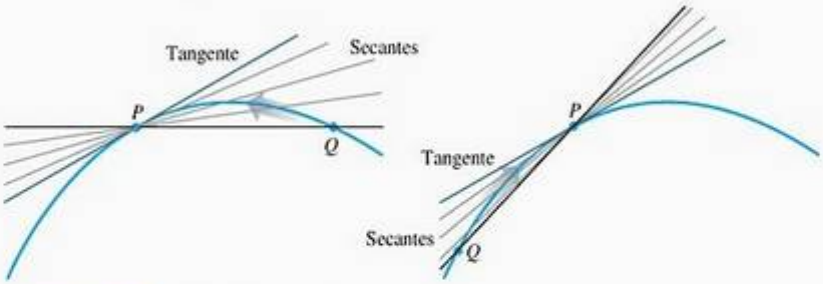


FIGURA 2.69 O método dinâmico para a tangência. A tangente a uma curva em P é a reta através de P cujo coeficiente angular é o limite dos coeficientes angulares das secantes quando $Q \to P$ de cada lado.

2. Investigamos o limite do coeficiente angular da secante quando Q se aproxima de P ao longo da curva.
3. Se o limite existe, então o tomamos como o coeficiente angular da curva em P e definimos a tangente à curva em P como a reta através de P com esse coeficiente angular.

Esse método é o que foi usado nos exemplos da pedra em queda e das moscas-das-frutas na Seção 2.1.

EXEMPLO 1 Reta tangente a uma parábola

Determine o coeficiente angular da parábola $y = x^2$ no ponto $P(2, 4)$. Escreva uma equação para a tangente à parábola nesse ponto.

SOLUÇÃO Começamos com uma reta secante através de $P(2, 4)$ e $Q(2 + h, (2 + h)^2)$ próximo a P. Então escrevemos uma expressão para o coeficiente angular da secante PQ e investigamos o que acontece com o coeficiente angular quando Q se aproxima de P ao longo da curva:

$$\text{Coeficiente angular da secante} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$$
$$= \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$$

Se $h > 0$, então Q fica acima e à direita de P, como na Figura 2.70. Se $h < 0$, então Q fica à esquerda de P (não mostrado). Em cada caso, quando Q se aproxima de P ao longo da curva, h tende a zero e o coeficiente angular da secante tende a 4:

$$\lim_{h \to 0}(h + 4) = 4$$

Tomamos 4 como o coeficiente angular da parábola em P.

A tangente à parábola em P é a reta através de P com coeficiente angular 4:

$$y = 4 + 4(x - 2) \qquad \text{Equação ponto/coeficiente angular.}$$
$$y = 4x - 4.$$

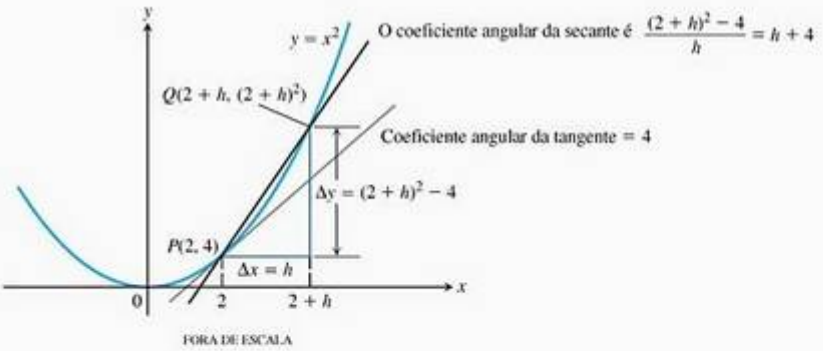


FIGURA 2.70 Diagrama para obter o coeficiente angular da parábola $y = x^2$ no ponto $P(2, 4)$ (Exemplo 1).

Obtendo uma tangente ao gráfico de uma função

Como determinar uma tangente a uma curva? Esse problema foi a questão matemática dominante no início do século XVII. Em óptica, a tangente

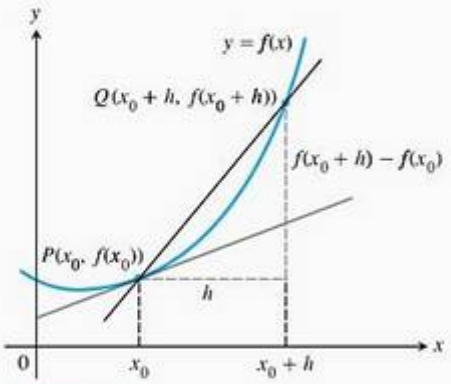


FIGURA 2.71 O coeficiente angular da tangente em P é $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

determinava o ângulo no qual o raio de luz penetraria numa lente curva. Em mecânica, a tangente determinava a direção do movimento de um corpo em qualquer ponto ao longo de seu percurso. Em geometria, as tangentes a duas curvas num ponto de interseção determinavam o ângulo em que as curvas se cortavam. Para determinarmos uma tangente a uma curva arbitrária $y = f(x)$ em um ponto $P(x_0, f(x_0))$, usamos o mesmo processo dinâmico. Calculamos o coeficiente angular da secante através de P e de um ponto $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Então, investigamos o limite do coeficiente angular quando $h \to 0$ (Figura 2.71). Se o limite existe, então o tomamos como coeficiente angular da curva em P e definimos a tangente em P como a reta que passa por P que tem esse coeficiente angular.

Definições **Coeficiente angular e reta tangente**

O coeficiente angular da curva $y = f(x)$ em um ponto $P(x_0, f(x_0))$ é o número

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{(desde que o limite exista)}$$

A **reta tangente** à curva f em P é a reta que passa por P e tem esse coeficiente angular.

Sempre que elaboramos uma nova definição, é bom testá-la com objetos conhecidos para ter certeza de que dará os resultados desejados em casos familiares. O Exemplo 2 mostra que a nova definição de coeficiente angular está de acordo com a definição antiga (Apêndice B.2) quando a aplicamos a retas não verticais.

EXEMPLO 2 Testando a definição

Mostre que a reta $y = mx + b$ e é a própria tangente em qualquer ponto $(x_0, mx_0 + b)$.

SOLUÇÃO Seja $f(x) = mx + b$ e organizemos o trabalho em três passos.

1. Determine $f(x_0)$ e $f(x_0 + h)$.

$$f(x_0) = mx_0 + b$$
$$f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + b = mx_0 + mh + b$$

2. Determine o coeficiente angular $\lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)/h$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(mx_0+mh+b)-(mx_0+b)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{mh}{h} = m$$

3. Determine a equação da reta tangente usando a equação ponto/coeficiente angular. A reta tangente no ponto $(x_0, mx_0 + b)$ é

$$y = (mx_0+b) + m(x - x_0)$$
$$y = mx_0 + b + mx - mx_0$$
$$y = mx + b.$$

Vamos resumir os passos do Exemplo 2.

Como achar a tangente à curva $y = f(x)$ em (x_0, y_0)

1. Calcule $f(x_0)$ e $f(x_0 + h)$.
2. Calcule o coeficiente angular

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{f}$$

3. Se o limite existe, então determine a reta tangente como

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

EXEMPLO 3 Coeficiente angular e tangente para $y = 1/x$, $x \neq 0$

(a) Determine o coeficiente angular da curva $y = 1/x$ em $x = a \neq 0$.
(b) Onde o coeficiente angular é $-1/4$?
(c) O que acontece com a tangente à curva no ponto $(a, 1/a)$ quando a varia?

SOLUÇÃO

(a) Dado $f(x) = 1/x$. O coeficiente angular em $(a, 1/a)$ é

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{ha(a+h)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}\end{aligned}$$

Observe que foi preciso escrever "$\lim_{h \to 0}$" antes de cada fração até o momento em que pudemos calcular o limite fazendo a substituição $h = 0$. O número a pode ser positivo ou negativo, mas não zero.

(b) O coeficiente angular de $y = 1/x$ no ponto $x = a$ é $-1/a^2$. Este será $-1/4$, uma vez que

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$$

Essa equação equivale a $a^2 = 4$, então $a = 2$ ou $a = -2$. A curva tem coeficiente angular $-1/4$ nos pontos $(2, 1/2)$ e $(-2, -1/2)$ (Figura 2.72).

(c) Observe que o coeficiente angular $-1/a^2$ é sempre negativo se $a \to 0$. Quando $a \to 0^+$, o coeficiente angular tende a $-\infty$ e a tangente se torna cada vez mais inclinada (Figura 2.73). Notamos a mesma situação quando $a \to 0^-$. Quando a se afasta da origem em qualquer direção, o coeficiente angular tende a 0^- e a tangente se torna menos inclinada.

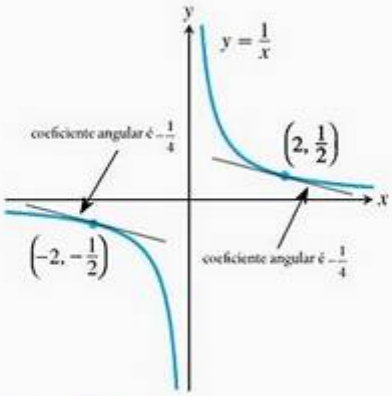


FIGURA 2.72 As duas retas tangentes a $y = 1/x$ tendo coeficiente angular $-1/4$ (Exemplo 3).

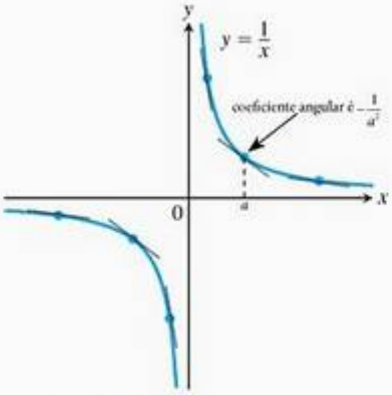


FIGURA 2.73 Os coeficientes angulares das tangentes, inclinadas à origem, vão diminuindo à medida que o ponto de tangência se afasta da origem.

Taxas de variação: derivada em um ponto

A expressão

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

é chamada **razão incremental ou diferenças dividida de f em x_0 com incremento h**. Se a razão incremental tem um limite quando h tende a zero, esse limite é denominado **derivada de f em x_0**. Se interpretamos a razão incremental como um coeficiente angular da secante, a derivada nos dá o coeficiente angular da tangente e da curva no ponto onde $x = x_0$. Se interpretamos a razão incremental como uma taxa média de variação, como fizemos na Seção 2.1, a derivada nos dá a taxa de variação da função em relação a x no ponto $x = x_0$. A derivada é uma das duas ferramentas matemáticas mais importantes usadas em cálculo. Começaremos a estudá-la no Capítulo 3. A outra ferramenta importante é a integral, e começaremos a estudá-la no Capítulo 5.

EXEMPLO 4 Velocidade instantânea (continuação da Seção 2.1, exemplos 1 e 2)

Nos exemplos 1 e 2 da Seção 2.1, estudamos a velocidade de uma pedra em queda livre a partir do repouso próximo à superfície da terra. Sabíamos que a pedra caía $y = 4{,}9t^2$ metros durante os primeiros t segundos e usamos uma seqüência de velocidades médias sobre os intervalos cada vez mais curtos para estimar sua velocidade no instante $t = 1$. Qual *era* exatamente a velocidade da pedra nesse momento?

SOLUÇÃO Seja $f(t) = 4{,}9t^2$. A velocidade média da pedra no intervalo entre $t = 1$ e $t = 1 + h$ segundos era

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{4{,}9(1+h)^2-4{,}9(1)^2}{h}=\frac{4{,}9(h^2+2h)}{h}=4{,}9(h+2)$$

A velocidade da pedra no instante $t = 1$ era

$$\lim_{h\to 0} 4{,}9(h+2)=4{,}9(0+2)=9{,}8 \text{ m/s}$$

Nossa estimativa inicial de 9,8 metros por segundo estava certa.

Resumo

Acabamos de discutir coeficientes angulares de curvas, retas tangentes a uma curva, a taxa de variação de uma função, o limite da razão incremental é a derivada de uma função em um ponto. Todas essas idéias referem-se à mesma coisa, assim resumida:

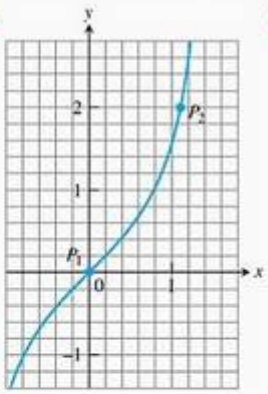
1. O coeficiente angular de $y = f(x)$ em $x = x_0$
2. O coeficiente angular da tangente à curva $y = f(x)$ em $x = x_0$
3. A taxa de variação de $f(x)$ em relação a x em $x = x_0$
4. A derivada de f em $x = x_0$
5. O limite da razão incremental, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Exercícios 2.7

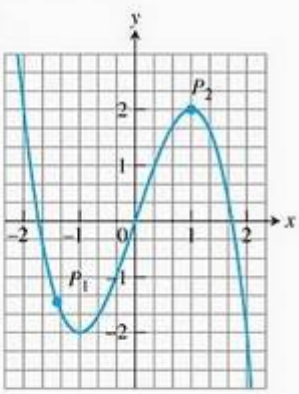
Coeficientes angulares e retas tangentes

Nos exercícios 1–4, use o fundo quadriculado e uma régua para fazer estimativas do coeficiente angular da curva (em unidades y por unidades x) nos pontos P_1 e P_2. As curvas apresentadas aqui podem ter sofrido alguma mudança durante o processo editorial; portanto, suas respostas podem ser diferentes daquelas fornecidas no final do livro.

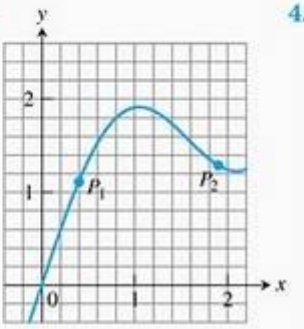
1.



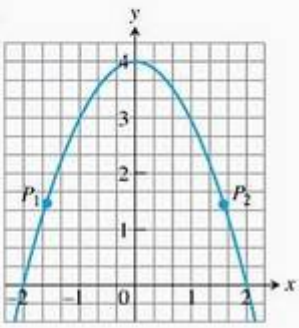
2.



3.



4.



Nos exercícios 5–10, determine uma equação para a tangente à curva nos pontos dados. Esboce a curva e a tangente juntas.

5. $y = 4 - x^2, \quad (-1, 3)$

6. $y = (x - 1)^2 + 1, \quad (1, 1)$

7. $y = 2\sqrt{x}, \quad (1, 2)$

8. $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad (-1, 1)$

9. $y = x^3, \quad (-2, -8)$

10. $y = \dfrac{1}{x^3}, \quad \left(-2, -\dfrac{1}{8}\right)$

Nos exercícios 11–18, determine o coeficiente angular da curva nos pontos dados. Determine, então, a equação para a tangente à curva nesse ponto.

11. $f(x) = x^2 + 1, \quad (2, 5)$

12. $f(x) = x - 2x^2, \quad (1, -1)$

13. $g(x) = \dfrac{x}{x - 2}, \quad (3, 3)$

14. $g(x) = \dfrac{8}{x^2}, \quad (2, 2)$

15. $h(t) = t^3, \quad (2, 8)$

16. $h(t) = t^3 + 3t, \quad (1, 4)$

17. $f(x) = \sqrt{x}, \quad (4, 2)$

18. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad (8, 3)$

Nos exercícios 19–22, determine o coeficiente angular da curva no ponto correspondente ao valor de x indicado.

19. $y = 5x^2, \quad x = -1$

20. $y = 1 - x^2, \quad x = 2$

21. $y = \dfrac{1}{x - 1}, \quad x = 3$

22. $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}, \quad x = 0$

Retas tangentes com coeficientes angulares especificados

Em quais pontos os gráficos das funções dos exercícios 23 e 24 possuem tangentes horizontais?

23. $f(x) = x^2 + 4x - 1$

24. $g(x) = x^3 - 3x$

25. Determine as equações de todas as tangentes à curva $y = 1/(x - 1)$ que tenham coeficiente angular -1.

26. Determine a equação da reta que apresente coeficiente angular $1/4$ e que seja tangente à curva $y = \sqrt{x}$.

Taxas de variação

27. **Um objeto caindo de uma torre** Um objeto é largado do topo de uma torre de 100 m de altura. A distância a que o objeto está do solo após t segundos é $100 - 4{,}9t^2$ m. Qual é a velocidade do objeto após dois segundos de queda?

28. **Velocidade de um foguete** t segundos após decolar, a altura de um foguete é $3t^2$ pés. Qual é a velocidade de ascensão do foguete dez segundos após a decolagem?

29. **Circunferência de área variável** Qual é a taxa de variação da área de uma circunferência ($A = \pi r^2$) em relação ao raio quando este é $r = 3$?

30. **Esfera de volume variável** Qual é a taxa de variação do volume de uma esfera ($V = (4/3)\,\pi r^3$) em relação ao raio quando este é $r = 2$?

Verificando a existência de tangentes

31. O gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

possui uma tangente na origem? Justifique sua resposta.

32. O gráfico de

$$g(x) = \begin{cases} x\,\text{sen}\,(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

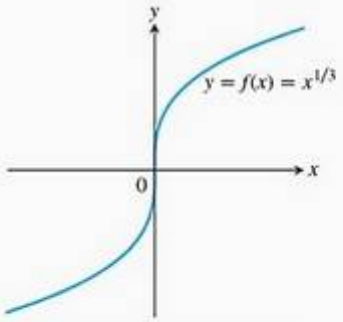
possui uma tangente na origem? Justifique sua resposta.

Tangentes verticais

Dizemos que a curva $y = f(x)$ é uma **tangente vertical** no ponto $x = x_0$ se $\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0))/h = \infty$ ou $-\infty$.

Tangente vertical quando $x = 0$ (veja a figura a seguir):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty$$

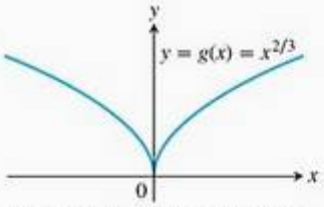


TANGENTE VERTICAL NA ORIGEM

Sem tangente vertical quando $x = 0$ (veja a figura a seguir):

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{2/3} - 0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{1/3}}$$

não existe, pois o limite é ∞ à direita e $-\infty$ à esquerda.



SEM TANGENTE VERTICAL NA ORIGEM

33. O gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

possui uma tangente vertical na origem? Justifique sua resposta.

34. O gráfico de

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

possui uma tangente vertical no ponto (0, 1)? Justifique sua resposta.

(a) Trace as curvas dos exercícios 35–44. Onde os gráficos parecem ter tangentes verticais? **T**

(b) Confirme suas opiniões dadas no item **(a)** ao calcular os limites. Antes, porém, leia a introdução aos exercícios 33 e 34.

35. $y = x^{2/5}$

36. $y = x^{4/5}$

37. $y = x^{1/5}$

38. $y = x^{3/5}$

39. $y = 4x^{2/5} - 2x$

40. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

41. $y = x^{2/3} - (x-1)^{1/3}$

42. $y = x^{1/3} + (x-1)^{1/3}$

43. $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

44. $y = \sqrt{|4 - x|}$

USANDO O COMPUTADOR

Traçando retas secantes e tangentes

Utilize um SAC para realizar as etapas a seguir para as funções nos exercícios 45–48.

(a) Trace $y = f(x)$ sobre o intervalo $(x_0 - ½) \leq x \leq (x_0 + 3)$.

(b) Mantendo x_0 fixo, a razão incremental **T**

$$q(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

em x_0 torna-se uma função de h. Introduza essa função na área de trabalho de seu SAC.

(c) Determine o limite de q quando $h \to 0$.

(d) Defina as retas secantes $y = f(x_0) + q \cdot (x - x_0)$ para $h = 3$, 2 e 1. Trace-as junto com f e a reta tangente no intervalo no item **(a)**.

45. $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 0$

46. $f(x) = x + \dfrac{5}{\pi}, \quad x_0 = 1$

47. $f(x) = x + \text{sen}\,(2x), \quad x_0 = \pi/2$

48. $f(x) = \cos x + 4\,\text{sen}\,(2x), \quad x_0 = \pi$

Questões de revisão

1. Qual é a taxa média de variação da função $g(t)$ ao longo do intervalo $t = a$ a $t = b$? Como isso está relacionado a uma reta secante?

2. Que limite deve ser calculado para se encontrar a taxa de variação de uma função $g(t)$ em $t = t_0$?

3. Qual seria a definição informal ou intuitiva do limite
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L?$$
Por que a definição seria "informal"? Exemplifique.

4. A existência e o valor do limite de uma função $f(x)$ quando x tende a x_0 dependem, de alguma maneira, do que acontece quando $x = x_0$? Explique e exemplifique.

5. Que tipos de comportamento de uma função implicam a não-existência do limite? Dê exemplos.

6. Quais são os teoremas empregados para o cálculo de limites? Exemplifique como esses teoremas são utilizados.

7. Qual é a relação entre limites laterais e limites? Como essa relação pode ser utilizada algumas vezes no cálculo de um limite ou na demonstração de que não existe limite? Exemplifique.

8. Qual é o valor de $\lim_{\theta \to 0} ((\text{sen } \theta)/\theta)$? Faz diferença que θ seja medido em graus ou radianos? Explique.

9. O que significa exatamente $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$? Dê um exemplo em que você determine um $\delta > 0$ para dado f, L, x_0 e $\epsilon > 0$ na definição precisa de limite.

10. Dê definições precisas das seguintes afirmações.
    (a) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$ (b) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$
    (c) $\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$ (d) $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$

11. O que significam $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$? Exemplifique.

12. Quais são os $\lim_{x \to \pm\infty} k$ (k sendo uma constante) e $\lim_{x \to \pm\infty} (1/x)$? Como você aplicaria esses resultados a outras funções? Exemplifique.

13. Como se calcula o limite de uma função racional quando $x \to \pm\infty$? Exemplifique.

14. O que são assíntotas horizontais, verticais e oblíquas? Exemplifique.

15. Que condições devem ser satisfeitas por uma função para que seja contínua em um ponto interior ao seu domínio? E nas extremidades deste?

16. Como a análise do gráfico de uma função pode ajudar a dizer onde ela é contínua?

17. O que significa dizer que uma função é contínua à direita de um ponto? E contínua à esquerda? Como estão relacionadas a continuidade e a continuidade lateral?

18. O que pode ser dito sobre a continuidade de polinômios? De funções racionais? De funções trigonométricas? De potências racionais e combinações algébricas de funções? De funções exponenciais logarítmicas? De funções inversas? De funções compostas? De valores absolutos de funções?

19. Sob quais circunstâncias é possível estender uma função $f(x)$ para que ela seja contínua em um ponto $x = c$? Dê um exemplo.

20. O que é uma função contínua em um intervalo?

21. O que é uma função contínua? Dê exemplos para justificar que uma função que não é contínua em todo o seu domínio pode ser contínua em certos intervalos de seu domínio.

22. Quais são os tipos básicos de descontinuidade? Dê um exemplo de cada. O que é uma descontinuidade removível? Exemplifique.

23. O que é uma função com a propriedade do valor intermediário? Que condições garantem que uma função tenha essa propriedade em um intervalo? Quais são as conseqüências no gráfico e na resolução da equação $f(x) = 0$?

24. Habitualmente, dizemos uma função é contínua se pudermos traçar seu gráfico sem retirar o lápis do papel. Explique o porquê disso.

25. O que significa dizer que uma reta é tangente a uma curva C no ponto P?

26. Qual é o significado da fórmula
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}?$$
Interprete essa fórmula geométrica e fisicamente.

27. Como você determina que a tangente à curva $y = f(x)$ é um ponto (x_0, y_0) pertencente à curva?

28. Como a inclinação da curva $y = f(x)$ em $x = x_0$ se relaciona com a taxa de variação da função em relação a x em $x = x_0$? E com a derivada de f em x_0?

Exercícios práticos

Limites e continuidade

1. Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le -1 \\ -x, & -1 < x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Discuta, em detalhes, limites, limites laterais, continuidade e continuidade lateral de f quando $x = -1, 0$ e 1. Alguma das descontinuidades pode ser removida? Justifique.

2. Faça o mesmo para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 1/x, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

3. Suponha que $f(t)$ e $g(t)$ existam para qualquer t e que $\lim_{t\to t_0} f(t) = -7$ e $\lim_{t\to t_0} g(t) = 0$. Determine o limite quando $t \to t_0$ para as seguintes funções:

(a) $3f(t)$ (b) $(f(t))^2$

(c) $f(t) \cdot g(t)$ (d) $\dfrac{f(t)}{g(t) - 7}$

(e) $\cos(g(t))$ (f) $|f(t)|$

(g) $f(t) + g(t)$ (h) $1/f(t)$

4. Suponha que $f(x)$ e $g(x)$ existam para qualquer x e que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1/2$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = \sqrt{2}$. Determine os limites quando $x \to 0$ para as seguintes funções:

(a) $-g(x)$ (b) $g(x) \cdot f(x)$

(c) $f(x) + g(x)$ (d) $1f(x)$

(e) $x + f(x)$ (f) $\dfrac{f(x) \cdot \cos x}{x - 1}$

Nos exercícios 5 e 6, calcule o valor de $\lim_{x\to 0} g(x)$ para que as igualdades sejam verdadeiras.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4 - g(x)}{x}\right) = 1$ 6. $\lim\limits_{x\to -4}\left(x \lim\limits_{x\to 0} g(x)\right) = 2$

7. Em quais intervalos as seguintes funções são contínuas?

(a) $f(x) = x^{1/3}$ (b) $g(x) = x^{3/4}$

(c) $h(x) = x^{-2/3}$ d) $k(x) = x^{-1/6}$

8. Em quais intervalos as seguintes funções são contínuas?

(a) $f(x) = \operatorname{tg} x$ (b) $g(x) = \operatorname{cosec} x$

(c) $h(x) = \dfrac{\cos x}{x - \pi}$ d) $k(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Determinando limites

Nos exercícios 9–24, calcule o limite ou explique por que ele não existe.

9. $\lim \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^3 + 5x^2 - 14x}$

(a) Quando $x \to 0$ (b) Quando $x \to 2$

10. $\lim \dfrac{x^2 + x}{x^5 + 2x^4 + x^3}$

(a) Quando $x \to 0$ (b) Quando $x \to -1$

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$ 12. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x^4 - a^4}$

13. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$ 14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2 + x} - \dfrac{1}{2}}{x}$ 16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2 + x)^3 - 8}{x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$ 18. $\lim\limits_{x\to \pi^-} \operatorname{cosec}$

19. $\lim\limits_{x\to \pi} \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2} + \operatorname{sen} x\right)$ 20. $\lim\limits_{x\to 1} e^{(x^2+x-2)}$

21. $\lim\limits_{t\to 3^+} \ln(t - 3)$ 22. $\lim\limits_{t\to 1} t^2 \ln\left(2 - \sqrt{t}\right)$

23. $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \sqrt{\theta}\, e^{\cos(\pi/\theta)}$ 24. $\lim\limits_{z\to 0^+} \dfrac{2e^{1/z}}{e^{1/z} + 1}$

Nos exercícios 25–28, calcule o limite de $g(x)$ quando x se aproxima do valor indicado.

25. $\lim\limits_{x\to 0^+} (4g(x))^{1/3} = 2$ 26. $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}} \dfrac{1}{x + g(x)} = 2$

27. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 + 1}{g(x)} = \infty$ 28. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{5 - x^2}{\sqrt{g(x)}} = 0$

Limites no infinito

Calcule os limites dos exercícios 29–42 .

29. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$ 30. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2 + 3}{5x^2 + 7}$

31. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 8}{3x^3}$ 32. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x^2 - 7x + 1}$

33. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 - 7x}{x + 1}$ 34. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4 + x^3}{12x^3 + 128}$

35. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\lfloor x \rfloor}$ (Caso possua uma calculadora gráfica, tente esboçar o gráfico da função para $-5 \le x \le 5$.)

36. $\lim\limits_{\theta\to \infty} \dfrac{\cos\theta - 1}{\theta}$ (Caso possua uma calculadora gráfica, tente esboçar o gráfico de $f(x) = x(\cos(1/x) - 1)$ próximo à origem para "ver" o limite no infinito)

37. $\lim_{x\to\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x + 2\sqrt{x}}{x + \operatorname{sen} x}$

38. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2/3} + x^{-1}}{x^{2/3} + \cos^2 x}$

39. $\lim_{x\to\infty} e^{1/x} \cos \frac{1}{x}$

40. $\lim_{t\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$

41. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{tg}^{-1} x$

42. $\lim_{t\to-\infty} e^{3t} \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{t}$

Extensão contínua

43. É possível estender $f(x) = x(x^2 - 1)/|x^2 - 1|$ para que ela seja contínua em $x = 1$ ou -1? Justifique sua resposta. (Esboce o gráfico da função — você vai achar esse gráfico interessante.)

44. Explique por que a função $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ não tem extensão contínua em $x = 0$.

T Nos exercícios 45–48, esboce o gráfico da função para verificar se ela parece ter uma extensão contínua em um ponto dado a. Se parece, use os comandos "Trace" e "Zoom" para encontrar um bom valor possível para a função estendida em a. Se a função não parece ter uma extensão contínua, pode ser estendida para ser contínua à direita ou à esquerda? Em caso afirmativo, em sua opinião, qual deve ser o valor da função estendida?

45. $f(x) = \frac{x - 1}{x - \sqrt[4]{x}}, \quad a = 1$

46. $g(\theta) = \frac{5\cos\theta}{4\theta - 2\pi}, \quad a = \pi/2$

47. $h(t) = (1 + |t|)^{1/t}, \quad a = 0$

48. $k(x) = \frac{x}{1 - 2^{|x|}}, \quad a = 0$

Raízes

49. Seja $f(x) = x^3 - x - 1$.

T (a) Demonstre que f possui uma raiz entre -1 e 2.

(b) Resolva a equação $f(x) = 0$ graficamente, com um erro de magnitude inferior a 10^{-8}.

(c) Pode-se demonstrar que o valor exato da resposta do item (b) é:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3}$$

Calcule esse valor e compare-o com o valor que você determinou no item (b).

50. Seja $f(\theta) = \theta^3 - 2\theta + 2$.

(a) Demonstre que f possui uma raiz entre -2 e 0.

(b) Resolva a equação $f(\theta) = 0$ graficamente, com um erro de magnitude inferior a 10^{-4}.

(c) Pode-se demonstrar que o valor exato da resposta do item (b) é:

$$\left(\sqrt{\frac{19}{27}} - 1\right)^{1/3} - \left(\sqrt{\frac{19}{27}} + 1\right)^{1/3}$$

Calcule esse valor e compare-o com o valor que você determinou no item (b).

Exercícios adicionais

1. **Atribuindo um valor a 0^0** As regras da potenciação (veja o Apêndice B.4) dizem que $a^0 = 1$ se a for qualquer número diferente de zero, e também que $0^n = 0$ se n for qualquer número positivo.

Se tentássemos aplicar essas regras ao caso 0^0, chegaríamos a resultados conflitantes. Pela primeira regra, teríamos que $0^0 = 1$, enquanto, pela segunda, teríamos que $0^0 = 0$.

Essa não é uma questão de certo ou errado. Nenhuma das regras se aplica nesse caso, portanto não há contradição. Podemos, na verdade, atribuir a 0^0 qualquer valor desejado, desde que convençamos os outros a aceitá-lo.

Qual valor você gostaria que 0^0 tivesse? Eis um exemplo que pode ajudá-lo a decidir. (Veja o Exercício 2 para outro exemplo.)

(a) Calcule x^x para $x = 0{,}1; 0{,}01; 0{,}001$; e assim por diante até o limite de sua calculadora. Anote os resultados obtidos. Qual é o comportamento observado?

(b) Trace o gráfico da função $y = x^x$ para $0 < x \le 1$. Mesmo que a função seja indefinida para $x \le 0$, o gráfico vai se aproximar do eixo y pela direita. Para qual valor de y a curva parece convergir? Aumente a escala para analisar melhor.

2. **Uma razão para não querer que 0^0 seja 0 ou 1** À medida T que o número x aumenta ao longo dos valores positivos, os números $1/x$ e $1/(\ln x)$ se aproximam de zero. O que acontece com o número

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/(\ln x)}$$

à medida que x aumenta? Eis duas maneiras de descobrir.

(a) Calcule f para $x = 10, 100, 1.000$ e assim por diante até o limite de sua calculadora. Qual é o padrão observado?

(b) Faça o gráfico da função f em vários domínios, incluindo algum que contenha a origem. O que você vê? Trace os valores de y ao longo do gráfico. O que você pode notar?

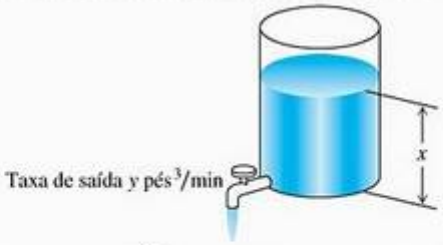
3. **A contração de Lorentz** De acordo com a teoria da relatividade, o comprimento de um objeto — por exemplo, de um

foguete — parece a um observador depender da velocidade com que o objeto se desloca em relação ao próprio observador. Se ele medir o comprimento L_0 do foguete em repouso, depois com a velocidade v, o comprimento parecerá

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Essa é a equação da contração de Lorentz. Nela, c é a velocidade da luz no vácuo, cerca de 3×10^8 m/s. O que acontece com L à medida que v aumenta? Calcule $\lim_{v \to c^-} L$. Por que foi necessário empregar o limite lateral à esquerda?

4. **Controlando o fluxo de um tanque enquanto a água escoa** A lei de Torricelli diz que, ao se esvaziar um tanque como o indicado na figura, a taxa y de escoamento da água é uma constante multiplicada pela raiz quadrada da altura da coluna de água x. A constante depende da forma e do tamanho da válvula de saída.



Suponha que $y = \sqrt{x}/2$ para dado tanque. Seu objetivo é manter uma taxa de vazão razoavelmente constante, e, para isso, você adiciona água ao tanque com uma mangueira de vez em quando. Qual é a altura da coluna de água que você deve estabelecer para manter a taxa de vazão

(a) a 0,2 pé³/min da taxa $y_0 = 1$ pé³/min?

(b) a 0,1 pé³/min da taxa $y_0 = 1$ pé³/min?

5. **Expansão térmica em equipamentos de precisão** Sabemos que os materiais, em sua maioria, se expandem quando aquecidos e se contraem quando resfriados. As dimensões de certos equipamentos de laboratório podem ser tão críticas que os locais onde eles são fabricados precisam ser mantidos à mesma temperatura dos laboratórios onde vão ser instalados. Uma típica barra de alumínio de 10 cm de largura, a 70 °F, terá

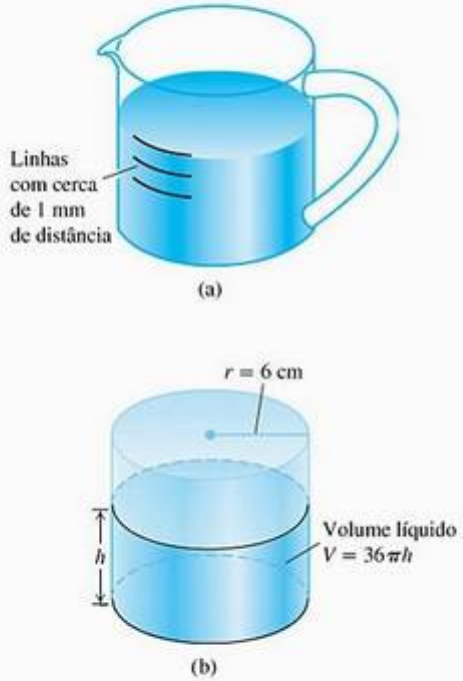
$$y = 10 + (t - 70) \times 10^{-4}$$

centímetros de largura a uma temperatura t próxima. Suponha que você vá usar uma barra como esta em um detector de ondas gravitacionais, no qual a largura da barra deve variar no máximo 0,0005 cm em relação aos 10 cm ideais. Qual a variação máxima de temperatura (em relação aos 70 °F originais) permitida para que a barra se mantenha dentro das especificações?

6. **Linhas numa jarra medidora** O interior de uma típica jarra medidora de 1 litro é um cilindro circular reto com raio de 6 cm (veja a figura a seguir). O volume de água que colocamos na jarra é, portanto, uma função do nível h no qual a jarra é cheia, sendo a fórmula

$$V = \pi 6^2 h = 36\pi h$$

Com qual precisão precisamos medir h para medir 1 litro de água (1.000 cm³) com um erro de no máximo 1% (10 cm³)?



Uma jarra medidora de 1 litro (a), modelada como um cilindro circular reto (b) de raio $r = 6$ cm.

Definição precisa de limite

Nos exercícios 7–10, use a definição formal de limite para provar que a função é contínua em x_0.

7. $f(x) = x^2 - 7, \quad x_0 = 1$

8. $g(x) = 1/(2x), \quad x_0 = 1/4$

9. $h(x) = \sqrt{2x - 3}, \quad x_0 = 2$

10. $F(x) = \sqrt{9 - x}, \quad x_0 = 5$

11. **Unicidade dos limites** Mostre que uma função não pode ter dois limites diferentes no mesmo ponto. Ou seja, se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

12. Prove a regra do múltiplo constante do limite:
$\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$ para qualquer constante k.

13. **Limites laterais** Se $\lim_{x \to 0^+} f(x) = A$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = B$, então calcule:

(a) $\lim_{x \to 0^+} f(x^3 - x)$ (b) $\lim_{x \to 0^-} f(x^3 - x)$

(c) $\lim_{x \to 0^+} f(x^2 - x^4)$ (d) $\lim_{x \to 0^-} f(x^2 - x^4)$

14. Limites e continuidade Quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas? Se verdadeira, diga por quê; se falsa, dê um contra-exemplo (isto é, um exemplo que confirme a falsidade).

(a) Se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, mas $\lim_{x\to a} g(x)$ não existe, então $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ não existe.

(b) Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ não existem, então $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ não existe.

(c) Se f é contínua em x, então $|f|$ também é.

(d) Se $|f|$ é contínua em a, então f também é.

Nos exercícios 15 e 16, use a definição formal de limite para provar que a função tem uma extensão contínua no valor dado de x.

15. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}, \quad x = -1$ **16.** $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6}, \quad x = 3$

17. Uma função contínua em um único ponto Seja

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

(a) Demonstre que f é contínua quando $x = 0$.

(b) Utilize o fato de que cada intervalo não vazio de números reais contém tanto números racionais quanto números irracionais para demonstrar que f não é contínua em qualquer valor não nulo de x.

18. A função régua de Dirichlet Se x é um número racional, então x pode ser escrito de modo único como quociente de inteiros m/n em que $n > 0$ e m e n não têm fatores comuns maiores que 1. (Dizemos que uma fração assim está *simplificada*. Por exemplo, 6/4 simplificada é 3/2.) Seja $f(x)$ definida para todo x no intervalo $[0, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{se } x = m/n \text{ for um número racional simplificado} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Por exemplo, $f(0) = f(1) = 1$, $f(1/2) = 1/2$, $f(1/3) = f(2/3) = 1/3$, $f(1/4) = f(3/4) = 1/4$ e assim por diante.

(a) Demonstre que f é descontínua em qualquer número racional entre $[0, 1]$.

(b) Demonstre que f é contínua em qualquer número irracional entre $[0, 1]$. (*Dica*: Se ϵ é dado número positivo, demonstre que há apenas um conjunto finito de números racionais r entre $[0, 1]$ tal que $f(r) \geq \epsilon$.)

(c) Esboce o gráfico de f. Em sua opinião, por que f é denominada "função régua"?

19. Pontos antípodas Há alguma razão para aceitarmos como verdadeira a afirmação de que há sempre um par de pontos antípodas (diametralmente opostos) sobre a linha do Equador em que a temperatura seja a mesma? Explique.

20. Se $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = 3$ e $\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = -1$, determine $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$.

21. Raízes de uma equação quadrática que é quase linear A equação $ax^2 + 2x - 1 = 0$, onde a é constante, apresenta duas raízes se $a > -1$ e $a \neq 0$, uma positiva e outra negativa.

$$r_+(a) = \frac{-1 + \sqrt{1 + a}}{a}, \quad r_-(a) = \frac{-1 - \sqrt{1 + a}}{a}$$

(a) O que acontece a $r_+(a)$ quando $a \to 0$? E quando $a \to -1^+$?

(b) O que acontece a $r_-(a)$ quando $a \to 0$? E quando $a \to -1^+$?

(c) Fundamente suas conclusões traçando os gráficos de $r_+(a)$ e $r_-(a)$ em função de a. Descreva o que você observa.

(d) Para reforçar, trace o gráfico de $f(x) = ax^2 + 2x - 1$ para $a = 1; 0{,}5; 0{,}2; 0{,}1;$ e $0{,}05$, simultaneamente.

22. Raiz de uma equação Demonstre que a equação $x + 2\cos x = 0$ tem pelo menos uma raiz.

23. Funções limitadas Uma função f a valores reais é **limitada superiormente** em um conjunto D se existe um número N tal que $f(x) \leq N$ para todos os valores de x em D. Chamamos N quando existe um **limitante superior** para f em D, e dizemos que f é limitada superiormente por N. De modo similar, dizemos que f é **limitada inferiormente** em D se existe um número M tal que $f(x) \geq M$ pra todos os valores de x em D. Chamamos M quando existe um **limitante inferior** para f em D, e dizemos que f é limitada inferiormente por M. Dizemos que f é **limitada** em D se ela é limitada inferior e superiormente.

(a) Demonstre que f é limitada em D se, e somente se, existe um número B tal que $|f(x)| \leq B$ para todos os valores de x em D.

(b) Suponha que f seja limitada superiormente por N. Demonstre que, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, então $L \leq N$.

(c) Suponha que f seja limitada inferiormente por M. Demonstre que, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, então $L \geq M$.

24. *Max* $\{a, b\}$ *e min* $\{a, b\}$

(a) Demonstre que a expressão

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b}{2} + \frac{|a - b|}{2}$$

é igual a a se $a \geq b$ e igual a b se $b \geq a$. Em outras palavras, $\max\{a, b\}$ fornece o maior dos dois números a e b.

(b) Encontre uma expressão similar para $\min\{a, b\}$, o menor de a e b.

Limites generalizados envolvendo $\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$

A fórmula $\lim_{\theta\to 0}(\text{sen}\,\theta)/\theta = 1$ pode ser generalizada. Se $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ e $f(x)$ nunca é zero em um intervalo aberto contendo o ponto $x = c$, exceto possivelmente no próprio c, então

$$\lim_{x\to c}\frac{\text{sen}\,f(x)}{f(x)} = 1$$

Eis diversos exemplos.

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x^2}{x^2} = 1$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x^2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x^2}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = 1\cdot 0 = 0$

(c) $\lim_{x\to -1}\frac{\text{sen}\,(x^2 - x - 2)}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{\text{sen}\,(x^2 - x - 2)}{(x^2 - x - 2)}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x^2 - x - 2)}{x+1} = 1\cdot\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = -3$$

(d) $\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}\left(1-\sqrt{x}\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}\left(1-\sqrt{x}\right)}{1-\sqrt{x}}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1} =$

$$1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(x-1)\left(1+\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(x-1)\left(1+\sqrt{x}\right)} = -\frac{1}{2}$$

Calcule os limites nos exercícios 25–30.

25. $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,(1-\cos x)}{x}$

26. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\sqrt{x}}$

27. $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,(\text{sen}\,x)}{x}$

28. $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,(x^2+x)}{x}$

29. $\lim_{x\to 2}\frac{\text{sen}\,(x^2-4)}{x-2}$

30. $\lim_{x\to 9}\frac{\text{sen}\left(\sqrt{x}-3\right)}{x-9}$

Exercícios avançados

1. Se f for uma função contínua em $[a, b]$, com $f(a)\,f(b) < 0$ e, além disso, f tiver um único zero z nesse intervalo, podemos determinar esse zero com a precisão que quisermos da seguinte forma. Considere o ponto médio $(b + a)/2$ de $[a, b]$ como primeira aproximação de z (observe que o erro nessa aproximação é menor que $(b - a)/2$). Estudando o sinal de f no ponto médio, podemos decidir se a raiz está em $[a, (b + a)/2]$ ou em $[(b + a)/2, b]$ e podemos repetir o processo nesse novo intervalo cujo comprimento é a metade do comprimento de $[a, b]$. É claro que podemos repetir esse procedimento quantas vezes quisermos, e em cada passo estaremos dividindo a estimativa do erro por 2. Use esse procedimento para obter uma aproximação de raiz cúbica de 2 com erro absoluto menor que 0,01. (*Sugestão*: tome $f(x) = x^3 - 2$, $[a, b] = [1, 2]$.)

Nos exercícios 2 e 3 a seguir, esboce o gráfico de uma função contínua definida em todos os reais, exceto no 4, satisfazendo simultaneamente às condições dadas:

2. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 4} f(x) = \infty$.

3. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$, não existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

4. Dê um exemplo de uma função f que satisfaça às condições **(a)** do Exercício 2; **(b)** do Exercício 3.

5. Mostre que se f e g são funções reais tais que $|g(x)| \le M$ em um intervalo aberto contendo a, e $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, então existe $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ e esse limite é igual a 0.

6. Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\,\text{sen}\,(1/x), & \text{se } x \ne 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$.

7. Considere a função $f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{se } x \ne 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(a) Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

(b) Calcule $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. f é contínua em $x = 0$?

(c) Use uma calculadora gráfica ou um SAC para tentar esboçar o gráfico de f perto de $x = 0$. Repita usando "Zoom".

(d) Comente o resultado obtido em **(c)**.

8. Mostre que se existe $\lim_{x\to 2}\frac{f(x) - f(2)}{x-2}$ e $f(x) \ge f(2)$ para todo $x > 2$, então $\lim_{x\to 2}\frac{f(x) - f(2)}{x-2} \ge 0$.

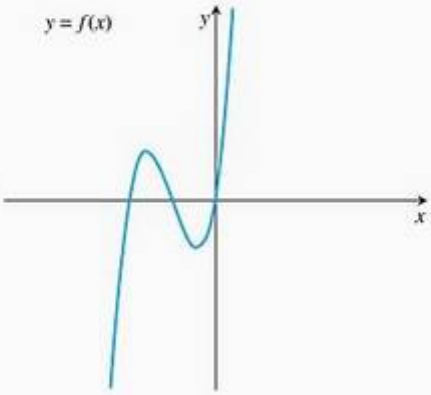
9. A seguir, são apresentados esboços dos gráficos de uma função f e de outras quatro funções. Em cada item, decida qual dos gráficos esboçados corresponde à função g, e justifique sua resposta.

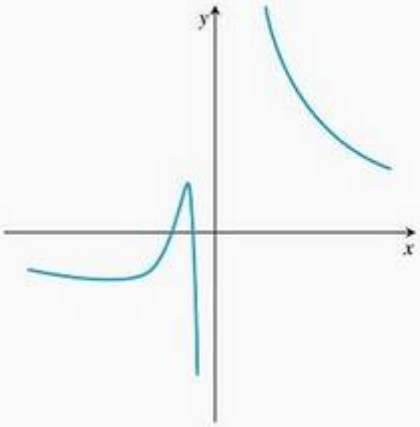
(a) $g(x) = f(x + c)$, onde $c > 0$

(b) $g(x) = f(1/x)$

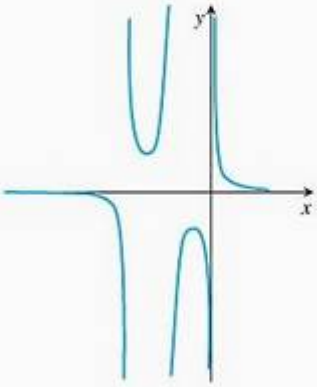
(c) $g(x) = 1/f(x)$

(d) $g(x) = f(1/x^2)$

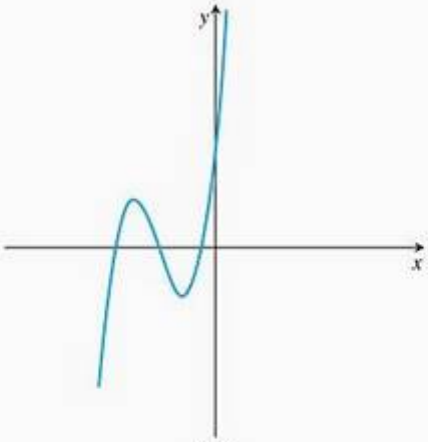




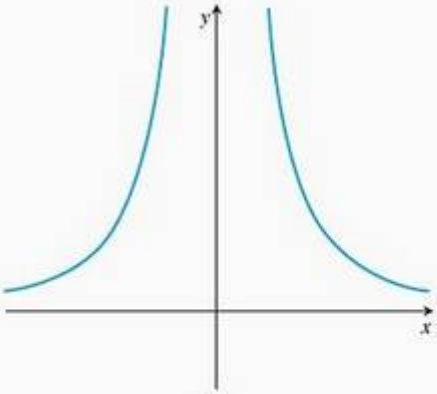
(i)



(ii)



(iii)



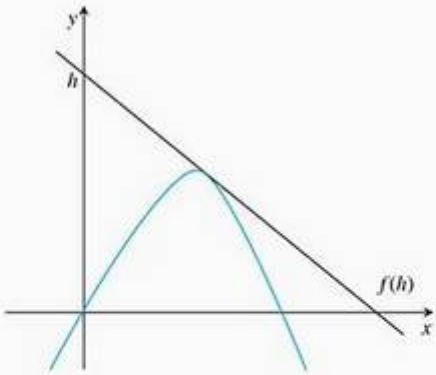
(iv)

10. Vários modelos matemáticos foram propostos para descrever o crescimento populacional. O modelo proposto por Malthus (1798) tem como solução $p(t) = p_0 e^{\lambda t}$, onde λ é a taxa de crescimento populacional, p_0 é a população no instante $t = 0$, e $p(t)$ é a população no instante t. Já a equação logística, modelo proposto por Verhulst (1834), tem como solução $p(t) = \dfrac{p_0 p_\infty}{(p_\infty - p_0)e^{-\lambda t} + p_0}$, onde $p_\infty > 0$ é população de equilíbrio. Calcule $\lim_{t\to\infty} p(t)$ no modelo de Verhulst e compare o resultado com o do modelo de Malthus.

11. **(a)** Calcule $\lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$

(b) Ache a equação $y = ax + b$ da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ para $x = \pi/6$.

12. Um plano vertical corta um prédio com perfil parabólico. A equação que descreve o perfil do prédio é $y = -bx(x - 2a)$, onde a e b são constantes positivas (veja a figura). Suponha que um potente holofote seja colocado no eixo vertical, em uma altura h maior que a altura do prédio. Seja $f(h)$ o ponto do eixo x que separa a sombra do prédio da parte iluminada. Calcule $f(h)$.



Projetos de aplicação de tecnologia

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Leve até o limite

Parte I

Parte II (Zero elevado à potência zero: o que isso significa?)

Parte III (Limites laterais)

Visualize e interprete o conceito de limite por meio de experimentos gráficos e numéricos.

Parte IV (A diferença que uma potência faz)

Veja como os limites podem ser sensíveis a várias potências de x.

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Indo ao infinito

Parte I (Explorando o comportamento da função quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$)

Esse módulo proporciona quatro exemplos para investigar o comportamento de uma função quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$.

Parte II (Taxas de crescimento)

Observe gráficos que *parecem* contínuos, embora a função não seja contínua. Várias questões relativas à continuidade são exploradas, gerando resultados que podem surpreendê-lo.

3 Derivação

RESUMO No Capítulo 2, definimos o coeficiente angular de uma curva como o limite dos coeficientes angulares das secantes. Esse limite, chamado derivada, mede a taxa de variação de uma função e é um dos conceitos mais importantes do cálculo. As derivadas são usadas para calcular velocidade e aceleração, para estimar a taxa de disseminação de uma doença, para estabelecer níveis de produção mais eficientes, para calcular as dimensões ideais de uma lata cilíndrica, para determinar a idade de um artefato pré-histórico e em muitas outras aplicações. Neste capítulo, desenvolveremos técnicas para calcular derivadas com facilidade e aprenderemos a usá-las para aproximar certas funções muito complicadas.

3.1 A derivada como função

Companion Website
Ensaio histórico
A derivada

No final do Capítulo 2, definimos o coeficiente angular de uma curva $y = f(x)$ no ponto onde $x = x_0$ como

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Chamamos esse limite, quando ele existia, de derivada de f em x_0. Agora, estudaremos a derivada como uma *função* derivada de f, considerando o limite em cada ponto do domínio de f.

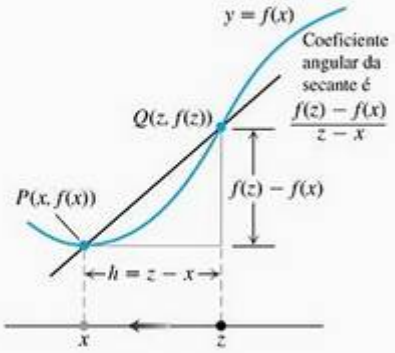
Definição **Função derivada**
A **derivada** de uma função $f(x)$ em relação à variável x é a função f' cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista.

Na definição, usamos a notação $f(x)$ em vez de simplesmente f para enfatizar a variável independente x, em relação à qual estamos derivando. O domínio de f' é o conjunto de pontos no domínio de f para o qual o limite existe; ele pode ser igual ou menor que o domínio de f. Se f' existe para determinado valor de x, dizemos que f é **derivável** em x. Se f' existe em qualquer ponto no domínio de f, chamamos f **derivável**.

Se escrevemos $z = x + h$, então $h = z - x$, e h tende a 0 se e somente se z tende a x. Logo, uma definição equivalente da derivada é a seguinte (veja a Figura 3.1):



Derivada de f em x é

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

FIGURA 3.1 O modo como escrevemos a razão incremental para a derivada de uma função f depende de como identificamos os pontos envolvidos.

Fórmula alternativa para a derivada

$$f'x = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Calculando a derivada a partir de sua definição

O processo para calcular uma derivada é chamado **derivação**. Para enfatizar a idéia de que a derivação é uma operação realizada na função $y = f(x)$, também usamos a notação

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

para indicar a derivada $f'(x)$. Os exemplos 2 e 3 da Seção 2.7 ilustram o processo de derivação para as funções $y = mx + b$ e $y = 1/x$. O Exemplo 2 mostra que

$$\frac{d}{dx}(mx + b) = m$$

Por exemplo,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x - 4\right) = \frac{3}{2}$$

No Exemplo 3, vemos que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

A seguir, veremos dois outros exemplos.

EXEMPLO 1 Aplicando a definição

Derive $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

SOLUÇÃO Aqui, temos $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

e

$$f(x + h) = \frac{(x + h)}{(x + h) - 1}, \text{ logo}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x + h}{x + h - 1} - \dfrac{x}{x - 1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(x + h)(x - 1) - x(x + h - 1)}{(x + h - 1)(x - 1)} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x + h - 1)(x - 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x + h - 1)(x - 1)} = \frac{-1}{(x - 1)^2}$$

Com freqüência, você precisará saber a derivada de $\sqrt{x}$ para $x > 0$ $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

EXEMPLO 2 Derivada da função raiz quadrada

(a) Encontre a derivada de $y = \sqrt{x}$ para $x > 0$.
(b) Encontre a reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ para $x = 4$.

SOLUÇÃO

(a) Usamos a forma equivalente para calcular $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(b) O coeficiente angular da curva em $x = 4$ é

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

A tangente é a reta que passa por (4, 2), tendo coeficiente angular 1/4 (Figura 3.2):

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

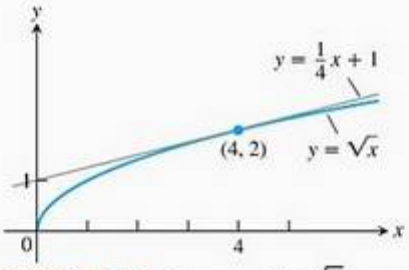


FIGURA 3.2 A curva $y = \sqrt{x}$ e sua tangente em (4, 2). Determinamos o coeficiente angular da tangente calculando a derivada em $x = 4$ (Exemplo 2).

No Exemplo 6, consideraremos a derivada de $y = \sqrt{x}$ quando $x = 0$.

Notações

Há vários modos de representar a derivada de uma função $y = f(x)$, onde a variável independente é x e a dependente é y. Algumas das notações alternativas mais comuns para a derivada são:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x)$$

Os símbolos d/dx e D indicam a operação de derivação e são chamados **operadores de derivação.** Lemos dy/dx como "a derivada de y em relação a x" e df/dx e $(d/dx)\,f(x)$ como "a derivada de f em relação a x". As notações "linha" y' e f' vêm de notações que Newton usava para as derivadas. Já as notações d/dx são similares às usadas por Leibniz. O símbolo dy/dx não deve ser considerado uma razão (pelo menos até introduzirmos a idéia de "diferenciais" na Seção 3.10).

Tome cuidado para não se confundir achando que a notação $D(f)$ representa o domínio da função f; ela representa a função derivada f'. A diferença ficará clara pelo contexto.

Para indicar o valor de uma derivada em um número específico $x = a$, usamos a notação

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}$$

Por exemplo, no Exemplo 2b, poderíamos escrever

$$f'(4) = \frac{d}{dx}\sqrt{x}\bigg|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\bigg|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Para calcular uma expressão, às vezes, usamos o colchete direito,], em vez da barra vertical, |.

Representando uma derivada graficamente

Muitas vezes conseguimos fazer gráficos razoáveis da derivada de $y = f(x)$ estimando os coeficientes angulares no gráfico de f. Ou seja, desenhamos os pontos $(x, f'(x))$ no plano de coordenadas e os unimos com uma curva contínua, que representa $y = f'(x)$.

EXEMPLO 3 Representando uma derivada graficamente

Represente graficamente a derivada da função $y = f(x)$ mostrada na Figura 3.3a.

SOLUÇÃO Esboçamos as tangentes ao gráfico de f em pequenos intervalos e usamos seus coeficientes angulares para estimar os valores de $f'(x)$ nesses pontos. Registramos os pares $(x, f'(x))$ correspondentes e os unimos com uma curva contínua, como esboçado na Figura 3.3b.

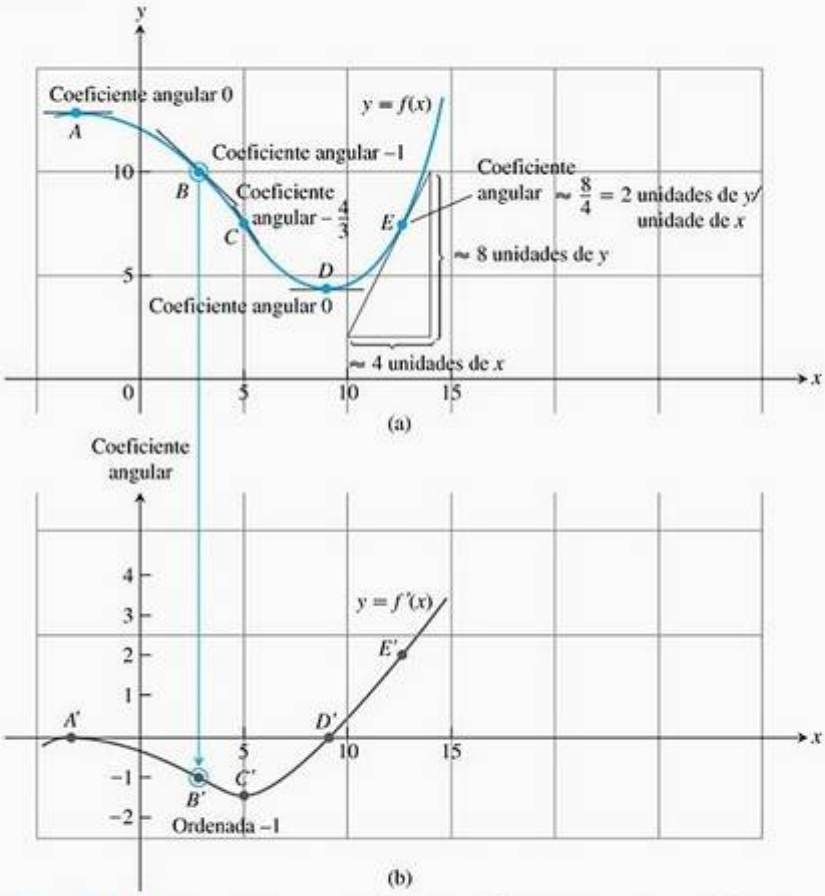


FIGURA 3.3 Construímos o gráfico de $y = f'(x)$ registrando em (b) os coeficientes angulares do gráfico de $y = f(x)$ observados em (a). A ordenada de B' é o coeficiente angular em B e assim por diante. O gráfico de f' é um registro visual de como o coeficiente angular de f varia em relação a x.

O que descobrimos no gráfico de $y = f'(x)$? Imediatamente, percebemos

1. onde a taxa de variação de f é positiva, negativa ou nula.
2. o valor aproximado da taxa de crescimento em qualquer x e seu valor em relação a $f(x)$.
3. onde a própria taxa de variação é crescente ou decrescente.

Eis outro exemplo.

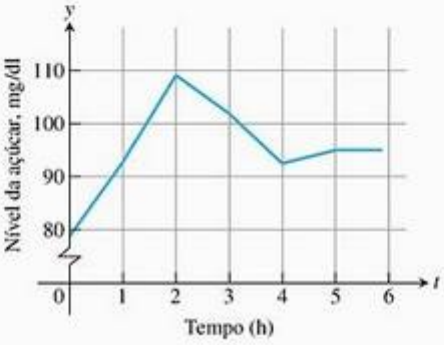
EXEMPLO 4 Nível de açúcar no sangue

Em 23 de abril de 1988, o *Daedalus*, um avião impulsionado por força humana, bateu um recorde de distância ao voar 119 km de Creta à ilha de Santorini, no Mar Egeu, a sudeste da Grécia. Durante as seis horas de testes anteriores ao vôo, pesquisadores monitoraram o nível de açúcar no sangue dos pilotos-atletas. O gráfico referente a um dos pilotos é mostrado na Figura 3.4b, onde o nível de açúcar em miligramas/decilitro foi registrado em função do tempo em horas.

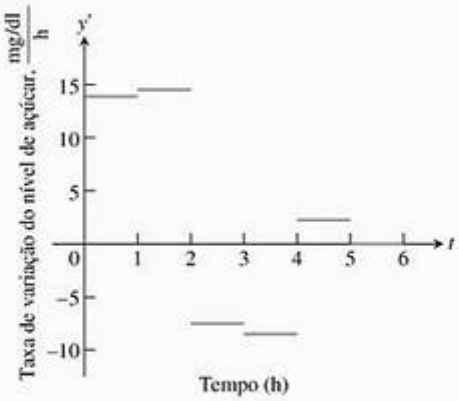
O gráfico consiste em segmentos de reta conectando os pontos. O coeficiente angular de cada segmento oferece uma estimativa da derivada do nível de açúcar entre uma medição e outra. Calculamos o coeficiente angular de cada segmento a partir da grade de coordenadas e inserimos a derivada no plano de coordenadas como uma função escada na Figura 3.4b. Para determinar os pontos relativos à primeira hora, por exemplo, observamos que o nível de açúcar aumentou de cerca de 79 mg/dl para 93 mg/dl. O aumento líquido foi de $\Delta y = 93 - 79 = 14$ mg/dl. Dividindo essa expressão por $\Delta t = 1$ hora, obtemos a taxa de variação de

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{14}{1} = 14 \text{ mg/dl por hora}$$

Observe que não podemos estimar a taxa de variação do nível de açúcar nos instantes $t = 1, 2, \ldots, 5$, onde o gráfico que traçamos apresenta um "bico" sem coeficiente angular. A função escada derivada não é definida nesses instantes.



(a)



(b)

Rota de vôo do *Daedalus* em 23 de abril de 1988

FIGURA 3.4 (a) Gráfico do nível de açúcar no sangue de um dos pilotos do *Daedalus* durante um teste pré-vôo que durou seis horas. (b) A derivada do nível de açúcar no sangue do piloto mostra a rapidez com que esse nível oscilou durante vários momentos do teste.

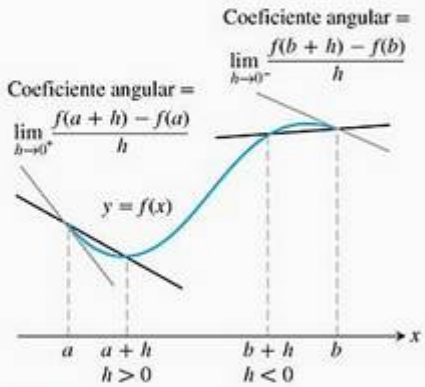


FIGURA 3.5 Derivadas em extremidades são limites laterais.

Derivável em um intervalo; derivadas laterais

Uma função $y = f(x)$ será **derivável** em um intervalo aberto (finito ou infinito) se tiver uma derivada em cada ponto do intervalo. Será derivável em um intervalo fechado $[a, b]$ se for derivável no interior (a, b) e se os limites

$$\lim_{h\to 0^+} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \textbf{Derivada à direita em } a$$

$$\lim_{h\to 0^-} = \frac{f(b+h)-f(b)}{h} \qquad \textbf{Derivada à esquerda em } b$$

existirem nas extremidades (Figura 3.5).

Derivadas à direita e à esquerda podem ser definidas em qualquer ponto do domínio de uma função. A relação usual entre limites laterais e bilaterais vale para essas derivadas. Segundo o Teorema 6 da Seção 2.4, uma função terá uma derivada em um ponto se e somente se tiver derivadas à direita e à esquerda nesse ponto e se essas derivadas laterais forem iguais.

EXEMPLO 5 $y = |x|$ **não é derivável na origem**

Mostre que a função $y = |x|$ é derivável em $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, mas não tem derivada em $x = 0$.

SOLUÇÃO À direita da origem,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(1 \cdot x) = 1 \qquad \frac{d}{dx}(mx+b) = m, |x| = x$$

À esquerda,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot x) = -1 \qquad |x| = -x$$

(Figura 3.6). Não é possível que haja derivada na origem porque nela as derivadas laterais são diferentes:

$$\text{Derivada de } |x| \text{ à direita em zero} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} \qquad |h| = h \text{ quando } h > 0$$

$$= \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

$$\text{Derivada de } |x| \text{ à esquerda em zero} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} \qquad |h| = -h \text{ quando } h < 0$$

$$= \lim_{h\to 0^-} -1 = -1$$

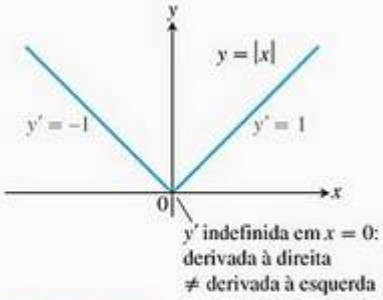


FIGURA 3.6 A função $y = |x|$ não é derivável na origem onde o gráfico tem um "bico".

EXEMPLO 6 $y = \sqrt{x}$ **não é derivável em** $x = 0$

No Exemplo 2, descobrimos que, para $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

aplicamos a definição para examinar se a derivada existe em $x = 0$:

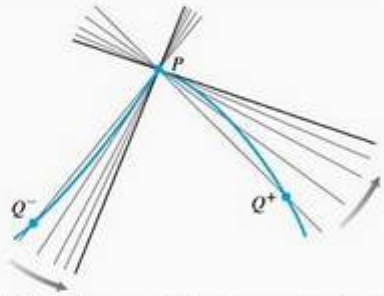
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$$

Como o limite (direito) não é finito, não há derivada em $x = 0$. Como os coeficientes angulares das secantes que unem a origem aos pontos $(h, \sqrt{h})$ em um gráfico de $y = \sqrt{x}$ tendem a ∞, o gráfico apresenta uma *tangente vertical* na origem.

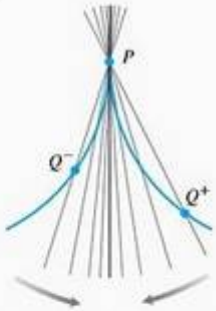
Quando uma função *não* apresenta derivada em um ponto?

Uma função terá derivada em um ponto x_0 se os coeficientes angulares das retas secantes que passam por $P(x_0, f(x_0))$ e um ponto Q próximo no gráfico tenderem a um limite à medida que Q se aproxima de P. Quando as secantes não têm uma posição-limite ou se tornam verticais à medida que Q tende a P, a derivada não existe. Logo, a diferenciabilidade (derivabilidade) tem a ver com a "suavidade" do gráfico de f. Uma função cujo gráfico é, de modo geral, suave pode não apresentar derivada em determinado ponto por vários motivos. Ela não terá derivada nos pontos em que o gráfico apresentar, por exemplo

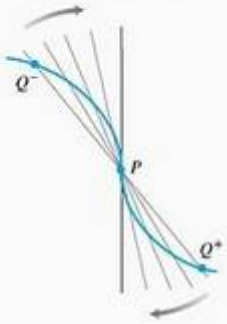
1. um *bico*, onde as derivadas laterais são diferentes.



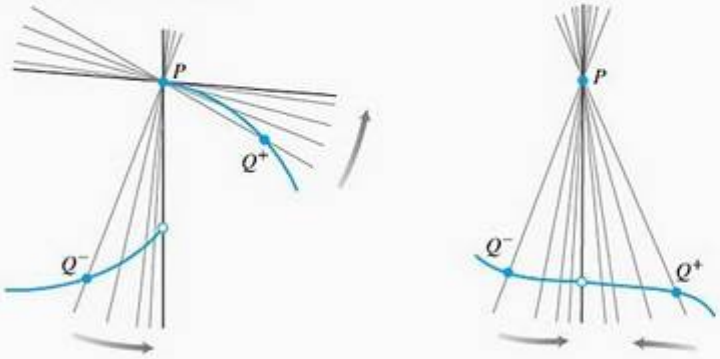
2. um *ponto cuspidal*, onde o coeficiente angular de PQ tende a ∞, de um lado, e a $-\infty$, do outro.



3. uma *tangente vertical*, onde o coeficiente angular de PQ tende a ∞ ou a $-\infty$ de ambos os lados (aqui, $-\infty$).



4. uma *descontinuidade*.



As funções deriváveis são contínuas

Uma função é contínua em todos os pontos em que ela tiver uma derivada.

Teorema 1 **Diferenciabilidade (derivabilidade) implica continuidade**
Se f tem uma derivada em $x = c$, então f é contínua em $x = c$.

PROVA Como $f'(c)$ existe, devemos mostrar que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ ou, de maneira equivalente, que $\lim_{h \to 0} f(c + h) = f(c)$. Se $h \neq 0$, então

$$\begin{aligned} f(c + h) &= f(c) + (f(c + h) - f(c)) \\ &= f(c) + \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \cdot h \end{aligned}$$

Agora calcule os limites quando $h \to 0$. Segundo o Teorema 1 da Seção 2.2,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} f(c + h) &= \lim_{h \to 0} f(c) + \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\ &= f(c) + 0 \\ &= f(c) \end{aligned}$$

Argumentos semelhantes com limites laterais mostram que, se f tem uma derivada lateral (à direita ou à esquerda) em $x = c$, então f é contínua desse lado em $x = c$.

O Teorema 1 diz que, se uma função apresenta descontinuidade em determinado ponto (por exemplo, um salto), então ela não pode ser derivável nesse ponto. A função maior inteiro $y = \lfloor x \rfloor = \text{int } x$ não é derivável em todos os inteiros $x = n$ (Exemplo 4 da Seção 2.6).

CUIDADO A recíproca do Teorema 1 é falsa. Como vimos no Exemplo 5, uma função não tem necessariamente uma derivada em um ponto onde ela é contínua.

Propriedade do valor intermediário para derivadas

Nem toda função pode ser derivada de outra função, como veremos no teorema a seguir. Ele foi provado pela primeira vez em 1875, pelo matemático francês Jean Gaston Darboux (1842-1917).

Teorema 2 **Teorema de Darboux**
Se a e b são dois pontos quaisquer de um intervalo em que f é derivável, então f' assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.

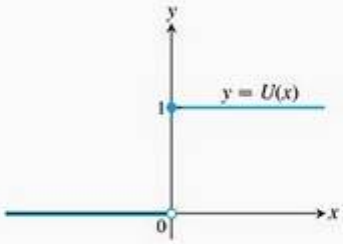


FIGURA 3.7 A função de salto unitário não tem a propriedade do valor intermediário e não pode ser a derivada de uma função da reta real.

O Teorema 2 (que não provaremos) diz que uma função *não* pode ser uma derivada em um intervalo a menos que ela tenha a propriedade do valor intermediário nesse intervalo. Por exemplo, a função salto unitário da Figura 3.7 não pode ser a derivada de nenhuma função de valor real da reta real. No Capítulo 5, veremos que toda função contínua é uma derivada de outra função.

Na Seção 4.4, evocaremos esse Teorema 2 para analisar o que acontece em certo ponto do gráfico de uma função duas vezes derivável no qual ela muda de "concavidade".

Exercícios 3.1

Determinando funções derivadas e seus valores

Nos exercícios 1–6, use a definição para calcular as derivadas da função. Depois, determine os valores da derivada conforme especificado.

1. $f(x) = 4 - x^2$; $f'(-3), f'(0), f'(1)$
2. $F(x) = (x - 1)^2 + 1$; $F'(-1), F'(0), F'(2)$
3. $g(t) = \dfrac{1}{t^2}$; $g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$
4. $k(z) = \dfrac{1 - z}{2z}$; $k'(-1), k'(1), k'(\sqrt{2})$
5. $p(\theta) = \sqrt{3\theta}$; $p'(1), p'(3), p'(2/3)$
6. $r(s) = \sqrt{2s + 1}$; $r'(0), r'(1), r'(1/2)$

Nos exercícios 7–12, determine as derivadas indicadas.

7. $\dfrac{dy}{dx}$ se $y = 2x^3$
8. $\dfrac{dr}{ds}$ se $r = \dfrac{s^3}{2} + 1$
9. $\dfrac{ds}{dt}$ se $s = \dfrac{t}{2t + 1}$
10. $\dfrac{dv}{dt}$ se $v = t - \dfrac{1}{t}$
11. $\dfrac{dp}{dq}$ se $p = \dfrac{1}{\sqrt{q + 1}}$
12. $\dfrac{dz}{dw}$ se $z = \dfrac{1}{\sqrt{3w - 2}}$

Coeficientes angulares e retas tangentes

Nos exercícios 13–16, derive as funções e determine o coeficiente angular da tangente no valor dado da variável independente.

13. $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$, $x = -3$
14. $k(x) = \dfrac{1}{2 + x}$, $x = 2$
15. $s = t^3 - t^2$, $t = -1$
16. $y = (x + 1)^3$, $x = -2$

Nos exercícios 17–18, derive as funções. Depois, determine uma equação para a tangente no ponto indicado no gráfico da função.

17. $y = f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x - 2}}$, $(x, y) = (6, 4)$
18. $w = g(z) = 1 + \sqrt{4 - z}$, $(z, w) = (3, 2)$

Nos exercícios 19–22, determine os valores das derivadas.

19. $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=-1}$ se $s = 1 - 3t^2$
20. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{3}}$ se $y = 1 - \dfrac{1}{x}$
21. $\left.\dfrac{dr}{d\theta}\right|_{\theta=0}$ se $r = \dfrac{2}{\sqrt{4 - \theta}}$
22. $\left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=4}$ se $w = z + \sqrt{z}$

Usando a fórmula alternativa para derivadas

Use a fórmula

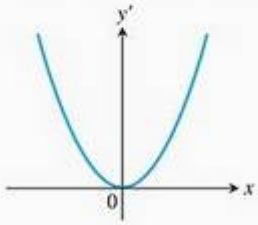
$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

para determinar a derivada das funções nos exercícios 23–26.

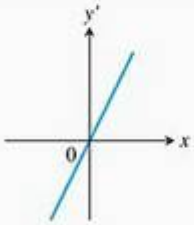
23. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$
24. $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$
25. $g(x) = \dfrac{x}{x - 1}$
26. $g(x) = 1 + \sqrt{x}$

Gráficos

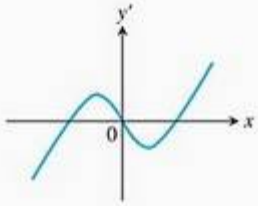
Associe as funções representadas graficamente nos exercícios 27–30 com as derivadas das figuras (a)–(d), a seguir.



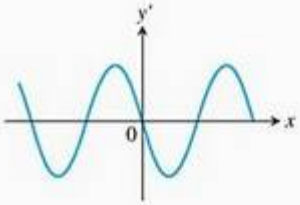
(a)



(b)

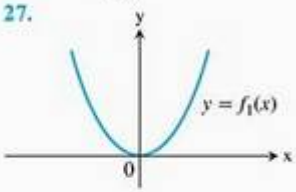


(c)

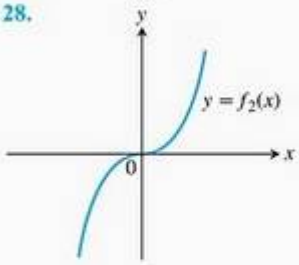


(d)

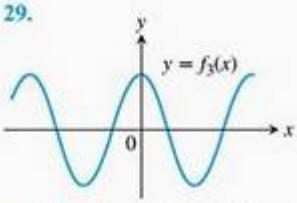
27.



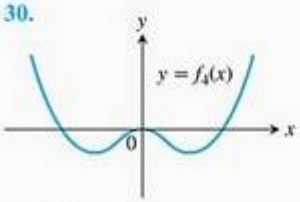
28.



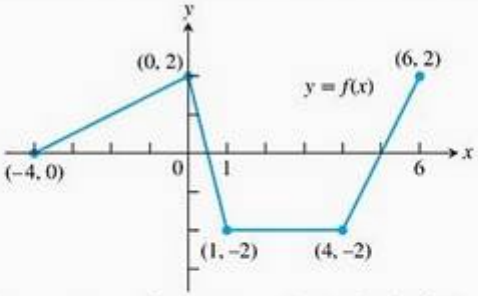
29.



30.



31. (a) O gráfico da figura a seguir é composto por segmentos de reta unidos pelas extremidades. Em quais pontos do intervalo $[-4, 6]$ f' não é definida? Justifique sua resposta.



(b) Represente graficamente a derivada de f. O gráfico deve mostrar uma função escada.

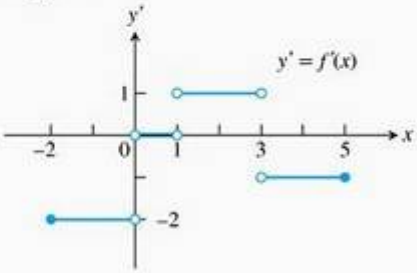
32. Recuperando uma função a partir de sua derivada

(a) Use as informações a seguir para fazer o gráfico da função f no intervalo fechado $[-2, 5]$.

i. O gráfico de f é composto por segmentos de reta fechados unidos pelas extremidades.

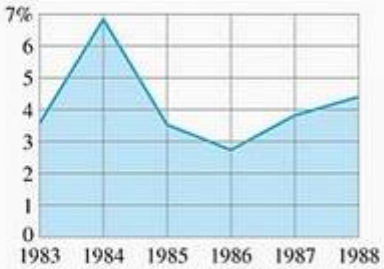
ii. O gráfico começa no ponto $(-2, 3)$.

iii. A derivada de f é a função escada da figura a seguir.



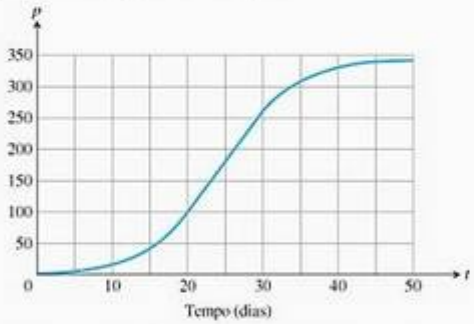
(b) Repita o item **(a)** considerando que o gráfico começa em $(-2, 0)$ em vez de $(-2, 3)$.

33. Crescimento da economia O gráfico da figura a seguir mostra a variação percentual média anual, $y = f(t)$, do produto interno bruto (PIB) norte-americano entre os anos 1983 e 1988. Represente graficamente dy/dt (onde definida). (*Fonte: Statistical Abstracts of the United States*, 10. ed., U.S. Department of Commerce, p. 427.)



34. Moscas-das-frutas *(Continuação do Exemplo 3, Seção 2.1.)* As populações nascidas em ambientes fechados crescem devagar a princípio, quando há relativamente poucos indivíduos, depois mais rapidamente, à medida que o número de membros reprodutores aumenta e os recursos permanecem abundantes, e, por fim, tornam a crescer a um ritmo lento, conforme a população alcança a capacidade de sustentação daquele ambiente.

(a) Use a mesma técnica do Exemplo 3 para representar graficamente a derivada da população de moscas-das-frutas apresentada na Seção 2.1. O gráfico da população é reproduzido aqui.

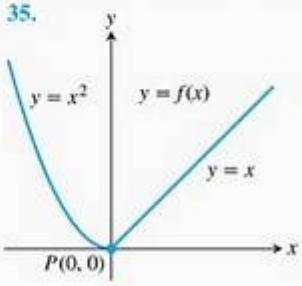


(b) Durante quais dias a população parece estar crescendo mais rápido? E mais devagar?

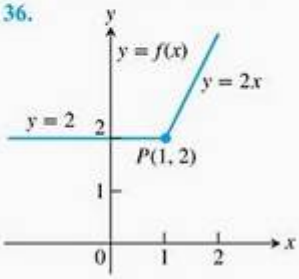
Derivadas laterais

Compare as derivadas à direita e à esquerda para mostrar que as funções dos exercícios 35–38 não são deriváveis no ponto P.

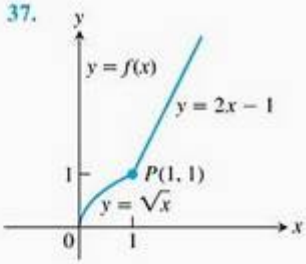
35.



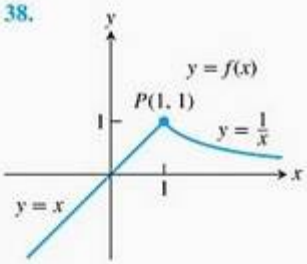
36.



37.



38.



Diferenciabilidade e continuidade em um intervalo

Nos exercícios 39–44, cada figura mostra o gráfico de uma função em um intervalo fechado D. Em que pontos do domínio a função parece ser

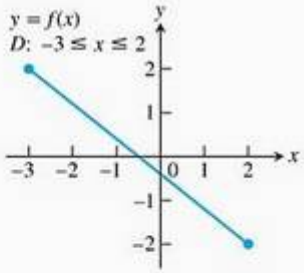
(a) derivável?

(b) contínua, mas não derivável?

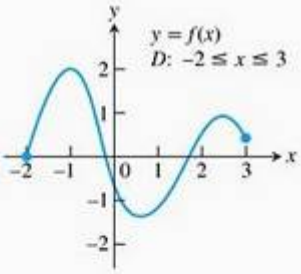
(c) nem contínua nem derivável?

Justifique sua resposta.

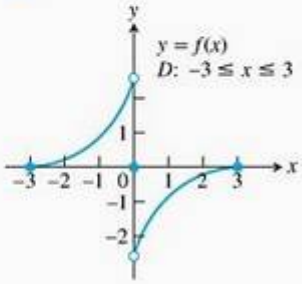
39.



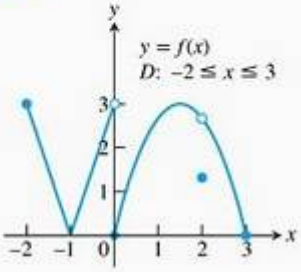
40.



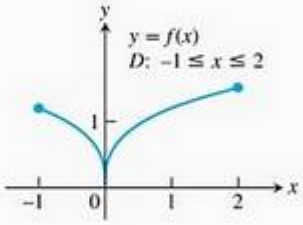
41.



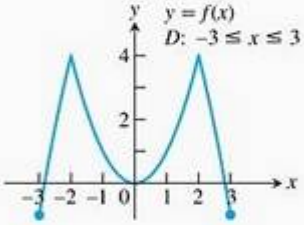
42.



43.



44.



Teoria e exemplos

Nos exercícios 45–48:

(a) Encontre a derivada $y = f'(x)$ da função dada $y = f(x)$.

(b) Faça os gráficos de $y = f(x)$ e de $y = f'(x)$ um do lado do outro empregando planos cartesianos diferentes e responda às questões a seguir.

(c) Para que valores de x, caso haja, f' é positivo? Nulo? Negativo?

(d) Existe algum intervalo de valores de x em que a função $y = f(x)$ cresce quando x aumenta? Qual? Existe algum intervalo de valores de x em que a função $y = f(x)$ decresce quando x aumenta? Qual? Como isso está relacionado com o que foi visto no item (c)? (Voltaremos a falar sobre essa relação no Capítulo 4.)

45. $y = -x^2$

46. $y = -1/x$

47. $y = x^3/3$

48. $y = x^4/4$

49. A curva $y = x^3$ tem sempre coeficiente angular negativo? Em caso afirmativo, onde? Justifique sua resposta.

50. A curva $y = 2\sqrt{x}$ tem alguma tangente horizontal? Em caso afirmativo, onde? Justifique sua resposta.

51. **Tangente a uma parábola** A parábola $y = 2x^2 - 13x + 5$ tem alguma tangente cujo coeficiente angular seja -1? Se tem, encontre uma equação para a reta e o ponto de tangência. Se não tem, por que não?

52. **Tangente a $y = \sqrt{x}$** Alguma tangente à curva $y = \sqrt{x}$ cruza o eixo x em $x = -1$? Se cruza, encontre uma equação para a reta e o ponto de tangência. Se não cruza, por que não?

53. **Maior inteiro em x** Alguma função derivável em $(-\infty, \infty)$ tem como derivada $y = \lfloor x \rfloor$, o maior inteiro em x (veja a Figura 2.59)? Justifique sua resposta.

54. **Derivada de $y = |x|$** Represente graficamente a derivada de $f(x) = |x|$. Depois, faça o gráfico de $y = (|x| - 0)/(x - 0) = |x|/x$. O que você pode concluir?

55. **Derivada de $-f$** Sabendo que uma função $f(x)$ é derivável em $x = x_0$, pode-se dizer alguma coisa a respeito da diferenciabilidade de $-f$ em $x = x_0$? Justifique sua resposta.

56. Derivada de múltiplos Sabendo que uma função $g(t)$ é derivável em $t = 7$, pode-se dizer alguma coisa a respeito da diferenciabilidade de $3g$ em $t = 7$? Justifique sua resposta.

57. Limite de um quociente Suponha que as funções $g(t)$ e $h(t)$ sejam definidas para qualquer valor de t e que $g(0) = h(0) = 0$. O $\lim_{t\to 10} g(t))/(h(t))$ pode existir? Se existe, deve ser igual a zero? Justifique sua resposta.

58. (a) Seja $f(x)$ uma função que satisfaz $|f(x)| \le x^2$ para $-1 \le x \le 1$. Mostre que f é derivável em $x = 0$ e determine $f'(0)$.

(b) Mostre que

$$f(x)\begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é derivável em $x = 0$ e determine $f'(0)$.

59. Faça o gráfico de $y = 1/(2\sqrt{x})$ em uma janela que contenha $0 \le x \le 2$. Em seguida, no mesmo plano cartesiano, esboce o gráfico de

$$y = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

para $h = 1; 0{,}5; 0{,}1$. Agora, tente $h = -1; -0{,}5; -0{,}1$. Explique o que está acontecendo.

60. Faça o gráfico de $y = 3x^2$ em um domínio que contenha $-2 \le x \le 2$ e $0 \le y < 3$. Em seguida, no mesmo plano cartesiano, esboce o gráfico de

$$y = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

para $h = 2; 1; 0{,}2$. Agora tente $h = -2; -1; -0{,}2$. Explique o que está acontecendo.

61. Função contínua de Weierstrass não derivável em qualquer ponto A soma dos primeiros oito termos da função de Weierstrass $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2/3)^n \cos(9^n \pi x)$ é

$$g(x) = \cos(\pi x) + (2/3)^1 \cos(9\pi x) + (2/3)^2 \cos(9^2 \pi x) + (2/3)^3 \cos(9^3 \pi x) + \cdots + (2/3)^7 \cos(9^7 \pi x)$$

Represente graficamente essa soma. Amplie o gráfico várias vezes. Essa curva tem muitos bicos e irregularidades? Especifique uma região do gráfico em que a parte visualizada seja lisa.

USANDO O COMPUTADOR

Use um SAC para realizar os passos a seguir com as funções dos exercícios 62–67.

(a) Esboce o gráfico $y = f(x)$ para verificar o comportamento global da função.

(b) Defina a razão incremental q em um ponto geral x, com incremento genérico h.

(c) Calcule o limite quando $h \to 0$. Que fórmula você obtém?

(d) Substitua o valor $x = x_0$ e esboce o gráfico da função $y = f(x)$ junto com sua reta tangente nesse ponto.

(e) Atribua vários valores a x, maiores e menores que x_0, na fórmula obtida no item (c). Os números têm sentido em relação à sua figura?

(f) Represente graficamente a fórmula obtida no item (c). O que ela significa quando seus valores são negativos? E nulos? E positivos? Isso é coerente com o gráfico do item (a)? Justifique sua resposta.

62. $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad x_0 = 1$

63. $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad x_0 = 1$

64. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}, \quad x_0 = 2$

65. $f(x) = \dfrac{x - 1}{3x^2 + 1}, \quad x_0 = -1$

66. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad x_0 = \pi/2$

67. $f(x) = x^2 \cos x, \quad x_0 = \pi/4$

3.2 Regras de derivação para polinômios, exponenciais, produtos e quocientes

Esta seção apresenta algumas regras que permitem derivar uma grande variedade de funções. Ao provar tais regras aqui, conseguimos derivar funções sem ter de aplicar a definição todas as vezes.

Potências, multiplicações, somas e diferenças

A primeira regra da derivação é que a derivada de qualquer função constante é zero.

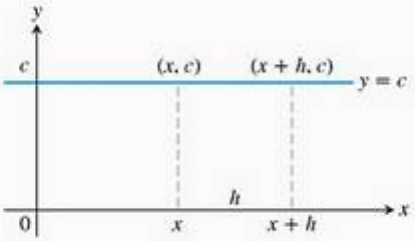


FIGURA 3.8 A regra $(d/dx)(c) = 0$ é outro modo de dizer que os valores de funções constantes nunca mudam e que o coeficiente angular de uma reta horizontal é zero em qualquer ponto.

Regra 1 Derivada de uma função constante
Se f tem o valor constante $f(x) = c$, então

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

EXEMPLO 1

Se f tem o valor constante $f(x) = 8$, então

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(8) = 0$$

De maneira similar,

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{df}{dx} = \left(\sqrt{3}\right) = 0$$

PROVA DA REGRA 1 Aplicamos a definição de derivada a $f(x) = c$, a função cujos valores são sempre a constante c (Figura 3.8). Para qualquer valor de x, encontramos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

A segunda regra diz como derivar x^n se n for um número inteiro positivo.

Regra 2 Regra da potenciação para inteiros positivos
Se n for um inteiro positivo, então

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

A regra da potenciação é efetivamente válida para todos os números reais n diferentes de zero, o que provaremos na Seção 3.7 (e, em etapas, para várias potências ao longo do texto). Para aplicar a regra da potenciação, subtraímos 1 do expoente original (n) e multiplicamos o resultado por n.

Companion Website
Biografia histórica
Richard Courant (1888-1972)

EXEMPLO 2 Interpretando a Regra 2

f	x	x^2	x^3	x^4	...
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	...

PRIMEIRA PROVA DA REGRA 2 Podemos verificar a fórmula

$$z^n - x^n = (z - x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1})$$

efetuando a multiplicação do lado direito. Em seguida, com base na forma alternativa da definição da derivada, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{z^n - x^n}{z - x} \\ &= \lim_{z \to x}(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1}) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

SEGUNDA PROVA DA REGRA 2 Se $f(x) = x^n$, então $f(x + h) = (x + h)^n$. Como n é um número inteiro positivo, podemos expandir $(x + h)^n$ pelo teorema binomial, obtendo assim

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

A terceira regra diz que, quando uma função derivável é multiplicada por uma constante, sua derivada é multiplicada pela mesma constante.

Regra 3 Regra da multiplicação por constante
Se u é uma função derivável de x e c é uma constante, então

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

Em particular, se n é um inteiro positivo, então

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}.$$

EXEMPLO 3

(a) A fórmula derivada

$$\frac{d}{dx}(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$$

diz que, se multiplicarmos cada ordenada por 3 para obter outra escala no gráfico de $y = x^2$, então multiplicaremos o coeficiente angular em cada ponto por 3 (Figura 3.9).

(b) Um caso especial útil
A derivada da oposta de uma função derivável u é a oposta da derivada da função. A Regra 3 com $c = -1$ fornece

$$\frac{d}{dx}(-u) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot u) = -1 \cdot \frac{d}{dx}(u) = -\frac{du}{dx}$$

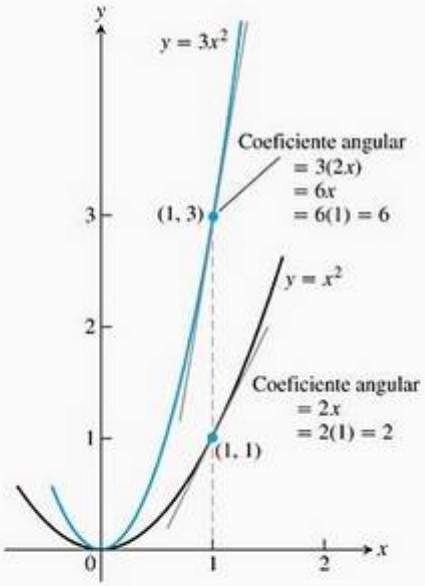


FIGURA 3.9 Os gráficos de $y = x^2$ e $y = 3x^2$. Triplicando a ordenada, triplica-se o coeficiente angular (Exemplo 3).

PROVA DA REGRA 3

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}cu &= \lim_{h\to 0} \frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} && \text{Definição de derivada com } f(x) = cu(x) \\
&= c\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} && \text{Propriedade do limite} \\
&= c\frac{du}{dx} && u \text{ é derivável.}
\end{aligned}$$

A próxima regra diz que a derivada da soma de duas funções deriváveis é a soma de suas derivadas.

Representando funções usando u e v
Quando precisamos de uma fórmula para derivação, as funções com que trabalhamos geralmente são representadas por letras como f e g. Quando aplicamos a fórmula, não queremos encontrar essas letras sendo usadas de outra maneira. Para evitar esse problema em regras de derivação, representamos as funções com letras como u e v, que dificilmente terão sido usadas antes.

Regra 4 Regra da derivada da soma

Se u e v são funções deriváveis de x, então a soma das duas, $u + v$, é derivável em qualquer ponto onde ambas sejam deriváveis. Nesses pontos,

$$\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

EXEMPLO 4 Derivada de uma soma

$$\begin{aligned} y &= x^4 + 12x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x) \\ &= 4x^3 + 12 \end{aligned}$$

PROVA DA REGRA 4 Aplicamos a definição de derivada a $f(x) = u(x) + v(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[u(x) + v(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \end{aligned}$$

Combinando a regra da soma com a regra da multiplicação por constante, obtemos a **regra da diferença**, que diz que a derivada de uma *diferença* de funções deriváveis é igual à diferença de suas derivadas.

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{d}{dx}[u + (-1)v] = \frac{du}{dx} + (-1)\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

A regra da soma também se aplica a somas com mais de duas funções, desde que haja apenas um número finito de funções finitas na soma. Se $u_1, u_2, \cdots, u_n$ são deriváveis em x, então $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ também será e

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}$$

EXEMPLO 5 Derivada de um polinômio

$$\begin{aligned} y &= x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1) \\ &= 3x^2 + \frac{4}{3}\cdot 2x - 5 + 0 \\ &= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5 \end{aligned}$$

Observe que podemos derivar qualquer polinômio termo a termo, assim como fizemos com os polinômios do Exemplo 5. Todos os polinômios são deriváveis em qualquer ponto.

PROVA DA REGRA da soma para somas com mais de duas funções Provamos a fórmula

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}$$

por indução matemática (veja o Apêndice A.1). A fórmula é verdadeira para $n = 2$, como acabamos de provar. Este é o Passo 1 da prova de indução.

O Passo 2 é provar que, se a fórmula é verdadeira para qualquer número inteiro positivo $n = k$, onde $k \geq n_0 = 2$, então ela também é verdadeira para $n = k + 1$. Assim, suponha que

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx} \tag{1}$$

Logo

$$\frac{d}{dx}(\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}_{\text{Chame a função definida por essa soma de } u.} + \underbrace{u_{k+1}}_{\text{Chame essa função de } v.})$$

$$= \frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) + \frac{du_{k+1}}{dx} \qquad \text{Regra 4 para } \frac{d}{dx}(u + v)$$

$$= \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx} + \frac{du_{k+1}}{dx} \qquad \text{Equação (1)}$$

Com esses passos verificados, o princípio da indução matemática garante agora a regra da soma para qualquer inteiro $n \geq 2$.

EXEMPLO 6 Determinando tangentes horizontais

A curva $y = x^4 - 2x^2 + 2$ tem alguma tangente horizontal? Se tem, onde está?

SOLUÇÃO Se houver tangentes horizontais, elas estarão onde o coeficiente angular dy/dx for zero. Temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x$$

Agora, resolva a equação $\frac{dy}{dx} = 0$ para x:

$$4x^3 - 4x = 0$$
$$4x(x^2 - 1) = 0$$
$$x = 0, 1, -1$$

A curva $y = x^4 - 2x^2 + 2$ tem tangentes horizontais em $x = 0$, 1 e -1. Os pontos correspondentes na curva são (0, 2), (1, 1) e (−1, 1). Veja a Figura 3.10.

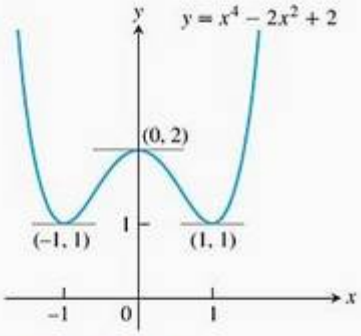


FIGURA 3.10 A curva $y = x^4 - 2x^2 + 2$ e suas tangentes horizontais (Exemplo 6).

Derivadas de funções exponenciais

Abordamos as funções exponenciais na Seção 1.5. Quando aplicamos a definição de derivada a $f(x) = a^x$, vemos que a derivada é um múltiplo constante do próprio a^x:

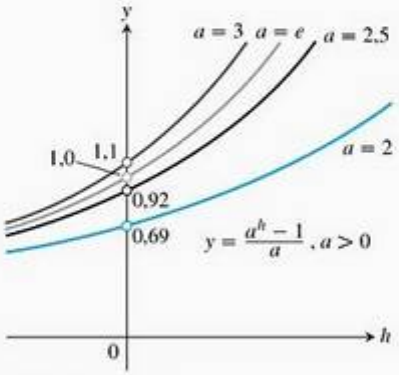


FIGURA 3.11 A posição da curva $y = (a^h - 1)/h$, $a > 0$, varia continuamente com a.

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \quad \text{Definição de derivada.}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} \quad a^{x+h} = a^x \cdot a^h$$

$$= \lim_{h \to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \quad \text{Fatore isolando } a^x.$$

$$= a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \quad a^x \text{ é constante quando } h \to 0.$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \right)}_{\text{um número fixo } L} \cdot a^x \tag{2}$$

É a primeira vez que deparamos com o limite L. Observe, porém, que ele é igual à derivada de $f(x) = a^x$ em $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - a^0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = L$$

O limite L é, portanto, o coeficiente angular da curva de $f(x) = a^x$ no ponto em que ela intercepta o eixo y. No Capítulo 7, em que explanaremos detalhadamente as funções exponenciais e logarítmicas, provaremos que o limite L existe e tem o valor $\ln a$. Por ora, investigaremos valores de L fazendo o gráfico de $y = (a^h - 1)/h$ e observando seu comportamento quando h tende a 0.

A Figura 3.11 mostra os gráficos de $y = (a^h - 1)/h$ para quatro valores de a. O limite L é aproximadamente 0,69 se $a = 2$, cerca de 0,92 se $a = 2,5$ e cerca de 1,1 se $a = 3$. Parece que o valor de L é 1 para algum valor de a escolhido entre 2,5 e 3. Esse valor é dado por $a = e \approx 2,718281828$. Com essa escolha de base, obtemos a função exponencial natural $f(x) = e^x$, conforme abordado na Seção 1.5, e vemos que ela satisfaz a propriedade

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \tag{3}$$

Como o limite é 1, cria-se uma relação notável entre a função exponencial natural e^x e sua derivada:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) \cdot e^x \quad \text{Equação (2) com } a = e$$

$$= 1 \cdot e^x = e^x \quad \text{Equação (3)}$$

Dessa maneira, a função exponencial natural é sua própria derivada.

Derivada da função exponencial natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

EXEMPLO 7 Determinando uma tangente

Determine uma equação para uma reta que seja tangente ao gráfico de $y = e^x$ e passe pela origem.

SOLUÇÃO Como a reta passa pela origem, sua equação tem a forma $y = mx$, onde m é o coeficiente angular. Se é tangente ao gráfico no ponto

(a, e^a), o coeficiente angular é $m = (e^a - 0)/(a - 0)$. O coeficiente angular da exponencial natural em $x = a$ é e^a. Como esses coeficientes angulares são iguais, então temos que $e^a = e^a/a$. Segue que $a = 1$ e $m = e$, logo, a equação da tangente é $y = ex$. Veja a Figura 3.12.

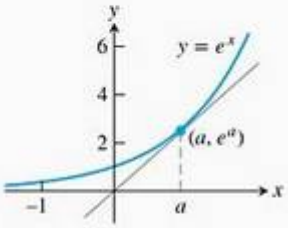


FIGURA 3.12 A reta que passa pela origem é tangente ao gráfico de $y = e^x$ quando $a = 1$ (Exemplo 7).

Podemos questionar se, além da função exponencial natural, há *outras* funções que sejam suas próprias derivadas. A resposta é que as únicas funções que satisfazem a condição $f'(x) = f(x)$ são aquelas que são múltiplas constantes da função exponencial natural $f(x) = c \cdot e^x$, sendo c qualquer constante. Provaremos esse fato no Capítulo 9. Observe, com base na regra da multiplicação por constante, que, na verdade,

$$\frac{d}{dx}(c \cdot e^x) = c \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = c \cdot e^x$$

Produtos e quocientes

Embora a derivada da soma de duas funções seja a soma de suas derivadas, a derivada do produto de duas funções *não* é o produto de suas derivadas. Por exemplo,

$$\frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \quad \text{enquanto} \quad \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot 1 = 1$$

A derivada de um produto de duas funções é a soma de *dois* produtos, como explicaremos a seguir.

Regra 5 Regra da derivada do produto
Se u e v são deriváveis em x, então o produto uv também é, e

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

A derivada do produto uv é u multiplicado pela derivada de v somado a v multiplicado pela derivada de u. Em *notação "linha"*, $(uv)' = uv' + vu'$. Em notação de função,

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

EXEMPLO 8 Usando a regra do produto

Encontre a derivada de

$$y = \frac{1}{x}\left(x^2 + e^x\right)$$

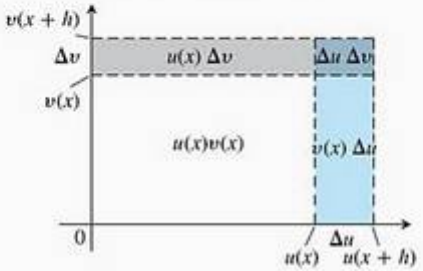
SOLUÇÃO Aplicamos a regra do produto com $u = 1/x$ e $v = x^2 + e^x$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\left(x^2 + e^x\right)\right] &= \frac{1}{x}\left(2x + e^x\right) + \left(x^2 + e^x\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2 + \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{e^x}{x^2} \\ &= 1 + (x - 1)\frac{e^x}{x^2}\end{aligned}$$

$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ e $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$ pelo Exemplo 3, Seção 2.7.

Ilustrando a regra do produto

Se $u(x)$ e $v(x)$ são positivas e aumentam quando x aumenta e se $h > 0$,



então a área total sombreada na figura é

$$u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)$$
$$= u(x+h)\,\Delta v + v(x+h)$$
$$\Delta u - \Delta u\,\Delta v.$$

Dividindo-se os dois lados da equação por h, temos

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$
$$= u(x+h)\frac{\Delta v}{h} + v(x+h)\frac{\Delta u}{h}$$
$$- \Delta u\frac{\Delta v}{h}$$

Quando $h \to 0^+$,

$$\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{h} \to 0 \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

obtendo

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

PROVA DA REGRA DO PRODUTO

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

Para transformar essa fração em uma equivalente que contenha razões incrementais para as derivadas de u e v, subtraímos e adicionamos $u(x+h)v(x)$ ao numerador:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}u(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

À medida que h tende a zero, $u(x+h)$ aproxima-se de $u(x)$ porque u, sendo derivável em x, é contínua em x. As duas frações aproximam-se dos valores de dv/dx em x e du/dx em x. Resumindo,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

No próximo exemplo, temos somente valores numéricos para trabalhar.

EXEMPLO 9 Derivada a partir de valores numéricos

Seja $y = uv$ o produto das funções u e v. Determine $y'(2)$ se

$$u(2) = 3, \qquad u'(2) = -4, \qquad v(2) = 1 \qquad \text{e} \qquad v'(2) = 2$$

SOLUÇÃO A partir da regra do produto, na forma

$$y' = (uv)' = uv' + vu'$$

temos

$$y'(2) = u(2)v'(2) + v(2)u'(2)$$
$$= (3)(2) + (1)(-4) = 6 - 4 = 2.$$

EXEMPLO 10 Derivando um produto de duas maneiras

Determine a derivada de $y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$.

SOLUÇÃO

(a) A partir da regra do produto, com $u = x^2 + 1$ e $v = x^3 + 3$, determinamos

$$\frac{d}{dx}\left[\left(x^2 + 1\right)\left(x^3 + 3\right)\right] = (x^2 + 1)(3x^2) + (x^3 + 3)(2x)$$
$$= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x$$
$$= 5x^4 + 3x^2 + 6x$$

(b) Também podemos derivar esse produto em particular fazendo a multiplicação na expressão original de y e derivando o polinômio resultante:

$$y = (x^2 + 1)(x^3 + 3) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 3$$
$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3x^2 + 6x.$$

Isso está de acordo com nosso primeiro cálculo.

Assim como a derivada do produto de duas funções deriváveis não é o produto de suas derivadas, a derivada do quociente de duas funções não é o quociente de suas derivadas. Em vez disso, o que acontece é a regra do quociente.

Regra 6 **Regra da derivada do quociente**
Se u e v são deriváveis em x e se $v(x) \neq 0$, então o quociente u/v é derivável em x e

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

Em notação de função:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

EXEMPLO 11 Usando a regra do quociente

Encontre a derivada de

(a) $y = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ **(b)** $y = e^{-x}$

SOLUÇÃO

(a) Aplicamos a regra do quociente com $u = t^2 - 1$ e $v = t^2 + 1$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t^2 + 1)\cdot 2t - (t^2 - 1)\cdot 2t}{(t^2 + 1)^2} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dt) - u(dv/dt)}{v^2}$$

$$= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}$$

(b) $\dfrac{d}{dx}(e^{-x}) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{e^x}\right) = \dfrac{e^x \cdot 0 - 1 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{-1}{e^x} = -e^{-x}$

PROVA DA REGRA DO QUOCIENTE

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

Para transformar a última fração em uma equivalente que contenha a razão incremental para as derivadas de u e v, subtraímos e adicionamos $v(x)u(x)$ ao numerador. Temos então

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{v(x)\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x)\dfrac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}$$

Ao calcular o limite no numerador e no denominador, temos a regra do quociente.

Potências inteiras negativas de x

A regra da potenciação para inteiros negativos é a mesma que vale para os inteiros positivos.

Regra 7 Regra da potenciação para inteiros negativos

Se n é um inteiro negativo e $x \neq 0$, então

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

EXEMPLO 12

(a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ Está de acordo com o Exemplo 3, Seção 2.7.

(b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^3}\right) = 4\frac{d}{dx}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\frac{12}{x^4}$

PROVA DA REGRA 7 Demonstração usa a regra do quociente. Se n é um inteiro negativo, então $n = -m$, onde m é um inteiro positivo. Portanto, $x^n = x^{-m} = 1/x^m$ e

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^n) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) \\
&= \frac{x^m \cdot \frac{d}{dx}(1) - 1 \cdot \frac{d}{dx}(x^m)}{(x^m)^2} && \text{Regra do quociente com } u = 1 \text{ e } v = x^m \\
&= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} && \text{Como } m > 0, \frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1} \\
&= -mx^{-m-1} \\
&= nx^{n-1} && \text{Já que } -m = n
\end{aligned}$$

A escolha de qual regra usar para resolver um problema de derivação vai determinar quanto trabalho essa resolução exigirá. Eis um exemplo.

EXEMPLO 13 Escolhendo a regra

Em vez de usar a regra do quociente para encontrar a derivada de

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$$

desenvolva o numerador e divida por x^4:

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3-3x^2+2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

Use então as regras da soma e da potenciação:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4} \\
&= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}
\end{aligned}$$

Derivadas de segunda ordem e de ordem superior

Se $y = f(x)$ é uma função derivável, então sua derivada $f'(x)$ também é uma função. Se f' também for derivável, então poderemos derivar f' a fim de obter uma nova função de x denotada por f''. Logo, $f'' = (f')'$. A função f'' é chamada **segunda derivada** de f porque é a derivada da primeira derivada. Em termos de notação,

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = y'' = D^2(f)(x) = D_x^{\,2} f(x)$$

O símbolo D^2 significa que a operação de derivação é realizada duas vezes. Se $y = x^6$, então $y' = 6x^5$ e temos

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(6x^5\right) = 30x^4$$

Logo $D^2(x^6) = 30x^4$.

Se y'' for derivável, sua derivada, $y''' = dy''/dx = d^3y/dx^3$ será a **terceira derivada** de y em relação a x. Como se pode imaginar, os nomes continuam com

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}y^{(n-1)} = \frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$$

representando a **enésima derivada** de y em relação a x, para qualquer número inteiro positivo n.

Podemos interpretar a segunda derivada como a taxa de variação do coeficiente angular da tangente de uma curva $y = f(x)$ em cada ponto. No próximo capítulo, veremos que a segunda derivada revela se uma curva tem concavidade para cima ou para baixo a partir da tangente conforme nos afastamos do ponto de tangência. Na próxima seção, explicaremos a segunda e a terceira derivadas em termos do movimento ao longo de uma reta.

Como ler os símbolos de derivadas

y'	"y linha"
y''	"y duas linhas"
$\frac{d^2y}{dx^2}$	"d dois y dx dois"
y'''	"y três linhas"
$y^{(n)}$	"yn" ou "a derivada enésima de y"
$\frac{d^2y}{dx^2}$	"d n y dx n"
D^n	"D n"

EXEMPLO 14 Determinando derivadas superiores

As primeiras quatro derivadas de $y = x^3 - 3x^2 + 2$ são

Primeira derivada:	$y' = 3x^2 - 6x$
Segunda derivada:	$y'' = 6x - 6$
Terceira derivada:	$y''' = 6$
Quarta derivada:	$y^{(4)} = 0$

A função apresenta derivadas de todas as ordens, sendo a quarta derivada e as subseqüentes todas iguais a zero.

Exercícios 3.2

Cálculos de derivadas

Nos exercícios 1–12, encontre a primeira e a segunda derivadas.

1. $y = -x^2 + 3$
2. $y = x^2 + x + 8$
3. $s = 5t^3 - 3t^5$
4. $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$
5. $y = \frac{4x^3}{3} - x + 2e^x$
6. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}$
7. $w = 3z^{-2} - \frac{1}{z}$
8. $s = -2t^{-1} + \frac{4}{t^2}$
9. $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$
10. $y = 4 - 2x - x^{-3}$
11. $r = \frac{1}{3s^2} - \frac{5}{2s}$
12. $r = \frac{12}{\theta} - \frac{4}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4}$

Nos exercícios 13–16, determine y' (a) aplicando a regra do produto e (b) multiplicando os fatores para produzir uma soma de termos mais simples para derivar.

13. $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$ 14. $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

15. $y = (x^2 + 1)\left(x + 5 + \frac{1}{x}\right)$ 16. $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x} + 1\right)$

Determine as derivadas das funções encontradas nos exercícios 17–28.

17. $y = \dfrac{2x + 5}{3x - 2}$ 18. $z = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 1}$

19. $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 0{,}5}$ 20. $f(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + t - 2}$

21. $v = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$ 22. $w = (2x - 7)^{-1}(x + 5)$

23. $y = 2e^{-x}$ 24. $y = \dfrac{x^2 + 3e^x}{2e^x - x}$

25. $v = \dfrac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x}$ 26. $r = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

27. $y = x^3e^x$ 28. $w = re^{-r}$

Nos exercícios 29 e 30, encontre a derivada de todas as ordens das funções.

29. $y = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{3}{2}x^2 - x$ 30. $y = \dfrac{x^5}{120}$

Nos exercícios 31–38, determine a primeira e a segunda derivadas.

31. $y = \dfrac{x^3 + 7}{x}$ 32. $s = \dfrac{t^2 + 5t - 1}{t^2}$

33. $r = \dfrac{(\theta - 1)(\theta^2 + \theta + 1)}{\theta^3}$ 34. $u = \dfrac{(x^2 + x)(x^2 - x + 1)}{x^4}$

35. $w = 3z^2e^z$ 36. $w = e^z(z - 1)(z^2 + 1)$

37. $p = \left(\dfrac{q^2 + 3}{12q}\right)\left(\dfrac{q^4 - 1}{q^3}\right)$ 38. $p = \dfrac{q^2 + 3}{(q - 1)^3 + (q + 1)^3}$

Usando valores numéricos

39. Suponha que u e v sejam funções de x deriváveis em $x = 0$ e que

$u(0) = 5, \quad u'(0) = -3, \quad v(0) = -1, \quad v'(0) = 2$

Encontre os valores das derivadas a seguir em $x = 0$.

(a) $\dfrac{d}{dx}(uv)$ (b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)$ (c) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{u}\right)$ (d) $\dfrac{d}{dx}(7v - 2u)$

40. Suponha que u e v sejam funções deriváveis de x e que

$u(1) = 2, \quad u'(1) = 0, \quad v(1) = 5, \quad v'(1) = -1$

Encontre os valores das derivadas a seguir em $x = 1$.

(a) $\dfrac{d}{dx}(uv)$ (b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)$ (c) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{u}\right)$ (d) $\dfrac{d}{dx}(7v - 2u)$

Coeficientes angulares e tangentes

41. (a) **Normal à curva** Encontre uma equação para a reta perpendicular à tangente à curva $y = x^3 - 4x + 1$ no ponto (2, 1).

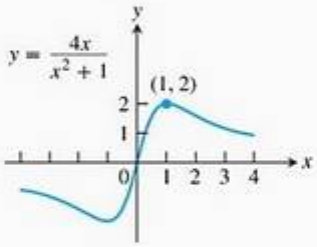
(b) **Menor coeficiente angular** Qual é o menor coeficiente angular dessa curva? Em qual ponto ela apresenta tal coeficiente angular?

(c) **Tangentes com coeficiente angular especificado** Encontre equações para as tangentes à curva nos pontos em que o coeficiente angular da curva seja 8.

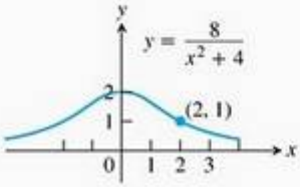
42. (a) **Tangentes horizontais** Encontre equações para as tangentes horizontais à curva $y = x^3 - 3x - 2$. Também encontre equações para as retas que são perpendiculares a essas tangentes nos pontos de tangência.

(b) **Menor coeficiente angular** Qual é o menor coeficiente angular dessa curva? Em qual ponto ela apresenta tal coeficiente angular? Encontre uma equação para a reta que é perpendicular à tangente da curva nesse ponto.

43. Encontre as tangentes para a *serpentina de Newton* (representada a seguir) na origem e no ponto (1, 2).



44. Encontre a tangente para a *bruxa de Agnesi* (representada a seguir) no ponto (2, 1).



45. **Tangente quadrática à função identidade** A curva $y = ax^2 + bx + c$ passa pelo ponto (1, 2), tangenciando a reta $y = x$ na origem. Encontre a, b e c.

46. **Quadráticas com uma tangente em comum** As curvas $y = x^2 + ax + b$ e $y = cx - x^2$ têm uma tangente em comum no ponto (1, 0). Encontre a, b e c.

47. (a) Encontre uma equação para a reta que é tangente à curva $y = x^3 - x$ no ponto (−1, 0).

(b) Faça os gráficos da curva e da tangente juntos. A tangente intercepta a curva em outro ponto. Use os comandos "Zoom" e "Trace" para estimar as coordenadas desse ponto.

(c) Confirme suas estimativas das coordenadas do segundo ponto de interseção resolvendo as equações da curva e da tangente simultaneamente (tecla "Solver").

48. (a) Encontre uma equação para a reta que é tangente à curva $y = x^3 - 6x^2 + 5x$ na origem.

(b) Faça os gráficos da curva e da tangente juntos. A tangente intercepta a curva em outro ponto. Use os comandos "Zoom" e "Trace" para estimar as coordenadas desse ponto.

(c) Confirme suas estimativas das coordenadas do segundo ponto de interseção resolvendo as equações da curva e da tangente simultaneamente (tecla "Solver").

Teoria e exemplos

49. O polinômio geral de grau n tem a seguinte forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

onde $a_n \neq 0$. Determine $P'(x)$.

50. A reação do organismo a um medicamento A resposta do corpo a uma dose de um medicamento às vezes é representada por uma equação na forma

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

onde C é uma constante positiva e M a quantidade de medicamento absorvida pelo sangue. Se a resposta esperada for uma variação na pressão sangüínea, então R deverá ser medido em milímetros de mercúrio; se a resposta for uma variação de temperatura, R será medido em graus centígrados e assim por diante.

Determine dR/dM. Essa derivada, em função de M, é chamada sensibilidade do corpo ao medicamento. Na Seção 4.5, veremos como determinar a dose de medicamento à qual o organismo é mais sensível.

51. Suponha que, na regra do produto, a função v tenha um valor constante c. O que diz então a regra do produto? O que se conclui a partir disso sobre a regra da multiplicação por constante?

52. Regra da recíproca

(a) A *regra da recíproca* diz que, em qualquer ponto onde a função $v(x)$ seja derivável e diferente de zero,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

Mostre que a regra da recíproca é um caso especial da regra do quociente.

(b) Mostre que a regra da recíproca, juntamente com a regra do produto, forma a regra do quociente.

53. Generalizando a regra do produto A regra do produto fornece a fórmula

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

para a derivada do produto uv de duas funções deriváveis de x.

(a) Qual é a fórmula análoga para a derivada do produto uvw de *três* funções deriváveis de x?

(b) Qual é a fórmula para a derivada do produto $u_1u_2u_3u_4$ de *quatro* funções deriváveis de x?

(c) Qual é a fórmula para a derivada do produto $u_1u_2u_3\ldots u_n$ de um número finito n de funções deriváveis de x?

54. Potências racionais

(a) Determine $\frac{d}{dx}(x^{3/2})$ escrevendo $x^{3/2}$ como $x \cdot x^{1/2}$ e usando a regra do produto. Dê a resposta como um número racional multiplicado por uma potência racional de x. Trabalhe nos itens (b) e (c) com um método semelhante.

(b) Determine $\frac{d}{dx}(x^{5/2})$

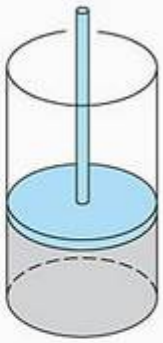
(c) Determine $\frac{d}{dx}(x^{7/2})$

(d) Quais padrões você observa em suas respostas nos itens (a), (b) e (c)? As potências racionais serão estudadas na Seção 3.6.

55. Pressão no cilindro Se um gás (real) for mantido em um cilindro a uma temperatura constante T, a pressão P estará relacionada com o volume V de acordo com uma fórmula na forma

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

em que a, b, n e R são constantes. Determine dP/dV. (Veja a figura a seguir.)



56. A quantidade ideal de pedidos Uma das fórmulas para o gerenciamento de estoque diz que o custo médio semanal de pedidos, pagamentos e armazenamento de mercadorias é

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$$

onde q é a quantidade (de sapatos, rádios, vassouras ou qualquer outro item) pedida quando os estoques estão em baixa, k é o custo para se fazer um pedido (sempre o mesmo, independentemente da freqüência com que se faz o pedido), c é o custo de cada item (constante), m é a quantidade de itens vendidos por semana (constante) e h é o custo semanal para manter cada item armazenado (constante que incorpora aspectos como espaço, utilidade, seguro e segurança). Determine dA/dq e d^2A/dq^2.

3.3 A derivada como taxa de variação

Na Seção 2.1, estudamos inicialmente as taxas de variação média e instantânea. Nesta seção, continuaremos a estudar as aplicações das derivadas na modelagem da taxa das mudanças no mundo ao nosso redor. Revisaremos o estudo do movimento ao longo de uma reta e examinaremos outras aplicações.

É natural pensar em variação como mudança em relação ao tempo, mas outras variáveis podem ser tratadas da mesma maneira. Por exemplo, um médico pode querer saber como a mudança na dosagem influi na resposta do corpo a uma droga. Um economista pode querer estudar como o custo da produção de aço varia de acordo com o número de toneladas produzido.

Taxas de variação instantâneas

Se interpretarmos a razão incremental $(f(x + h) - f(x))/h$ como a taxa de variação média de f no intervalo de x a $x + h$, poderemos interpretar seu limite quando $h \to 0$ como a taxa com que f varia no ponto x.

Definição **Taxa de variação instantânea**

A **taxa de variação instantânea** de f em relação a x em x_0 é a derivada

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

desde que o limite exista.

Logo, taxas instantâneas são limites de taxas médias.

Convencionou-se usar o adjetivo *instantâneo* mesmo quando o x não representa o tempo. Entretanto, o adjetivo é freqüentemente omitido. Quando dizemos *taxa de variação*, queremos dizer *taxa de variação instantânea*.

EXEMPLO 1 Como a área de um círculo varia com o diâmetro

A área A de um círculo está relacionada com seu diâmetro pela equação

$$A = \frac{\pi}{4} D^2$$

A que taxa a área muda em relação ao diâmetro, quando o diâmetro é igual a 10 m?

SOLUÇÃO A taxa de variação da área em relação ao diâmetro é

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\pi}{4} \cdot 2D = \frac{\pi D}{2}$$

Quando $D = 10$ m, a área varia a uma taxa de $(\pi/2)10 = 5\pi$ m²/m.

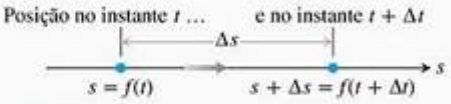


FIGURA 3.13 Posições de um corpo que se desloca ao longo de um eixo coordenado no instante t e logo após em $t + \Delta t$.

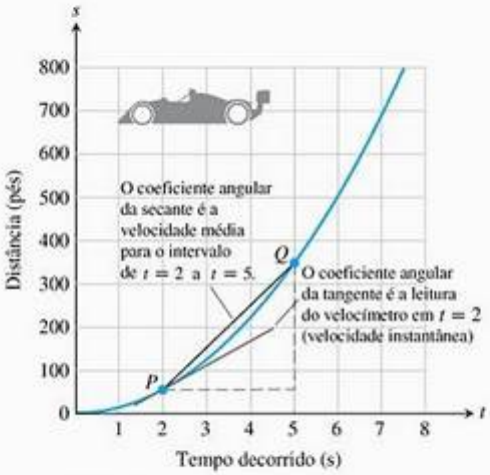


FIGURA 3.14 Gráfico de tempo e distância para o Exemplo 2. O coeficiente angular da tangente em P é a velocidade instantânea em $t = 2$ s.

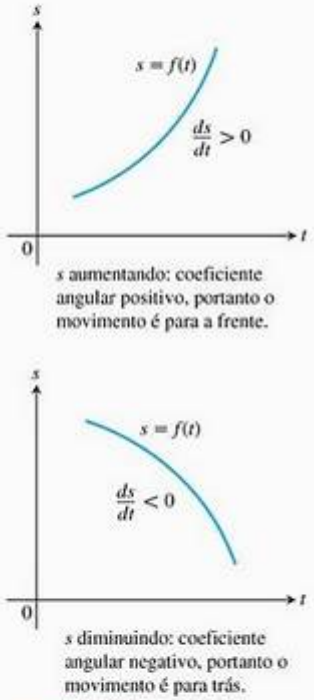


FIGURA 3.15 Para o movimento $s = f(t)$ ao longo de uma reta, $v = ds/dt$ é positivo quando s aumenta e negativo quando s diminui.

Movimento ao longo de uma reta: deslocamento, velocidade, módulo da velocidade, aceleração e sobreaceleração

Suponha que um objeto se desloque ao longo de um eixo coordenado (digamos o eixo s) e que conheçamos sua posição em função do tempo t:

$$s = f(t)$$

O **deslocamento** do objeto no intervalo de t a $t + \Delta t$ (Figura 3.13) é

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

e sua **velocidade média** nesse intervalo é

$$v_{av} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo de trajeto}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Para encontrar a velocidade do corpo no exato instante t, calculamos o limite da velocidade média no intervalo t a $t + \Delta t$ com Δt tendendo a zero. Esse limite é a derivada de f em relação a t.

Definição Velocidade

Velocidade (velocidade instantânea) é a derivada da posição em relação ao tempo. Se a posição de um corpo no instante t é $s = f(t)$, então sua velocidade no instante t é

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

EXEMPLO 2 Determinando a velocidade de um carro de corrida

A Figura 3.14 mostra o gráfico de tempo e distância para um carro de corrida Riley & Scott Mk III–Olds WSC ano 1996. O coeficiente angular da secante PQ é a velocidade média para o intervalo de três segundos de $t = 2$ s a $t = 5$ s, que, nesse caso, é de aproximadamente 100 pés/s ou 68 mi/h.

O coeficiente angular da tangente em P é a leitura do velocímetro em $t = 2$ s, aproximadamente 57 pés/s ou 39 mi/h. A aceleração no intervalo apresentado é quase uma constante com 28,5 pés/s^2 durante cada segundo, que está em torno de 0,89 g, onde g é a aceleração da gravidade. A velocidade máxima do carro é estimada em 190 mi/h. (*Fonte: Road and Track*, mar. 1997.)

Além de informar o ritmo com que um objeto se desloca, a velocidade mostra o sentido do movimento. Quando o objeto se desloca para a frente (s aumenta), a velocidade é positiva; quando o corpo vai para trás (s diminui), ela é negativa (Figura 3.15).

Se formos à casa de um amigo de carro e de lá voltarmos a 30 mi/h, o velocímetro marcará 30 no caminho de ida, mas não −30 no caminho de volta, mesmo que a distância em relação à casa esteja diminuindo. O velocímetro sempre mostra o *módulo da velocidade*, o valor absoluto da velocidade. O módulo da velocidade mede a taxa de progresso, independentemente do sentido.

Definição **Módulo da velocidade**

Módulo da velocidade é o valor absoluto da velocidade.

Módulo da velocidade $= |v(t)| = \left|\dfrac{ds}{dt}\right|$

EXEMPLO 3 Movimento horizontal

A Figura 3.16 mostra a velocidade $v = f'(t)$ de uma partícula que se desloca em um eixo coordenado. A partícula vai para a frente nos primeiros 3 s, para trás nos 2 s seguintes, pára por um segundo e vai de novo para a frente. Ela atinge a velocidade máxima no instante $t = 4$, enquanto se desloca para trás.

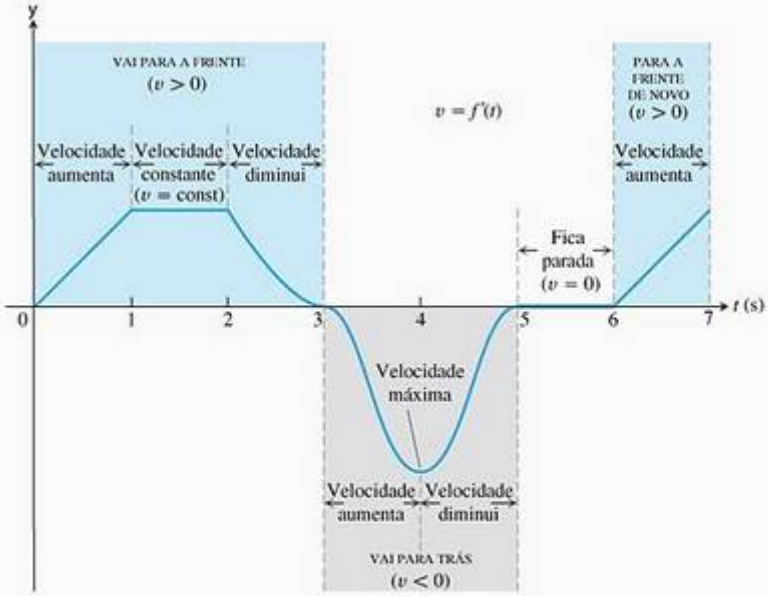


FIGURA 3.16 Gráfico da velocidade para o Exemplo 3.

A taxa com que a velocidade de um corpo varia é a *aceleração* do corpo. A aceleração mede quanto o corpo ganha ou perde velocidade.

Uma mudança repentina na aceleração é chamada *sobreaceleração*. Uma viagem de carro ou de ônibus pode se tornar desagradável quando há muita sobreaceleração. Isso não significa que as acelerações envolvidas sejam necessariamente grandes, mas que as variações na aceleração são abruptas.

Companion Website

Biografia histórica

Bernard Bolzano (1781-1848)

Definições **Aceleração, sobreaceleração**

Aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo. Se a posição de um corpo no instante t é $s = f(t)$, então sua aceleração no instante t é

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Sobreaceleração é a derivada da aceleração em relação ao tempo:

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Próximo à superfície da Terra, todos os corpos caem com a mesma aceleração constante. Os experimentos de Galileu sobre queda livre (Exemplo 1, Seção 2.1) levaram à equação

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

onde s é a distância e g é a aceleração da gravidade da Terra. Essa equação é válida para o vácuo, onde não há resistência do ar, e reproduz com grande aproximação a queda de objetos densos e pesados como rochas ou ferramentas de aço, nos primeiros segundos de queda, antes de a resistência do ar começar a retardá-los.

O valor de g na equação $s = (1/2)gt^2$ depende das unidades usadas para medir t e s. Com t em segundos (a unidade usual), o valor de g determinado pela mensuração ao nível do mar é de aproximadamente 32 pés/s^2 (pés por segundo ao quadrado) em unidades do sistema anglo-saxão, e $g = 9{,}8$ m/s^2 (metros por segundo ao quadrado) em unidades métricas. (Essas constantes gravitacionais dependem da distância ao centro de massa da Terra, sendo ligeiramente menores no topo do Monte Everest, por exemplo.)

A sobreaceleração da aceleração constante da gravidade ($g = 9{,}8$ m/s^2) é zero:

$$j = \frac{d}{dt}(g) = 0$$

Um objeto não exibe sobreaceleração em queda livre.

EXEMPLO 4 Determinando um modelo para queda livre

A Figura 3.17 mostra a queda livre de uma bola pesada partindo do repouso no instante $t = 0$ s.

(a) Quantos metros a bola cai nos primeiros 2 s?

(b) Quais são sua velocidade, o módulo de sua velocidade e sua aceleração nesse instante?

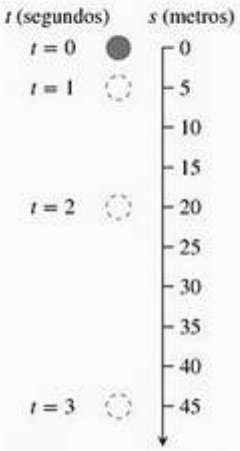


FIGURA 3.17 Uma esfera de aço caindo a partir do repouso (Exemplo 4).

SOLUÇÃO

(a) A equação métrica da queda livre é $s = 4{,}9t^2$. Durante os dois primeiros segundos, a bola cai

$$s(2) = 4{,}9(2)^2 = 19{,}6 \text{ m}$$

(b) Em qualquer instante t, a *velocidade* é a derivada da posição:

$$v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}(4{,}9t^2) = 9{,}8t$$

Em $t = 2$ s, a velocidade é

$$v(2) = 19{,}6 \text{ m/s}$$

para baixo (s aumenta). *O módulo da velocidade* em $t = 2$ é

$$\text{Módulo da velocidade} = |v(2)| = 19{,}6 \text{ m/s}$$

Em qualquer instante t, a *aceleração* é

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Em $t = 2$, a aceleração é 9,8 m/s^2.

EXEMPLO 5 Determinando um modelo para movimento vertical

Uma carga de dinamite lança uma pedra pesada para cima com uma velocidade de lançamento de 160 pés/s (aproximadamente 109 mi/h) (Figura 3.18a). A pedra atinge uma altura de $s = 160t - 16t^2$ pés após t segundos.

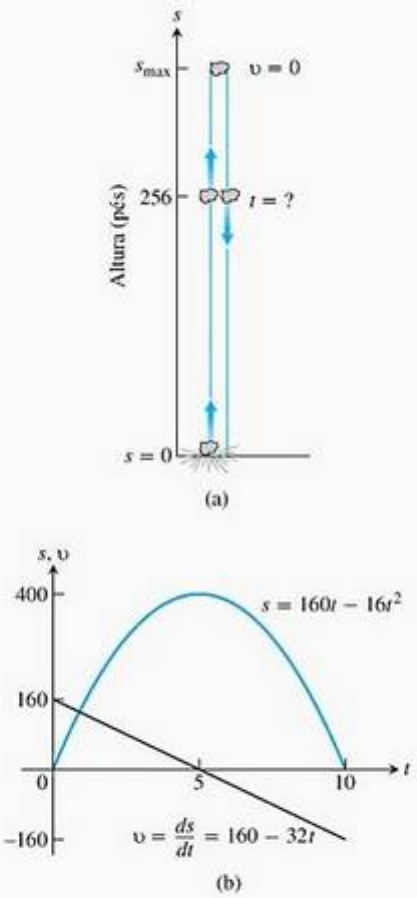


FIGURA 3.18 (a) A pedra do Exemplo 5. (b) Gráficos de s e v em função do tempo; s é máximo quando $v = ds/dt = 0$. O gráfico de s *não* é a trajetória da pedra: é o gráfico da altura pelo tempo. O coeficiente angular do gráfico da velocidade da pedra está representado aqui como uma linha reta.

(a) Qual é a altura máxima atingida pela pedra?

(b) Quais são a velocidade e o módulo da velocidade da pedra quando ela está a 256 pés do solo na subida? E na descida?

(c) Qual é a aceleração da pedra em qualquer instante t durante sua trajetória (depois da explosão)?

(d) Quando a pedra atingirá o solo novamente?

SOLUÇÃO

(a) No sistema de coordenadas que escolhemos, s mede a altura acima do solo, então a velocidade é positiva para cima e negativa para baixo. O instante em que a pedra está no ponto mais alto é aquele em que sua velocidade é nula. Para encontrar sua altura máxima, tudo o que precisamos fazer é calcular quando $v = 0$ e avaliar s nesse momento.

Em qualquer instante t, a velocidade é

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(160t - 16t^2) = 160 - 32t \text{ pés/s}$$

A velocidade é nula quando

$$160 - 32t = 0 \qquad \text{ou} \qquad t = 5 \text{ s}$$

A altura da pedra em $t = 5$ s é

$$s_{max} = s(5) = 160(5) - 16(5)^2 = 800 - 400 = 400 \text{ pés}$$

Veja a Figura 3.18b.

(b) Para calcular a velocidade da pedra a 256 pés na subida e depois na descida, primeiro, determinamos os dois valores de t para os quais

$$s(t) = 160t - 16t^2 = 256$$

Para resolver essa equação, escrevemos

$$\begin{aligned} 16t^2 - 160t + 256 &= 0 \\ 16(t^2 - 10t + 16) &= 0 \\ (t - 2)(t - 8) &= 0 \end{aligned}$$

$$t = 2 \text{ s}, t = 8 \text{ s}$$

A pedra está a 256 pés acima do solo, 2 s após a explosão e novamente 8 s após a explosão. Suas velocidades nesses instantes são

$$v(2) = 160 - 32(2) = 160 - 64 = 96 \text{ pés/s}$$
$$v(8) = 160 - 32(8) = 160 - 256 = -96 \text{ pés/s}$$

Nos dois instantes, o módulo da velocidade da pedra é igual a 96 pés/s. Como $v(2) > 0$, a pedra está se movendo para cima (s está crescendo) em $t = 2$ s; e para baixo (s está diminuindo) em $t = 8$ porque $v(8) < 0$.

(c) Em qualquer instante durante a trajetória, depois da explosão, a aceleração da pedra é uma constante

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(160 - 32t) = -32 \text{ pés/s}^2$$

A aceleração é sempre dirigida para baixo. Quando a pedra sobe, ela freia; quando cai, ela acelera.

(d) A pedra atinge o solo no instante positivo t para o qual $s = 0$. A equação $160t - 16t^2 = 0$ se decompõe nos fatores $16t\,(10 - t) = 0$, apresentando as soluções $t = 0$ e $t = 10$. No instante $t = 0$, houve a explosão e a pedra foi jogada para cima. Ela retornou ao solo 10 s depois.

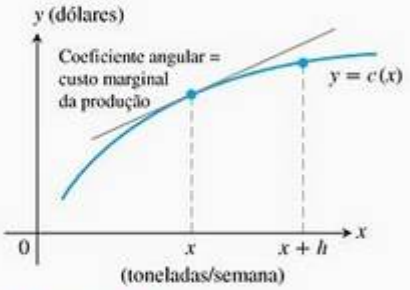


FIGURA 3.19 Produção semanal de aço: $c(x)$ é o custo para produzir x toneladas por semana. O custo para produzir h toneladas adicionais é $c(x + h) - c(x)$.

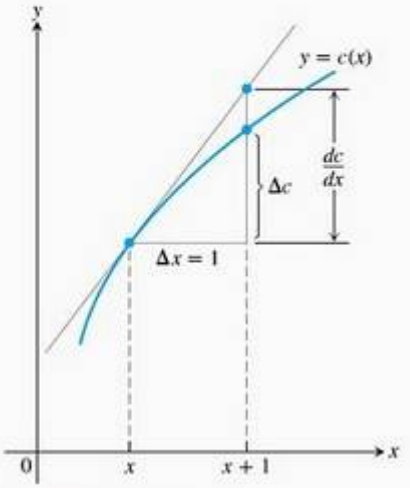


FIGURA 3.20 O custo marginal dc/dx é aproximadamente o custo adicional Δc para produzir $\Delta x = 1$ unidade a mais.

Derivadas na economia

Engenheiros usam os termos *velocidade* e *aceleração* para se referir às derivadas das funções que descrevem o movimento. Os economistas também possuem um vocabulário específico para taxas de variação e derivadas. Eles as chamam *marginais*.

Em uma operação de manufatura, o *custo da produção* $c(x)$ é uma função de x, o número de unidades produzido. O **custo marginal da produção** é a taxa de variação do custo em relação ao nível de produção, isto é, dc/dx.

Suponha que $c(x)$ represente o custo (em dólares) semanal da produção de x toneladas de aço. Produzir $x + h$ unidades por semana custa mais; a diferença de custo, dividida por h, é o custo médio para produzir cada tonelada adicional:

$$\frac{c(x + h) - c(x)}{h} = \text{custo médio de cada tonelada de aço adicional } h \textit{ produzida.}$$

O limite dessa razão quando $h \to 0$ é o custo marginal para produzir mais aço por semana quando a produção semanal atual de aço é de x toneladas (Figura 3.19).

$$\frac{dc}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{c(x + h) - c(x)}{h} = \text{custo marginal da produção.}$$

Às vezes, o custo marginal da produção é definido vagamente como o custo adicional para produzir uma unidade:

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x + 1) - c(x)}{1}$$

que é aproximado pelo valor de dc/dx em x. Essa aproximação será aceitável se o coeficiente angular do gráfico de c não variar rapidamente próximo de x. Então, a razão incremental estará próxima de seu limite dc/dx, que é o aumento na reta tangente, se $\Delta x = 1$ (Figura 3.20). A aproximação funciona melhor para valores maiores de x.

Os economistas muitas vezes representam a função de custo total por um polinômio cúbico

$$c(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

onde δ representa os *custos fixos*, como custos de aluguel, aquecimento, gestão e depreciação do equipamento. Os outros termos representam *custos variáveis*, como custos de matéria-prima, impostos e mão-de-obra. Os custos fixos são independentes do número de unidades produzidas, enquanto os variáveis dependem da quantidade produzida. Em geral, um polinômio cúbico é complicado o suficiente para captar o comportamento de custo num intervalo de valores relevantes.

EXEMPLO 6 Custo e rendimento marginais

Suponha que o custo seja

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

dólares para produzir x aquecedores quando são produzidos de 8 a 30 e que

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

represente o rendimento da venda de x aquecedores. Sua loja produz 10 aquecedores por dia. Qual será o custo adicional aproximado para produzir

um aquecedor a mais por dia e qual o aumento estimado no rendimento na venda de 11 aquecedores por dia?

SOLUÇÃO O custo para produzir um aquecedor a mais, quando são produzidos 10 por dia, é de aproximadamente $c'(10)$:

$$c'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 6x^2 + 15x\right) = 3x^2 - 12x + 15$$

$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195$$

O custo adicional será de aproximadamente 195 dólares. O rendimento marginal é

$$r'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 3x^2 + 12x\right) = 3x^2 - 6x + 12$$

A função rendimento marginal estima o aumento no rendimento como resultado da venda de uma unidade adicional. Se você vende atualmente 10 aquecedores por dia, pode esperar que seu rendimento aumente em torno de

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = 252 \text{ dólares}$$

se a venda aumentar para 11 aquecedores por dia.

EXEMPLO 7 Taxa de imposto marginal

Para melhor compreensão das taxas marginais, vamos ver um exemplo com taxas de imposto marginais. Se a taxa de imposto de renda marginal for de 28% e sua renda crescer 1.000 dólares, você pagará 280 dólares a mais em impostos. Isso não significa que você pagará 28% de toda a renda em impostos. Significa somente que, no seu atual nível de renda R, a taxa de aumento de impostos I em relação à renda é $dI/dR = 0{,}28$. Você pagará 0,28 dólar de imposto para cada dólar extra que receber. É claro que, se você ganhar muito mais, vai se enquadrar em uma faixa maior de imposto e sua taxa de imposto marginal vai aumentar.

Sensibilidade à variação

Quando uma pequena variação em x provoca uma grande mudança no valor de $f(x)$, dizemos que a função é relativamente **sensível** à variação em x. A derivada $f'(x)$ é uma medida dessa sensibilidade.

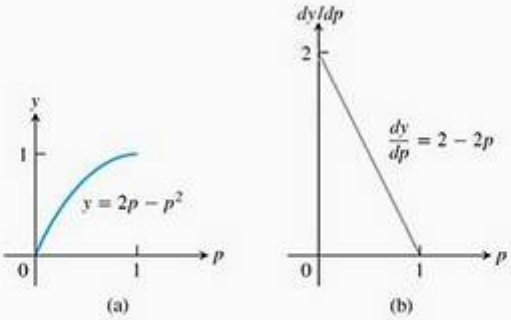


FIGURA 3.21 (a) Gráfico de $y = 2p - p^2$, descrevendo a proporção de ervilhas de casca lisa. (b) Gráfico de dy/dp (Exemplo 8).

EXEMPLO 8 Dados genéticos e sensibilidade à variação

O monge austríaco Gregor Johann Mendel (1822-1884), ao trabalhar com ervilhas e outras plantas, apresentou a primeira explicação científica para a hibridação. Suas cuidadosas anotações demonstraram que, se p (um número entre 0 e 1) é a freqüência do gene para ervilhas de casca lisa (dominante) e $(1 - p)$ a freqüência do gene para ervilhas de casca rugosa, a proporção de ervilhas de casca lisa na próxima geração será de

$$y = 2p(1 - p) + p^2 = 2p - p^2$$

O gráfico de y em função de p na Figura 3.21a sugere que o valor de y é mais sensível à variação em p quando p é pequeno do que quando é grande.

Na verdade, esse fato é confirmado pelo gráfico da derivada na Figura 3.21b, que mostra que dy/dp está próxima de 2 quando p está próximo de 0 e próxima de 0 quando p está próximo de 1.

A implicação disso para a genética é que a introdução de alguns genes dominantes em uma população altamente recessiva (em ervilhas cuja freqüência de ervilhas para pele rugosa é pequena) terá um resultado mais dramático nas próximas gerações do que o mesmo tipo de introdução em uma população altamente dominante.

Exercícios 3.3

Movimento ao longo de uma reta coordenada

Nos exercícios 1–6, dê as posições $s = f(t)$ de um corpo que se desloca em um eixo coordenado, com s em metros e t em segundos.

(a) Determine o deslocamento do corpo e a velocidade média para o intervalo dado.

(b) Determine o módulo da velocidade e a aceleração do corpo nas extremidades do intervalo.

(c) O corpo muda de direção durante o intervalo? Em caso afirmativo, quando?

1. $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 2$
2. $s = 6t - t^2, \quad 0 \le t \le 6$
3. $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \le t \le 3$
4. $s = (t^4/4) - t^3 + t^2, \quad 0 \le t \le 3$
5. $s = \dfrac{25}{t^2} - \dfrac{5}{t}, \quad 1 \le t \le 5$
6. $s = \dfrac{25}{t+5}, \quad -4 \le t \le 0$
7. **Movimento de uma partícula** No instante t, a posição de um corpo que se desloca ao longo do eixo s é $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ m.

   (a) Determine a aceleração do corpo toda vez que a velocidade for nula.

   (b) Determine o módulo da velocidade do corpo toda vez que a aceleração for nula.

   (c) Determine a distância total percorrida pelo corpo de $t = 0$ a $t = 2$.

8. **Movimento de uma partícula** No instante $t \ge 0$, a velocidade de um corpo que se desloca ao longo do eixo s é $v = t^2 - 4t + 3$.

   (a) Determine a aceleração do corpo toda vez que a velocidade for nula.

   (b) Quando o corpo está se deslocando para a frente? E para trás?

   (c) Quando a velocidade do corpo está aumentando? E diminuindo?

Aplicações da queda livre

9. **Queda livre em Marte e Júpiter** As equações para queda livre nas superfícies de Marte e de Júpiter (s em metros, t em segundos) são $s = 1{,}86t^2$ em Marte e $s = 11{,}44t^2$ em Júpiter. Quanto tempo uma pedra leva, a partir do repouso, para atingir a velocidade de 27,8 m/s (cerca de 100 km/h) em cada planeta?

10. **Movimento de um projétil na Lua** Uma pedra atirada verticalmente para cima na superfície da Lua com velocidade de 24 m/s (cerca de 86 km/h) atinge uma altura de $s = 24t - 0{,}8t^2$ metros em t segundos.

    (a) Determine a velocidade e a aceleração da pedra no instante t. (Nesse caso, a aceleração é a aceleração da gravidade na Lua.)

    (b) Quanto tempo a pedra leva para atingir o ponto mais alto?

    (c) Qual a altura atingida pela pedra?

    (d) Quanto tempo a pedra leva para atingir metade de sua altura máxima?

    (e) Quanto tempo a pedra fica no ar?

11. **Encontrando g para um pequeno planeta sem ar** Na superfície de um pequeno planeta sem ar, exploradores usaram um estilingue para atirar uma esfera metálica verticalmente para cima com uma velocidade de lançamento de 15 m/s. Como a aceleração da gravidade era g_s m/s^2, os exploradores esperavam que a esfera atingisse uma altura de $s = 15t - (1/2)g_s t^2$ metros após t segun-

dos. A esfera atingiu sua altura máxima 20 s depois do lançamento. Qual é o valor de g_s?

12. **Altura de uma bala disparando** Disparada para cima na superfície da Lua, uma bala de calibre 45 atingiria uma altura de $s = 832t - 2{,}6t^2$ pés após t segundos. Na Terra, na ausência de ar, sua altura seria de $s = 832t - 16t^2$ pés após t segundos. Quanto tempo a bala ficaria no ar em cada caso? Que altura a bala atingirá em cada caso?

13. **Queda livre partindo do topo da torre de Pisa** Se Galileu tivesse deixado cair uma bala de canhão do topo da torre de Pisa, 179 pés acima do solo, sua altura t segundos depois de cair teria sido $s = 179 - 16t^2$ pés em relação ao solo.

    (a) Quais teriam sido a velocidade, o módulo da velocidade e a aceleração da bala no instante t?

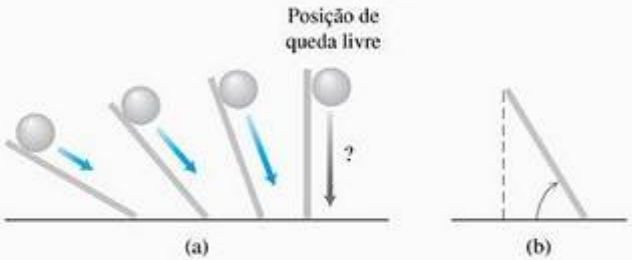
    (b) Quanto tempo a bala levaria, aproximadamente, para atingir o solo?

    (c) Qual teria sido a velocidade da bala no momento do impacto?

14. **Fórmula de Galileu para queda livre** Galileu desenvolveu uma fórmula para calcular a velocidade de um corpo em queda livre, rolando bolas (a partir do repouso) sobre pranchas de inclinação variável, quando procurava por uma fórmula-limite para prever o comportamento da bola na prancha na vertical e caindo livremente. Veja a parte (a) da figura a seguir. Ele descobriu que, para qualquer ângulo da prancha, a velocidade da bola em queda durante t segundos era um múltiplo constante de t. Ou seja, a velocidade era dada por uma fórmula na forma $v = kt$. O valor da constante k depende da inclinação da prancha.

    Usando uma notação moderna, a parte (b) da figura mostra o que os experimentos de Galileu permitiram determinar: que a velocidade da bola, com distância em metros e tempo em segundos, para qualquer ângulo θ e com t segundos de rolagem, era

$$v = 9{,}8(\text{sen}\,\theta)t \text{ m/s}$$

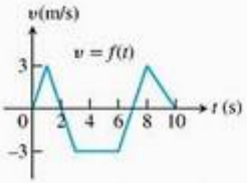


    (a) Qual é a equação para a velocidade da bola durante a queda livre?

    (b) Usando os dados do item (a), qual é a aceleração constante que um corpo em queda livre experimenta quando está próximo da superfície da Terra?

Conclusões sobre movimento obtidas graficamente

15. A figura a seguir mostra a velocidade $v = ds/dt = f(t)$ (em m/s) de um corpo que se desloca ao longo de um eixo coordenado.



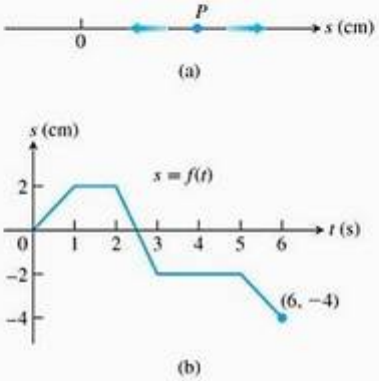
    (a) Quando o corpo muda de sentido?

    (b) Quando (aproximadamente) o corpo se desloca a uma velocidade constante?

    (c) Faça o gráfico do módulo da velocidade do corpo para $0 \le t \le 10$.

    (d) Faça o gráfico da aceleração, onde ela é definida.

16. Uma partícula P desloca-se na escala da figura a seguir, parte (a). A parte (b) mostra sua posição em função do tempo t.



    (a) Quando P se desloca para a esquerda? E para a direita? E quando permanece parado?

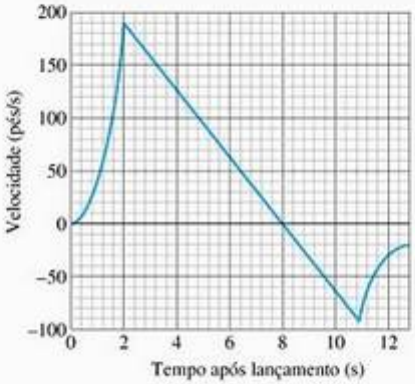
    (b) Faça o gráfico da velocidade e do módulo da velocidade da partícula (onde são definidas).

17. **Lançando um foguete** Quando um foguete em miniatura é lançado, os propulsores queimam combustível durante alguns segundos, acelerando o foguete para cima. Terminada a combustão, o foguete ainda sobe um pouco e logo depois começa a cair. Em seguida, uma pequena carga de explosivos abre um pára-quedas, que diminui a velocidade do foguete, impedindo que se danifique ao pousar.

A figura a seguir mostra os dados de velocidade da trajetória de um foguete em miniatura. Use-os para responder às seguintes questões:

(a) Com qual velocidade o foguete estava subindo quando o motor parou?

(b) Durante quantos segundos o propulsor queimou combustível?



(c) Quando o foguete atingiu sua altura máxima? Qual era sua velocidade naquele momento?

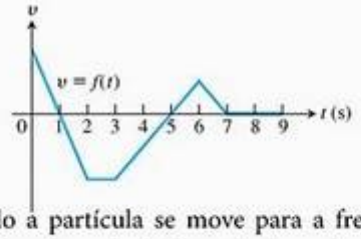
(d) Quando o pára-quedas se abriu? Qual era a velocidade do foguete naquele momento?

(e) Quanto tempo levou para o foguete cair antes de o pára-quedas abrir?

(f) Quando a aceleração do foguete foi maior?

(g) Quando sua aceleração se tornou constante? Qual era seu valor (o inteiro mais próximo)?

18. A figura a seguir mostra a velocidade $v = f(t)$ de uma partícula se movimentando ao longo de uma reta coordenada.



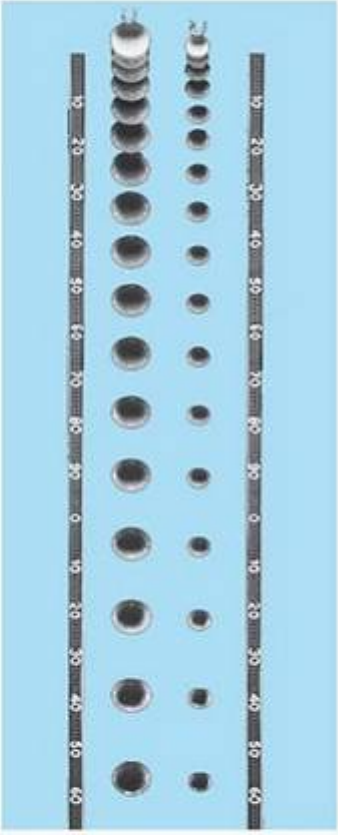
(a) Quando a partícula se move para a frente? E para trás? Quando acelera? Quando desacelera?

(b) Quando a aceleração da partícula é positiva? Negativa? Nula?

(c) Quando a partícula se move à velocidade máxima?

(d) Quando a partícula permanece parada por mais de um instante?

19. Duas bolas caindo Na figura a seguir, a foto com múltiplas exposições mostra duas bolas caindo a partir do repouso (as escalas verticais estão marcadas em centímetros). Use a equação $s = 490t^2$ (equação da queda livre, s em centímetros e t em segundos) para responder às questões a seguir.



(a) Quanto tempo as bolas levaram para cair os primeiros 160 cm? Qual era sua velocidade média nesse intervalo?

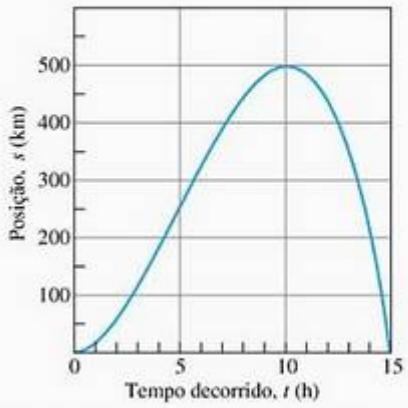
(b) Qual era a velocidade das bolas que estavam caindo quando atingiram a marca de 160 cm? Qual era sua aceleração nesse momento?

(c) Qual era a velocidade aproximada dos flashes de luz (flashes por segundo)?

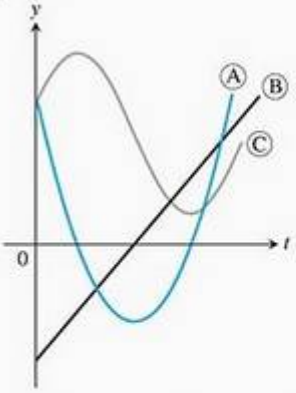
20. Um caminhão na estrada O gráfico a seguir mostra a posição s de um caminhão que percorre uma estrada. O caminhão parte em $t = 0$ e retorna 15 h mais tarde, quando $t = 15$.

(a) Use a técnica descrita na Seção 3.1 (Exemplo 3) para fazer o gráfico da velocidade do caminhão $v = ds/dt$ para $0 \le t \le 15$. Em seguida, repita o procedimento para fazer o gráfico de sua aceleração dv/dt.

(b) Suponha que $s = 15t^2 - t^3$. Faça os gráficos de ds/dt e de d^2s/dt^2, comparando-os com aquele feito no item (a).



21. Os gráficos da figura a seguir mostram a posição s, a velocidade $v = ds/dt$ e a aceleração $a = d^2s/dt^2$ de um corpo que se desloca ao longo de uma reta coordenada em função do tempo t. A qual gráfico corresponde cada função? Justifique suas respostas.



22. Os gráficos da Figura 3.22 mostram a posição s, a velocidade $v = ds/dt$ e a aceleração $a = d^2s/dt^2$ de um corpo que se desloca ao longo de uma reta coordenada como funções do tempo t. A qual gráfico corresponde cada função? Justifique suas respostas.

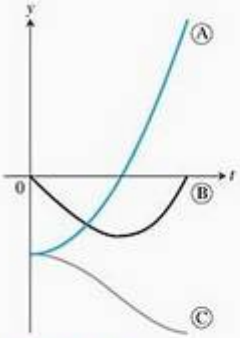


FIGURA 3.22 As curvas do Exercício 22.

Economia

23. **Custo marginal** Suponha que o custo (em dólares) para produzir x máquinas de lavar seja $c(x) = 2.000 + 100x - 0{,}1x^2$.

(a) Determine o custo médio por máquina produzida durante a produção das 100 primeiras máquinas.

(b) Calcule o custo marginal para a produção de 100 máquinas.

(c) Mostre que, para a produção de 100 máquinas, o custo marginal é aproximadamente o custo para a produção de uma máquina a mais (depois que as 100 primeiras foram feitas), calculando diretamente o último custo citado.

24. **Rendimento marginal** Suponha que o rendimento da venda de x máquinas de lavar seja

$$r(x) = 20.000\left(1 - \frac{1}{x}\right) \text{ dólares}$$

(a) Determine o rendimento marginal para a produção de 100 máquinas.

(b) Use a função $r'(x)$ para estimar o aumento resultante no rendimento, se a produção aumentar de 100 para 101 máquinas por semana.

(c) Calcule o limite de $r'(x)$ quando $x \to \infty$. Como você interpretaria esse número?

Aplicações adicionais

25. **População de bactérias** Ao adicionar um bactericida a um meio nutritivo onde bactérias estavam crescendo, a população de bactérias continuou a crescer por um tempo, mas depois parou de crescer e começou a diminuir. O tamanho da população no instante t (em horas) era dado por $b = 10^6 + 10^4t - 10^3t^2$. Determine as taxas de crescimento para

(a) $t = 0$ horas.

(b) $t = 5$ horas.

(c) $t = 10$ horas.

26. **Esvaziando um tanque** O número de galões de água em um tanque, t minutos depois de iniciar seu esvaziamento, é dado por $Q(t) = 200(30 - t)^2$. A que taxa a água escoará ao fim de 10 min? Qual é a taxa média de saída da água durante os 10 primeiros minutos?

27. **Esvaziando um tanque** Depois de aberta a válvula
T inferior de um tanque de armazenamento, é necessário esperar 12 horas para esvaziá-lo. A profundidade y (em metros) do líquido no tanque, t horas depois que a válvula foi aberta, é dada por

$$y = 6\left(1 - \frac{t}{12}\right)^2 \text{ m}$$

(a) Encontre a taxa dy/dt (m/h) de esvaziamento do tanque no instante t.

(b) Quando a altura do líquido no tanque diminuirá mais rapidamente? E mais lentamente? Quais os valores de dy/dt nesses instantes?

(c) Represente graficamente y e dy/dt juntos e discuta o comportamento de y em relação aos sinais e aos valores de dy/dt.

28. **Enchendo um balão** O volume $V = (4/3)\pi r^3$ de um balão esférico muda de acordo com o valor do raio.

(a) Qual é a taxa (em pés^3/pés) de variação de volume em relação ao raio, quando $r = 2$ pés?

(b) Aproximadamente quanto o volume do balão aumenta quando o raio muda de 2 para 2,2 pés?

29. **Decolagem de um avião** Suponha que a distância percorrida por uma aeronave na pista antes de decolar seja dada por $D = (10/9)t^2$ (medindo-se D em metros desde o ponto de partida e t em segundos depois que os freios foram soltos). A aeronave começa a planar quando sua velocidade atinge 200 km/h. Quanto tempo levará para a aeronave planar e que distância ela percorrerá nesse tempo?

30. **Fontes de lava vulcânica** Embora a erupção do Kilauea Iki, no Havaí, em novembro de 1959, tenha começado com uma linha de fontes laterais na parede da cratera, a atividade ficou restrita a uma única abertura no fundo da cratera, que em certo momento lançou lava a 1.900 pés de altura (um recorde mundial). Qual foi a velocidade de saída da lava em pés/s? E em mi/h? (*Dica*: Se v_0 é a velocidade de saída de uma partícula de lava, sua altura no instante t será dada por $s = v_0t - 16t^2$ pés. Comece determinando o instante em que $ds/dt = 0$. Despreze a resistência do ar.)

T Nos exercícios 31–34, dê a função da posição $s = f(t)$ de um corpo que se desloca ao longo de um eixo s em função do tempo t. Faça o gráfico de f junto com as funções velocidade $v(t) = ds/dt = f'(t)$ e aceleração $a(t) = d^2s/dt^2 = f''(t)$. Comente o comportamento do corpo em relação aos sinais e aos valores de v e de a, incluindo:

(a) Quando o corpo está momentaneamente em repouso?

(b) Quando ele se move para a esquerda (para baixo) ou para a direita (para cima)?

(c) Quando ele muda de sentido?

(d) Quando ele acelera ou freia?

(e) Quando ele se desloca mais rapidamente (velocidade mais alta)? E de maneira mais lenta?

(f) Quando ele está mais longe da origem do eixo?

31. $s = 200t - 16t^2$, $0 \le t \le 12{,}5$ (objeto pesado, na superfície da Terra, lançado verticalmente com velocidade de 200 pés/s)

32. $s = t^2 - 3t + 2,\ 0 \le t \le 5$

33. $s = t^3 - 6t^2 + 7t,\ 0 \le t \le 4$

34. $s = 4 - 7t + 6t^2 - t^3,\ 0 \le t \le 4$

35. **Corrida de um puro-sangue** Um cavalo de corrida está fazendo uma corrida de 10 furlongs. (Um furlong equivale a 201 metros, mas neste exercício usaremos furlongs e segundos como unidades.) Sempre que o cavalo passa por uma marca de furlongs (F), um apontador anota o tempo (t) decorrido desde o início da corrida, como se vê na tabela:

F	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	0	20	33	46	59	73	86	100	112	124	135

(a) Quanto tempo o cavalo leva para completar a corrida?

(b) Qual é a velocidade média do cavalo durante os cinco primeiros furlongs?

(c) Qual é a velocidade aproximada do cavalo quando ele ultrapassa a terceira marca de furlongs?

(d) Em que parte do percurso o cavalo corre mais rápido?

(e) Em que parte do percurso o cavalo acelera mais?

3.4 Derivadas de funções trigonométricas

Muitos dos fenômenos sobre os quais desejamos informações são periódicos (campos eletromagnéticos, ritmo cardíaco, marés, tempo). As derivadas das funções desempenham papel fundamental na descrição de mudanças periódicas. Esta seção mostra como derivar as seis funções trigonométricas básicas (apresentadas no Apêndice B.3).

Derivada da função seno

Para calcular a derivada de $f(x) = \text{sen } x$, sendo x medido em radianos, combinamos os limites do Exemplo 5a e o Teorema 7 da Seção 2.4 com a identidade para o seno da soma:

$$\text{sen } (x + h) = \text{sen } x \cos h + \cos x \text{ sen } h$$

Se $f(x) = \text{sen } x$, então

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x + h) - \text{sen } x}{h} && \text{Definição de derivada.} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(\text{sen } x \cos h + \cos x \text{ sen} h) - \text{sen } x}{h} && \text{Identidade para o seno da soma.} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } x (\cos h - 1) + \cos x \text{ sen } h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\text{sen } x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \to 0} \left(\cos x \cdot \frac{\text{sen } h}{h} \right) \\
&= \text{sen } x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } h}{h} \\
&= \text{sen } x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 && \text{Exemplo 5a e Teorema 7, Seção 2.4.} \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

A derivada da função seno é a função cosseno:

$$\frac{d}{dx} (\text{sen } x) = \cos x$$

EXEMPLO 1 Derivadas envolvendo seno

(a) $y = x^2 - \text{sen } x$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 2x - \frac{d}{dx} (\text{sen } x) && \text{Regra da diferença.} \\
&= 2x - \cos x
\end{aligned}$$

(b) $y = e^x \text{ sen } x$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= e^x \frac{d}{dx} (\text{sen } x) + \frac{d}{dx} (e^x) \text{ sen } x && \text{Regra do produto.} \\
&= e^x \cos x + e^x \text{ sen } x \\
&= e^x (\cos x + \text{sen } x)
\end{aligned}$$

(c) $y = \dfrac{\text{sen } x}{x}$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x \cdot \frac{d}{dx} (\text{sen } x) - \text{sen } x \cdot 1}{x^2} && \text{Regra do quociente.} \\
&= \frac{x \cos x - \text{sen } x}{x^2}
\end{aligned}$$

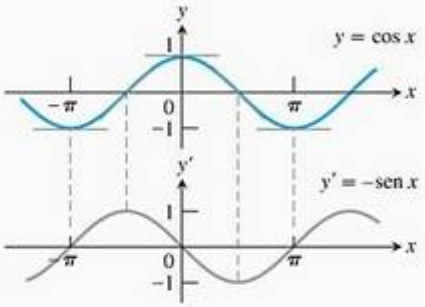


FIGURA 3.23 Curva $y' = -\text{sen}\, x$ e o gráfico dos coeficientes angulares das tangentes à curva $y = \cos x$.

Derivada da função cosseno

Com a ajuda da fórmula para o cosseno da soma,

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, h,$$

temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\cos x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} && \text{Definição de derivada.}\\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(\cos x \cos h - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, h) - \cos x}{h} && \text{Identidade do cosseno da soma.}\\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, h}{h}\\
&= \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \to 0} \text{sen}\, x \cdot \frac{\text{sen}\, h}{h}\\
&= \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \text{sen}\, x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}\, h}{h}\\
&= \cos x \cdot 0 - \text{sen}\, x \cdot 1 && \text{Exemplo 5a e Teorema 7 da Seção 2.4.}\\
&= -\text{sen}\, x.
\end{aligned}$$

A derivada da função cosseno é o oposto da função seno:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen}\, x$$

A Figura 3.23 mostra outra maneira de visualizar esse resultado.

EXEMPLO 2 Derivadas envolvendo o cosseno

(a) $y = 5e^x + \cos x$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(5e^x) + \frac{d}{dx}(\cos x) && \text{Regra da soma.}\\
&= 5e^x - \text{sen}\, x
\end{aligned}$$

(b) $y = \text{sen}\, x \cos x$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \text{sen}\, x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\text{sen}\, x) && \text{Regra do produto.}\\
&= \text{sen}\, x(-\text{sen}\, x) + \cos x(\cos x)\\
&= \cos^2 x - \text{sen}^2 x
\end{aligned}$$

(c) $y = \dfrac{\cos x}{1 - \text{sen}\, x}$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(1 - \text{sen}\, x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1 - \text{sen}\, x)}{(1 - \text{sen}\, x)^2} && \text{Regra do quociente.}\\
&= \frac{(1 - \text{sen}\, x)(-\text{sen}\, x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \text{sen}\, x)^2}\\
&= \frac{1 - \text{sen}\, x}{(1 - \text{sen}\, x)^2} && \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1\\
&= \frac{1}{1 - \text{sen}\, x}
\end{aligned}$$

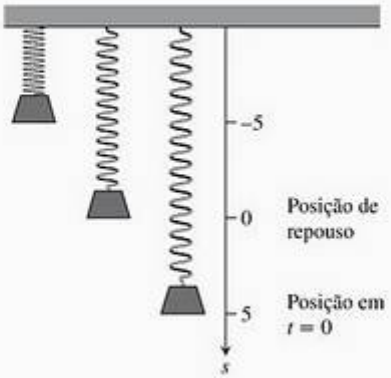


FIGURA 3.24 Um corpo que pende de uma mola vertical e em seguida é deslocado oscila para baixo e para cima de sua posição de repouso. Seu movimento é descrito por funções trigonométricas (Exemplo 3).

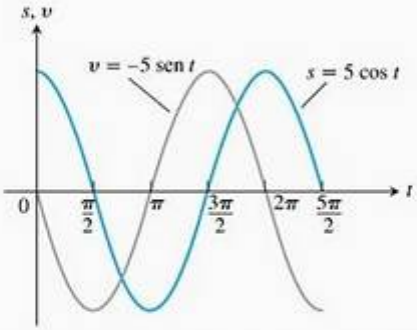


FIGURA 3.25 Gráficos de posição e velocidade do corpo do Exemplo 3.

Movimento harmônico simples

O movimento de um corpo oscilando livremente para cima e para baixo na ponta de uma mola ou corda elástica é um exemplo de *movimento harmônico simples*. O próximo exemplo descreve um caso em que não há forças opostas como atrito ou empuxo para retardar o movimento.

EXEMPLO 3 Movimento em uma mola

Um corpo suspenso em uma mola (Figura 3.24) é deslocado em cinco unidades da posição de repouso e solto, no instante $t = 0$, para oscilar para cima e para baixo. Sua posição em qualquer instante t é

$$s = 5 \cos t$$

Quais são sua velocidade e aceleração no instante t?

SOLUÇÃO Temos

Posição: $s = 5 \cos t$

Velocidade: $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(5 \cos t) = -5 \operatorname{sen} t$

Aceleração: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \operatorname{sen} t) = -5 \cos t$

Veja o que podemos aprender com essas equações:

1. Com o passar do tempo, o peso se desloca para cima e para baixo entre $s = -5$ e $s = 5$ no eixo s. A amplitude do movimento é 5. O período do movimento é 2π.
2. A velocidade $v = -5$ sen t atinge sua maior magnitude, 5, quando $\cos t = 0$, como mostram os gráficos da Figura 3.25. Portanto, a velocidade do peso, $|v| = 5\,|\operatorname{sen} t|$, é máxima quando $\cos t = 0$, ou seja, quando $s = 0$ (posição de repouso). O módulo da velocidade do peso é zero quando sen $t = 0$. Isso ocorre quando $s = 5 \cos t = \pm 5$, nas extremidades do intervalo do movimento.
3. O valor da aceleração é sempre o oposto do valor da posição. Quando o peso está acima da posição de repouso, a gravidade o puxa para baixo; quando o peso está abaixo, a mola o puxa para cima.
4. A aceleração, $a = -5 \cos t$, é zero somente na posição de repouso, onde $\cos t = 0$ e a força da gravidade anula a força da mola. Quando o peso está em qualquer outro lugar, as duas forças são desiguais e a aceleração é diferente de zero. A aceleração é máxima em magnitude nos pontos mais distantes da posição de repouso, onde $\cos t = \pm 1$.

EXEMPLO 4 Sobreaceleração

A sobreaceleração do movimento harmônico simples do Exemplo 3 é

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \cos t) = 5 \operatorname{sen} t$$

Sua magnitude é máxima quando sen $t = \pm 1$, não nos extremos do deslocamento, mas na posição de repouso, onde a aceleração muda de sentido e de sinal.

Derivadas de outras funções trigonométricas básicas

Como sen x e cos x são funções deriváveis de x, as funções relacionadas

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{e} \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

são deriváveis para qualquer valor de x nos quais elas são definidas. Suas derivadas, calculadas pela regra do quociente, são dadas pelas fórmulas a seguir. Observe os sinais negativos nas fórmulas das derivadas para as co-funções.

Derivadas das outras funções trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$$

Para mostrar um cálculo típico, calculamos a derivada da função tangente. As outras derivações foram deixadas para o Exercício 50.

EXEMPLO 5

Encontre $d(\operatorname{tg} x)/dx$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\operatorname{tg} x\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen} x\right) - \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}\left(\cos x\right)}{\cos^2 x} && \text{Regra do quociente.} \\
&= \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

EXEMPLO 6

Determine y'' se $y = \sec x$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
y &= \sec x \\
y' &= \sec x \operatorname{tg} x \\
y'' &= \frac{d}{dx}(\sec x \operatorname{tg} x) \\
&= \sec x \frac{d}{dx}\left(\operatorname{tg} x\right) + \operatorname{tg} x \frac{d}{dx}\left(\sec x\right) && \text{Regra do produto.} \\
&= \sec x(\sec^2 x) + \operatorname{tg} x(\sec x \operatorname{tg} x) \\
&= \sec^3 x + \sec x \operatorname{tg}^2 x
\end{aligned}$$

A diferenciabilidade das funções trigonométricas em todas as partes de seus domínios dá outra prova de sua continuidade em qualquer ponto de seus domínios (Teorema 1 da Seção 3.1). Conseqüentemente, podemos calcular os limites de combinações algébricas e composições de funções trigonométricas por substituição direta.

EXEMPLO 7 Encontrando o limite de uma função trigonométrica

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2 + \sec x}}{\cos(\pi - \operatorname{tg} x)} = \frac{\sqrt{2 + \sec 0}}{\cos(\pi - \operatorname{tg} 0)} = \frac{\sqrt{2 + 1}}{\cos(\pi - 0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

Exercícios 3.4

Derivadas

Nos exercícios 1–12, determine dy/dx.

1. $y = -10x + 3\cos x$
2. $y = \frac{3}{x} + 5\operatorname{sen} x$
3. $y = \operatorname{cosec} x - 4\sqrt{x} + 7$
4. $y = x^2 \operatorname{cotg} x - \frac{1}{x^2}$
5. $y = (\sec x + \operatorname{tg} x)(\sec x - \operatorname{tg} x)$
6. $y = (\operatorname{sen} x + \cos x)\sec x$
7. $y = \frac{\operatorname{cotg} x}{1 + \operatorname{cotg} x}$
8. $y = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$
9. $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$
10. $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$
11. $y = x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x$
12. $y = x^2 \cos x - 2x\operatorname{sen} x - 2\cos x$

Nos exercícios 13–16, determine ds/dt.

13. $s = \operatorname{tg} t - e^{-t}$
14. $s = t^2 - \sec t + 5e^t$
15. $s = \frac{1 + \operatorname{cosec} t}{1 - \operatorname{cosec} t}$
16. $s = \frac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t}$

Nos exercícios 17–20, determine $dr/d\theta$.

17. $r = 4 - \theta^2 \operatorname{sen}\theta$
18. $r = \theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$
19. $r = \sec\theta\operatorname{cosec}\theta$
20. $r = (1 + \sec\theta)\operatorname{sen}\theta$

Nos exercícios 21–24, determine dp/dq.

21. $p = 5 + \frac{1}{\operatorname{cotg} q}$
22. $p = (1 + \operatorname{cosec} q)\cos q$
23. $p = \frac{\operatorname{sen} q + \cos q}{\cos q}$
24. $p = \frac{\operatorname{tg} q}{1 + \operatorname{tg} q}$
25. Determine y'' se
    (a) $y = \operatorname{cosec} x$ (b) $y = \sec x$
26. Determine $y^{(4)} = d^4 y/dx^4$ se
    (a) $y = -2\operatorname{sen} x$ (b) $y = 9\cos x$

Retas tangentes

Nos exercícios 27–30, represente graficamente as curvas nos intervalos dados e as respectivas tangentes para os valores dados de x. Identifique cada curva e tangente com a respectiva equação.

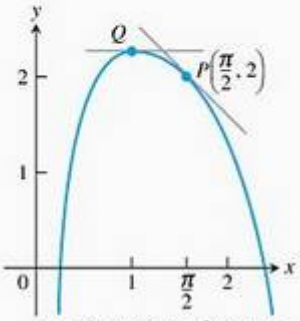
27. $y = \operatorname{sen} x, \quad -3\pi/2 \le x \le 2\pi$
    $x = -\pi, 0, 3\pi/2$
28. $y = \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
    $x = -\pi/3, 0, \pi/3$
29. $y = \sec x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
    $x = -\pi/3, \pi/4$
30. $y = 1 + \cos x, \quad -3\pi/2 \le x \le 2\pi$
    $x = -\pi/3, 3\pi/2$

T Os gráficos das funções nos exercícios 31–34 têm alguma tangente horizontal no intervalo $0 \le x \le 2\pi$? Se têm, onde estão? Se não têm, por que não? Visualize os gráficos correspondentes introduzindo os dados das funções em uma ferramenta gráfica.

31. $y = x + \operatorname{sen} x$
32. $y = 2x + \operatorname{sen} x$
33. $y = x - \operatorname{cotg} x$
34. $y = x + 2\cos x$
35. Encontre todos os pontos da curva $y = \operatorname{tg} x$, para $-\pi/2 < x < \pi/2$, onde a tangente é paralela à reta $y = 2x$. Esboce a curva e a(s) tangente(s) no mesmo gráfico, identificando cada uma com sua equação.
36. Encontre todos os pontos da curva $y = \operatorname{cotg} x$, para $0 < x < \pi$, onde a tangente é paralela à reta $y = -x$. Esboce a curva e a(s) tangente(s) no mesmo gráfico, identificando cada uma com sua equação.

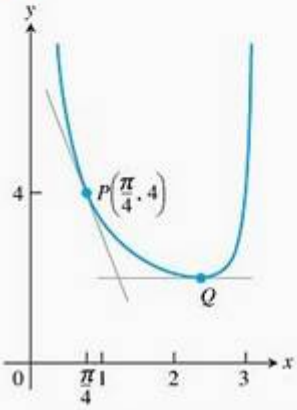
Nos exercícios 37 e 38, encontre as equações para: **(a)** a tangente à curva em P e **(b)** a tangente horizontal à curva em Q.

37.



$y = 4 + \text{cotg}\, x - 2\,\text{cosec}\, x$

38.



$y = 1 + \sqrt{2}\,\text{cosec}\, x + \text{cotg}\, x$

Limites trigonométricos

Encontre os limites nos exercícios 39–44.

39. $\lim_{x \to 2} \text{sen}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)$

40. $\lim_{x \to -\pi/6} \sqrt{1 + \cos(\pi\, \text{cosec}\, x)}$

41. $\lim_{x \to 0} \sec\left[e^x + \pi\, \text{tg}\left(\frac{\pi}{4 \sec x}\right) - 1\right]$

42. $\lim_{x \to 0} \text{sen}\left(\frac{\pi + \text{tg}\, x}{\text{tg}\; x - 2 \sec x}\right)$

43. $\lim_{t \to 0} \text{tg}\left(1 - \frac{\text{sen}\, t}{t}\right)$

44. $\lim_{\theta \to 0} \cos\left(\frac{\pi\theta}{\text{sen}\, \theta}\right)$

Movimento harmônico simples

As equações dos exercícios 45 e 46 dão a posição $s = f(t)$ de um corpo que se desloca em uma reta coordenada (s em metros, t em segundos). Determine a velocidade, o módulo da velocidade, a aceleração e a sobreaceleração do corpo no instante $t = \pi/4$ s.

45. $s = 2 - 2\,\text{sen}\, t$ **46.** $s = \text{sen}\, t + \cos t$

Teoria e exemplos

47. Existe algum valor de c que torne

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}^2\, 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

contínua em $x = 0$? Justifique sua resposta.

48. Existe algum valor de b que torne

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$$

contínua em $x = 0$? E derivável em $x = 0$? Justifique suas respostas.

49. Determine $d^{999}/dx^{999}\,(\cos x)$.

50. Encontre a fórmula para a derivada em relação a x de

(a) $\sec x$ **(b)** $\text{cosec}\, x$ **(c)** $\text{cotg}\, x$

51. T Represente graficamente $y = \cos x$ para $-\pi \leq x \leq 2\pi$. Na mesma tela, esboce o gráfico de

$$y = \frac{\text{sen}\,(x + h) - \text{sen}\, x}{h}$$

para $h = 1$; 0,5; 0,3; e 0,1. Depois, em outro domínio, use $h = -1$, $-0{,}5$; e $-0{,}3$. O que acontece quando $h \to 0^+$? E quando $h \to 0^-$? Que fenômeno está sendo ilustrado aqui?

52. T Represente graficamente $y = -\text{sen}\, x$ para $-\pi \leq x \leq 2\pi$. Na mesma tela, esboce o gráfico de

$$y = \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$$

para $h = 1$; 0,5; 0,3; e 0,1. Depois, em outro domínio, use $h = -1$; $-0{,}5$; e $-0{,}3$. O que acontece quando $h \to 0^+$? E quando $h \to 0^-$? Que fenômeno está sendo ilustrado aqui?

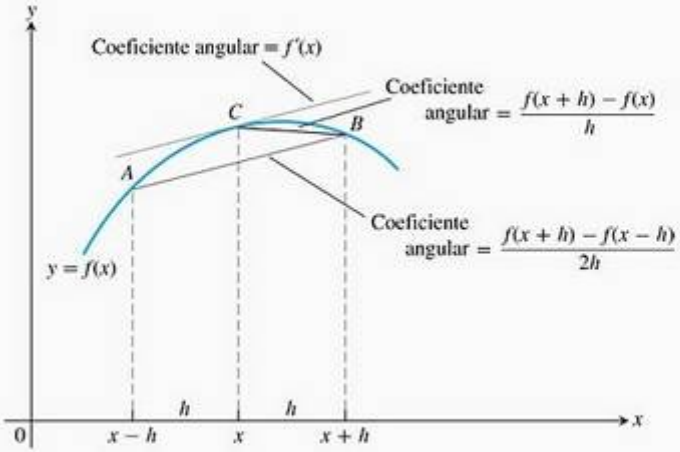
53. T **Diferença dividida centralizada** A diferença dividida *centralizada*

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

é usada para aproximar $f'(x)$ no trabalho numérico porque (1) seu limite, quando $h \to 0$, iguala-se a $f'(x)$ quando $f'(x)$ existe e (2) geralmente fornece melhor aproximação de $f'(x)$, para dado valor de h, do que a diferença dividida de Fermat

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Veja a figura a seguir.



(a) Para ver com que rapidez a diferença dividida centralizada de $f(x) = \text{sen } x$ converge para $f'(x) = \cos x$, faça o gráfico de $y = \cos x$ junto com

$$y = \frac{\text{sen}(x + h) - \text{sen}(x - h)}{2h}$$

no intervalo $[-r, 2\pi]$ para $h = 1$; 0,5; e 0,3. Compare esses resultados com os obtidos no Exercício 51 (para os mesmos valores de h).

(b) Para ver com que rapidez a diferença dividida centralizada de $f'(x) = \cos x$ converge para $(x) = -\text{ sen } x$, faça o gráfico de $y = -\text{sen } x$ junto com

$$y = \frac{\cos(x + h) - \cos(x - h)}{2h}$$

no intervalo $[-\pi, 2\pi]$ para $h = 1$; 0,5; e 0,3. Compare esses resultados com os obtidos no Exercício 52 (para os mesmos valores de h).

54. **Precaução com a diferença dividida centralizada** (*Continuação do Exercício 53.*) O quociente

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

pode ter um limite, conforme $h \to 0$ quando f não tem derivada em x. Para exemplificar, considere $f(x) = |x|$ e calcule

$$\lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0 - h|}{2h}$$

Você verá que o limite existe, embora $f(x) = |x|$ não tenha derivada em $x = 0$. *Conclusão*: antes de usar a diferença dividida centralizada, certifique-se de que a derivada existe.

55. **Coeficientes angulares no gráfico da função tangente** T Faça os gráficos de $y = \text{tg } x$ e de sua derivada em $(-\pi/2, \pi/2)$ juntos. O gráfico da função tangente parece ter um coeficiente angular mínimo? E máximo? Em algum momento o coeficiente angular é negativo? Justifique suas respostas.

56. **Coeficientes angulares no gráfico da função cotangente** T Faça os gráficos de $y = \text{cotg } x$ e de sua derivada em $0 < x < \pi$ juntos. O gráfico da função cotangente parece ter um coeficiente angular mínimo? E máximo? Em algum momento o coeficiente angular é positivo? Justifique suas respostas.

57. **Explorando (sen kx)/x** T Faça os gráficos de $y = (\text{sen } x)/x$, $y = (\text{sen } 2x)/x$ e $y = (\text{sen } 4x)/x$ juntos no intervalo $-2 \le x \le 2$. Onde cada gráfico parece cruzar o eixo y? Os gráficos realmente cortam os eixos? O que você esperaria dos gráficos de $y = (\text{sen } 5x)/x$ e $y = (\text{sen}(-3x))/x$, quando $x \to 0$? Por quê? E do gráfico de $y = (\text{sen } kx)/x$ para outros valores de k? Justifique suas respostas.

58. **Radianos *versus* graus: derivadas no modo grau** O que aconteceria com as derivadas de sen x e de cos x se x fosse medido em graus em vez de em radianos? Para descobrir, siga os passos a seguir.

(a) Selecionando o *modo grau* de sua calculadora gráfica ou computador, faça o gráfico de

$$f(h) = \frac{\text{sen } h}{h}$$

e estime $\lim_{h \to 0} f(h)$. Compare essa estimativa com $\pi/180$. Existe alguma razão para acreditar que o limite *deveria* ser $\pi/180$?

(b) Ainda no modo grau de sua calculadora gráfica, estime

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

(c) Agora volte à derivação da fórmula para a derivada de sen x no texto e siga os passos da derivação usando limites no modo grau. Que fórmula você obtém para a derivada?

(d) Trabalhe na dedução da fórmula para a derivada de cos x usando limites no modo grau. Que fórmula você obtém para a derivada?

(e) As desvantagens das fórmulas no modo grau tornam-se evidentes quando você lida com derivadas superiores. Tente. No modo grau, quais são a segunda e a terceira derivadas de sen x e cos x?

3.5 A regra da cadeia e as equações paramétricas

Sabemos diferenciar $y = f(u) = \text{sen } u$ e $u = g(x) = x^2 - 4$, mas como diferenciar uma função composta do tipo $F(x) = f(g(x)) = \text{sen } (x^2 - 4)$? As fórmulas de derivação que estudamos não nos dizem como calcular $F'(x)$. Então, como encontramos a derivada de $F = f \quad g$? A resposta está na regra da cadeia, segundo a qual a derivada da composta de duas funções deriváveis é o produto de suas

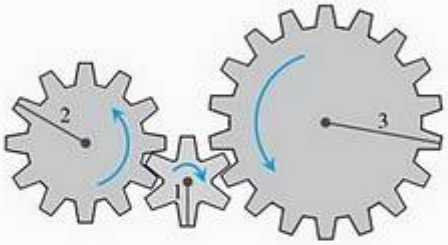


FIGURA 3.26 Quando a engrenagem A dá x voltas completas, a B dá u voltas e a C dá y voltas. Comparando circunferências ou contando os dentes, notamos que $y = u/2$ (C dá meia-volta a cada volta inteira de B) e $u = 3x$ (B dá três voltas a cada volta dada por A), então $y = 3x/2$. Assim, $dy/dx = 3/2 = (1/2)(3) = (dy/du)(du/dx)$.

derivadas calculadas em pontos adequados. A regra da cadeia é uma das mais importantes e amplamente utilizadas regras de derivação. Esta seção descreverá essa regra, mostrando como usá-la. Em seguida, aplicaremos a regra da cadeia para descrever as curvas no plano e suas tangentes de um modo diferente.

Derivada de uma função composta

Começaremos com exemplos.

EXEMPLO 1 Relacionando derivadas

A função $y = \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}(3x)$ é a função composta de $y = \frac{1}{2}u$ e $u = 3x$. Como as derivadas dessas funções se relacionam?

SOLUÇÃO Temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{du}{dx} = 3$$

Uma vez que $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3$, observamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Seria coincidência que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}?$$

Se pensarmos em derivada como taxa de variação, a intuição nos leva a ver que essa relação é razoável. Se $y = f(u)$ varia com a metade da rapidez de u e $u = g(x)$ varia três vezes mais rápido que x, esperamos que y varie 3/2 vezes mais rápido que x. Esse efeito é bem parecido com um trem de múltiplas engrenagens (Figura 3.26).

EXEMPLO 2 Relacionando derivadas

A função

$$y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$$

é a função composta de $y = u^2$ e $u = 3x^2 + 1$. Calculando as derivadas, observamos que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x \end{aligned}$$

Calculando a derivada a partir da fórmula expandida, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(9x^4 + 6x^2 + 1) \\ &= 36x^3 + 12x \end{aligned}$$

Mais uma vez,

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

A derivada de uma função composta $f(g(x))$ em x é a derivada de f em $g(x)$ multiplicada pela derivada de g em x. Essa observação é conhecida como regra da cadeia (Figura 3.27).

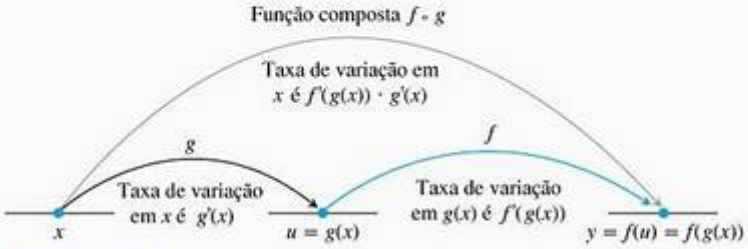


FIGURA 3.27 Taxas de variação se multiplicam: a derivada de $f \circ g$ em x é a derivada de f no ponto $g(x)$ multiplicada pela derivada de g no ponto x.

Teorema 3 A regra da cadeia

Se $f(u)$ é derivável no ponto $u = g(x)$ e $g(x)$ é derivável em x, então a função composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é derivável em x e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

onde dy/du é calculada em $u = g(x)$.

"PROVA" INTUITIVA DA REGRA DA CADEIA Seja Δu a variação de u correspondente à variação Δx de x, dada por

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

Então, a variação correspondente em y é

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Seria tentador escrever

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{1}$$

e calcular o limite quando $\Delta x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} && \text{(Observe que } \Delta u \to 0 \text{ conforme } \Delta x \to 0\text{, uma vez que } g \text{ é contínua.)} \\
&= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

O único problema desse raciocínio é que na Equação (1) pode acontecer de $\Delta u = 0$ (mesmo quando $\Delta x \neq 0$) e aí, é claro, não poderemos dividir por 0. A prova exige uma abordagem diferente para superar esse problema, conforme veremos na Seção 3.10.

EXEMPLO 3 Aplicando a regra da cadeia

Um objeto se desloca ao longo do eixo x de modo que em qualquer instante $t \geq 0$ sua posição seja dada pela equação $x(t) = \cos(t^2 + 1)$. Determine a velocidade do objeto em função de t.

SOLUÇÃO Sabemos que a velocidade é dx/dt. Neste exemplo, x é uma função composta: $x = \cos(u)$ e $u = t^2 + 1$. Temos

$$\frac{dx}{du} = -\operatorname{sen}(u) \qquad x = \cos(u)$$

$$\frac{du}{dt} = 2t \qquad u = t^2 + 1$$

Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= -\operatorname{sen}(u) \cdot 2t \qquad \frac{dx}{du} \text{ calculado em } u \\ &= -\operatorname{sen}(t^2 + 1) \cdot 2t \\ &= -2t \operatorname{sen}(t^2 + 1) \end{aligned}$$

Conforme vemos no Exemplo 3, uma dificuldade com a notação de Leibniz é que ela não estabelece especificamente onde as derivadas devem ser calculadas.

Regra do "de fora para dentro"

Às vezes, é mais fácil notar a regra da cadeia da seguinte maneira: se $y = f(g(x))$, então

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Traduzindo em palavras, derive a função externa ("de fora") f, calcule-a na função interna ("de dentro") $g(x)$ intocada, multiplicando-a depois pela derivada da função "de dentro".

EXEMPLO 4 Derivando de fora para dentro

Derive $\operatorname{sen}(x^2 + x)$ em relação a x.

SOLUÇÃO

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}\underbrace{(x^2 + e^x)}_{\text{função interna}} = \cos\underbrace{(x^2 + e^x)}_{\text{função interna intocada}} \cdot \underbrace{(2x + e^x)}_{\text{derivada da função interna}}$$

EXEMPLO 5 Aplicando a regra da cadeia à função exponencial

Derive $y = e^{\cos x}$.

SOLUÇÃO Aqui, a função interna é $u = g(x) = \cos x$ e a externa é a função exponencial $f(x) = e^x$. Aplicando a regra da cadeia, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\cos x}) = e^{\cos x}\frac{d}{dx}(\cos x) = e^{\cos x}(-\operatorname{sen} x) = -e^{\cos x}\operatorname{sen} x.$$

Generalizando o Exemplo 5, vemos que a regra da cadeia nos dá a fórmula

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

Assim, por exemplo,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{kx}\right) = e^{kx}\cdot\frac{d}{dx}(kx) = ke^{kx} \quad \text{para uma constante } k$$

e

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right) = e^{x^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2xe^{x^2}$$

Uso repetido da regra da cadeia

Às vezes, precisamos usar a regra da cadeia duas ou mais vezes para obter uma derivada. Eis um exemplo.

Companion Website
Biografia histórica
Johann Bernoulli (1667-1748)

EXEMPLO 6 A "cadeia" de três elos

Encontre a derivada de $g(t) = tg\,(5 - \text{sen}\,2t)$.

SOLUÇÃO Veja que, nesse caso, a tangente é uma função de $5 - \text{sen}\,2t$, enquanto o seno é uma função de $2t$, que é função de t. Portanto, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt}(\text{tg}\,(5 - \text{sen}\,2t)) && \text{Derivada de } tg\,u \text{ com } u = 5 - \text{sen}\,2t. \\ &= \sec^2(5 - \text{sen}\,2t)\cdot\frac{d}{dt}(5 - \text{sen}\,2t) && \text{Derivada de } 5 - \text{sen}\,u \text{ com } u = 2t \\ &= \sec^2(5 - \text{sen}\,2t)\cdot\left(0 - \cos 2t\cdot\frac{d}{dt}(2t)\right) \\ &= \sec^2(5 - \text{sen}\,2t)\cdot(-\cos 2t)\cdot 2 \\ &= -2(\cos 2t)\sec^2(5 - \text{sen}\,2t) \end{aligned}$$

Regra da cadeia com as potências de uma função

Se f é uma função derivável de u, e u é uma função derivável de x, então substituir $y = f(u)$ na fórmula da regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

nos leva à fórmula

$$\frac{d}{dx}f(u) = f'(u)\frac{du}{dx}$$

Eis um exemplo de como isso funciona: se n é um inteiro positivo ou negativo e $f(u) = u^n$, as regras da potenciação (regras 2 e 7) afirmam que $f'(u) = nu^{n-1}$. Se u é uma função derivável de x, podemos aplicar a regra da cadeia, ampliando-a para a **regra da cadeia para potências**:

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{du}\left(u^n\right) = nu^{n-1}$$

EXEMPLO 7 Aplicando a regra da cadeia para potências

(a) $$\frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)^7 = 7(5x^3 - x^4)^6 \frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)$$ Regra de cadeia para potências com $u = 5x^3 - x^4$, $n = 7$

$$= 7(5x^3 - x^4)^6(5 \cdot 3x^2 - 4x^3)$$

$$= 7(5x^3 - x^4)^6(15x^2 - 4x^3)$$

(b) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3x - 2}\right) = \frac{d}{dx}(3x - 2)^{-1}$$

$$= -1(3x - 2)^{-2}\frac{d}{dx}(3x - 2)$$ Regra de cadeia para potências com $u = 3x - 2$, $n = -1$

$$= -1(3x - 2)^{-2}(3)$$

$$= -\frac{3}{(3x - 2)^2}$$

No item **(b)** também poderíamos ter usado a regra do quociente para encontrar a derivada.

$\operatorname{sen}^n x$ é uma abreviatura para $(\operatorname{sen} x)^n$, $n \neq -1$.

EXEMPLO 8 Determinando coeficientes angulares das tangentes

(a) Encontre o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = \operatorname{sen}^5 x$ no ponto onde $x = \pi/3$.

(b) Mostre que o coeficiente angular de qualquer reta tangente à curva $y = 1/(1 - 2x)^3$ é positivo.

SOLUÇÃO

(a) $$\frac{dy}{dx} = 5\operatorname{sen}^4 x \cdot \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x$$ Regra da cadeia para potências com $u = \operatorname{sen} x$, $n = 5$

$$= 5\operatorname{sen}^4 x \cos x$$

A reta tangente tem coeficiente angular

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\pi/3} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{32}$$

(b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1 - 2x)^{-3}$$

$$= -3(1 - 2x)^{-4} \cdot \frac{d}{dx}(1 - 2x)$$ Regra da cadeia para potências, com $u = (1 - 2x)$, $n = -3$

$$= -3(1 - 2x)^{-4} \cdot (-2)$$

$$= \frac{6}{(1 - 2x)^4}$$

Em qualquer ponto (x, y) na curva, $x \neq 1/2$ e o coeficiente angular da reta tangente é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{(1 - 2x)^4}$$

o quociente de dois números positivos.

EXEMPLO 9 Radianos *versus* graus

É importante lembrar que as fórmulas para as derivadas de sen x e cos x foram obtidas com x medido em radianos, e *não* em graus. A regra da cadeia fornece uma nova visão sobre a diferença entre os dois. Uma vez que $180° = \pi$ radianos, $x° = \pi x/180$ radianos, onde $x°$ significa o ângulo x medido em graus.

Pela regra da cadeia,

$$\frac{dx}{dx}\text{sen}(x°) = \frac{d}{dx}\text{sen}\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos(x°).$$

Veja a Figura 3.28. De maneira semelhante, a derivada de cos $(x°)$ é $-(\pi/180)$ sen$(x°)$.

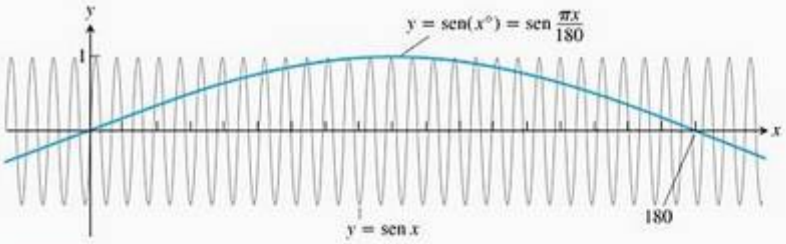


FIGURA 3.28 sen $(x°)$ oscila apenas $\pi/180$ vezes sempre que sen x oscila. Seu coeficiente angular máximo é $\pi/180$ (Exemplo 9).

O fator $\pi/180$, inoportuno na primeira derivada, combina com derivações seguidas. Rapidamente percebemos a razão que nos leva a usar a unidade radiano.

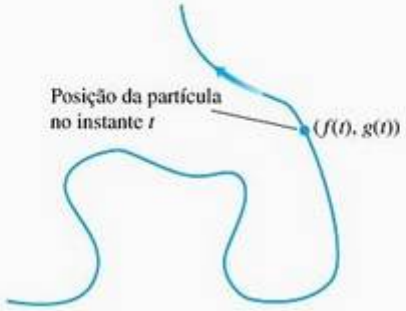


FIGURA 3.29 O caminho percorrido por uma partícula deslocando-se no plano xy nem sempre é o gráfico de uma função de x ou de uma função de y.

Equações paramétricas

Em vez de descrever uma curva expressando a ordenada de um ponto $P(x, y)$ da curva em função de x, às vezes é mais conveniente descrever a curva expressando *ambas* as coordenadas em função de uma terceira variável t. A Figura 3.29 mostra a trajetória de uma partícula em movimento descrita por um par de equações: $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Para estudar o movimento, t geralmente denota tempo. Equações como essas são melhores que uma fórmula cartesiana, porque descrevem a posição da partícula $(x, y) = (f(t), g(t))$ em qualquer instante t.

Definição Curva parametrizada

Se x e y são dados como funções

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

ao longo de um intervalo de valores de t, então o conjunto de pontos $(x, y) = (f(t), g(t))$ definido por essas equações é uma **curva parametrizada**. As equações são **equações paramétricas** para a curva.

A variável t é um **parâmetro** para a curva, e seu domínio I é o **intervalo do parâmetro**. Se I é um intervalo fechado, $a \le t \le b$, o ponto $(f(a), g(a))$ é o **ponto inicial** da curva. O ponto $(f(b), g(b))$ é o **ponto final.** Quando damos equações paramétricas e um intervalo para o parâmetro de uma curva, dizemos ter **parametrizado** a curva. As equações e o intervalo constituem, juntos, uma **parametrização** da curva.

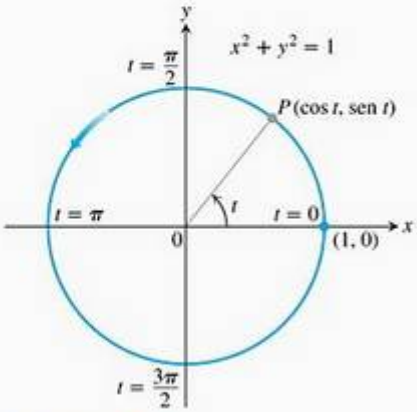


FIGURA 3.30 As equações $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$ descrevem o movimento na circunferência $x^2 + y^2 = 1$. A seta mostra o sentido de aumento de t (Exemplo 10).

EXEMPLO 10 Deslocamento em uma circunferência no sentido anti-horário

Trace as curvas paramétricas:

(a) $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

(b) $x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

SOLUÇÃO

(a) Sendo $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, a curva parametrizada situa-se ao longo da circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$. Como t aumenta de 0 a 2π, o ponto $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ inicia o traçado em (1, 0) e completa uma volta inteira em sentido anti-horário (Figura 3.30).

(b) Para $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$, temos $x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t = a^2$. A parametrização descreve um movimento que começa no ponto $(a, 0)$ e continua ao longo da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ percorrendo-a uma vez em sentido anti-horário e retornando para $(a, 0)$ em $t = 2\pi$.

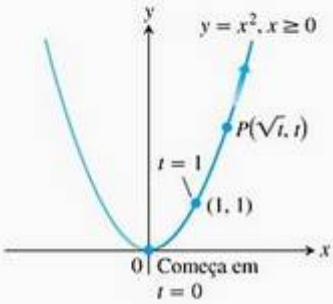


FIGURA 3.31 As equações $x = \sqrt{t}$ e $y = t$ e o intervalo $t \ge 0$ descrevem o movimento de uma partícula que percorre o ramo direito da parábola $y = x^2$ (Exemplo 11).

EXEMPLO 11 Deslocamento ao longo de uma parábola

A posição $P(x, y)$ de uma partícula deslocando-se em um plano xy é dada pelas equações e pelo intervalo do parâmetro

$$x = \sqrt{t}, \qquad y = t, \qquad t \ge 0$$

Identifique o caminho percorrido pela partícula e descreva o movimento.

SOLUÇÃO Tentamos identificar o caminho eliminando t nas equações $x = \sqrt{t}$ e $y = t$. Com alguma sorte, isso produzirá uma relação algébrica reconhecível entre x e y. Achamos que

$$y = t = \left(\sqrt{t}\right)^2 = x^2$$

Então, as coordenadas da posição da partícula satisfazem a equação $y = x^2$, de modo que a partícula se desloque ao longo da parábola $y = x^2$.

Entretanto, seria um erro concluir que o caminho da partícula seja a parábola inteira, $y = x^2$; ela é só a metade da parábola. A abscissa da partícula nunca é negativa. A partícula começa em (0, 0) quando $t = 0$ e sobe no primeiro quadrante quando t aumenta (Figura 3.31). O intervalo do parâmetro é $[0, \infty)$ e não há ponto final.

EXEMPLO 12 Parametrizando um segmento de reta

Encontre uma parametrização para o segmento de reta com extremidades (−2, 1) e (3, 5).

SOLUÇÃO Usando (−2, 1), criamos as equações paramétricas

$$x = -2 + at \qquad y = 1 + bt$$

Essas equações representam uma reta, e podemos ver isso resolvendo t em cada equação e igualando-as para obter

$$\frac{x+2}{a} = \frac{y-1}{b}$$

Essa reta cruza o ponto (−2, 1) quando $t = 0$. Determinamos a e b de modo que a reta passe em (3, 5) quando $t = 1$.

$$3 = -2 + a \Rightarrow a = 5 \qquad x = 3 \text{ quando } t = 1$$
$$5 = 1 + b \Rightarrow b = 4 \qquad y = 5 \text{ quando } t = 1$$

Portanto,

$$x = -2 + 5t \qquad y = 1 + 4t \qquad 0 \le t \le 1$$

é uma parametrização do segmento de reta com ponto inicial (–2, 1) e ponto final (3, 5).

Coeficientes angulares de curvas parametrizadas

Uma curva parametrizada $x = f(t)$ e $y = g(t)$ será **derivável** em t se x e y forem deriváveis em t. Em um ponto de uma curva parametrizada derivável, onde y também é função derivável de x, as derivadas dy/dt, dx/dt e dy/dx estão relacionadas com a regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Se $dx/dt \neq 0$, podemos dividir os dois lados da equação por dx/dt e resolver dy/dx.

Fórmula paramétrica para dy/dx

Se as três derivadas existem e $dx/dt \neq 0$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \tag{2}$$

EXEMPLO 13 Deslocamento ao longo da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

Descreva o movimento de uma partícula cuja posição $P(x, y)$ no tempo t é dada por

$$x = a \cos t \qquad y = b \operatorname{sen} t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Encontre a reta tangente à curva no ponto $(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$, quando $t = \pi/4$. (As constantes a e b são ambas positivas.)

SOLUÇÃO Encontramos uma equação cartesiana para as coordenadas da partícula eliminando t nas equações

$$\cos t = \frac{x}{a}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{y}{b}$$

A identidade $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ produz

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \text{ ou } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

As coordenadas (x, y) da partícula satisfazem a equação $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, portanto a partícula se desloca ao longo dessa elipse. Quando $t = 0$, as coordenadas da partícula são

$$x = a \cos(0) = a \qquad y = b \operatorname{sen}(0) = 0$$

logo o deslocamento começa em $(a, 0)$. Conforme t aumenta, a partícula sobe e se desloca para a esquerda, indo no sentido anti-horário. Ela dá uma volta completa na elipse, retornando ao ponto inicial $(a, 0)$ em $t = 2\pi$.

O coeficiente angular da tangente à elipse quando $t = \pi/4$ é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/4} = \left.\frac{dy/dt}{dx/dt}\right|_{t=\pi/4} \qquad \text{Equação (2)}$$

$$= \left.\frac{b\cos t}{-a\,\text{sen}\,t}\right|_{t=\pi/4}$$

$$= \frac{b/\sqrt{2}}{-a/\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}$$

A reta tangente é

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y = \frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

ou

$$y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b$$

Se as curvas parametrizadas definem y como uma função de x derivável duas vezes, então podemos aplicar a Equação (2) à função $dy/dx = y'$ para calcular d^2y/dx^2 em função de t.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt} \qquad \text{Equação (2) com } y' \text{ no lugar de } y$$

Fórmula paramétrica para d^2y/dx^2

Se as equações $x = f(t)$, $y = g(t)$ definem y como uma função de x derivável duas vezes, então em qualquer ponto onde $dx/dt \neq 0$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} \qquad (3)$$

Determinando d^2y/dx^2 em relação a t

1. Expresse $y' = dy/dx$ em termos de t.
2. Determine dy'/dt.
3. Divida dy'/dt por dx/dt.

EXEMPLO 14 Determinando d^2y/dx^2 para uma curva parametrizada

Determine d^2y/dx^2 em função de t, se $x = t - t^2$, $y = t - t^3$.

SOLUÇÃO

1. Expresse $y' = dy/dx$ em termos de t.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

2. Derive y' em relação a t.

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}\right) = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^2} \qquad \text{Regra do quociente.}$$

3. Divida dy'/dt por dx/dt.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2 - 6t + 6t^2)/(1 - 2t)^2}{1 - 2t} = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^3} \qquad \text{Equação (3)}$$

FIGURA 3.32 A trajetória da carga de suprimentos durante a queda apresentada no Exemplo 15.

EXEMPLO 15 Lançando suprimentos de emergência

Um avião da Cruz Vermelha lança suprimentos alimentares e médicos de emergência em uma área de desastre. Se o avião lançar os suprimentos imediatamente acima do limite inicial de um campo aberto com 700 pés de comprimento, e considerando que a carga se desloca para a frente durante a queda,

$$x = 120t \quad \text{e} \quad y = -16t^2 + 500, \qquad t \geq 0$$

a carga cairá dentro do campo? As coordenadas x e y são medidas em pés e o parâmetro t (tempo após o lançamento), em segundos. Encontre uma equação cartesiana para a trajetória da carga lançada (Figura 3.32) e a taxa de queda da carga em relação a seu movimento para diante quando ela atinge o solo.

SOLUÇÃO A carga atinge o solo quando $y = 0$, o que ocorre no instante t quando

$$-16t^2 + 500 = 0 \qquad \text{Fazer } y = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{500}{16}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}\,\text{sec} \qquad t \geq 0$$

A abscissa no instante do lançamento é $x = 0$. Quando a carga atinge o solo, a abscissa é

$$x = 120t = 120\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right) = 300\sqrt{5}\ \text{pés}$$

Como $300\sqrt{5} \approx 670{,}8 < 700$, então a carga cai dentro do campo.

Obtemos uma equação cartesiana para as coordenadas da carga eliminando t nas equações paramétricas:

$$\begin{aligned} y &= -16t^2 + 500 && \text{Equação paramétrica para } y \\ &= -16\left(\frac{x}{120}\right)^2 + 500 && \text{Substituir por } t \text{ da equação } x = 120t \\ &= -\frac{1}{900}x^2 + 500 && \text{Uma parábola.} \end{aligned}$$

A taxa de queda em relação ao movimento para diante, quando a carga toca o solo é

$$\begin{aligned} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=5\sqrt{5}/2} &= \left.\frac{dy/dt}{dx/dt}\right|_{t=5\sqrt{5}/2} && \text{Equação (2)} \\ &= \left.\frac{-32t}{120}\right|_{t=5\sqrt{5}/2} \\ &= -\frac{2\sqrt{5}}{3} \approx -1{,}49 \end{aligned}$$

Portanto, ao atingir o solo, a carga está caindo cerca de 1,5 pé para cada pé de movimento para diante.

Parametrizações-padrão e regras de derivadas

CIRCUNFERÊNCIA $x^2 + y^2 = a^2$:

$x = a\cos t$

$y = a\,\text{sen}\,t$

$0 \leq t \leq 2\pi$

ELIPSE $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$:

$x = a\cos t$

$y = b\,\text{sen}\,t$

$0 \leq t \leq 2\pi$

FUNÇÃO $y = f(x)$:

$x = t$

$y = f(t)$

DERIVADAS

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

Exercícios 3.5

Cálculos de derivadas

Nos exercícios 1–8, dados $y = f(u)$ e $u = g(x)$, determine $dy/dx = f'(g(x))g'(x)$.

1. $y = 6u - 9, \quad u = (1/2)x^4$
2. $y = 2u^3, \quad u = 8x - 1$
3. $y = \operatorname{sen} u, \quad u = 3x + 1$
4. $y = \cos u, \quad u = -x/3$
5. $y = \cos u, \quad u = \operatorname{sen} x$
6. $y = \operatorname{sen} u, \quad u = x - \cos x$
7. $y = \operatorname{tg} u, \quad u = 10x - 5$
8. $y = -\sec u, \quad u = x^2 + 7x$

Nos exercícios 9–22, escreva as funções na forma $y = f(u)$ e $u = g(x)$. Em seguida, determine dy/dx em função de x.

9. $y = (2x + 1)^5$
10. $y = (4 - 3x)^9$
11. $y = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-7}$
12. $y = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^{-10}$
13. $y = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^4$
14. $y = \left(\frac{x}{5} + \frac{1}{5x}\right)^5$
15. $y = \sec(\operatorname{tg} x)$
16. $y = \operatorname{cotg}\left(\pi - \frac{1}{x}\right)$
17. $y = \operatorname{sen}^3 x$
18. $y = 5\cos^{-4} x$
19. $y = e^{-5x}$
20. $y = e^{2x/3}$
21. $y = e^{5-7x}$
22. $y = e^{(4\sqrt{x}+x^2)}$

Nos exercícios 23–48, encontre as derivadas das funções.

23. $p = \sqrt{3 - t}$
24. $q = \sqrt{2r - r^2}$
25. $s = \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen} 3t + \frac{4}{5\pi}\cos 5t$
26. $s = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$
27. $r = (\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cotg}\theta)^{-1}$
28. $r = -(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)^{-1}$
29. $y = x^2\operatorname{sen}^4 x + x\cos^{-2} x$
30. $y = \frac{1}{x}\operatorname{sen}^{-5} x - \frac{x}{3}\cos^3 x$
31. $y = \frac{1}{21}(3x - 2)^7 + \left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^{-1}$
32. $y = (5 - 2x)^{-3} + \frac{1}{8}\left(\frac{2}{x} + 1\right)^4$
33. $y = (4x + 3)^4(x + 1)^{-3}$
34. $y = (2x - 5)^{-1}(x^2 - 5x)^6$
35. $y = xe^{-x} + e^{3x}$
36. $y = (1 + 2x)e^{-2x}$
37. $y = (x^2 - 2x + 2)e^{5x/2}$
38. $y = (9x^2 - 6x + 2)e^{x^3}$
39. $h(x) = x\operatorname{tg}\left(2\sqrt{x}\right) + 7$
40. $k(x) = x^2\sec\left(\frac{1}{x}\right)$
41. $f(\theta) = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}\right)^2$
42. $g(t) = \left(\frac{1 + \cos t}{\operatorname{sen} t}\right)^{-1}$
43. $r = \operatorname{sen}(\theta^2)\cos(2\theta)$
44. $r = \sec\sqrt{\theta}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{\theta}\right)$
45. $q = \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{t + 1}}\right)$
46. $q = \operatorname{cotg}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$
47. $y = \cos\left(e^{-\theta^2}\right)$
48. $y = \theta^3 e^{-2\theta}\cos 5\theta$

Nos exercícios 49–60 encontre dy/dt.

49. $y = \operatorname{sen}^2(\pi t - 2)$
50. $y = \sec^2 \pi t$
51. $y = (1 + \cos 2t)^{-4}$
52. $y = (1 + \operatorname{cotg}(t/2))^{-2}$
53. $y = e^{\cos^2(\pi t - 1)}$
54. $y = \left(e^{\operatorname{sen}(t/2)}\right)^3$
55. $y = \operatorname{sen}(\cos(2t - 5))$
56. $y = \cos\left(5\operatorname{sen}\left(\frac{t}{3}\right)\right)$
57. $y = \left(1 + \operatorname{tg}^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^3$
58. $y = \frac{1}{6}\left(1 + \cos^2(7t)\right)^3$
59. $y = \sqrt{1 + \cos(t^2)}$
60. $y = 4\operatorname{sen}\left(\sqrt{1 + \sqrt{t}}\right)$

Derivadas de segunda ordem

Nos exercícios 61–66, determine y''.

61. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$
62. $y = \left(1 - \sqrt{x}\right)^{-1}$
63. $y = \frac{1}{9}\operatorname{cotg}(3x - 1)$
64. $y = 9\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right)$
65. $y = e^{x^2} + 5x$
66. $y = \operatorname{sen}(x^2 e^x)$

Determinando os valores numéricos das derivadas

Nos exercícios 67–72, encontre o valor de $(f \circ g)'$ para os valores dados de x.

67. $f(u) = u^5 + 1, \quad u = g(x) = \sqrt{x}, \quad x = 1$
68. $f(u) = 1 - \frac{1}{u}, \quad u = g(x) = \frac{1}{1 - x}, \quad x = -1$
69. $f(u) = \operatorname{cotg}\frac{\pi u}{10}, \quad u = g(x) = 5\sqrt{x}, \quad x = 1$
70. $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}, \quad u = g(x) = \pi x, \quad x = 1/4$
71. $f(u) = \frac{2u}{u^2 + 1}, \quad u = g(x) = 10x^2 + x + 1, \quad x = 0$
72. $f(u) = \left(\frac{u - 1}{u + 1}\right)^2, \quad u = g(x) = \frac{1}{x^2} - 1, \quad x = -1$
73. Suponha que as funções f e g e suas derivadas em relação a x tenham os valores em $x = 2$ e $x = 3$ a seguir.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	−3
3	3	−4	2π	5

Encontre as derivadas em relação a x das funções compostas a seguir usando os valores dados de x.

(a) $2f(x)$, $x = 2$ (b) $f(x) + g(x)$, $x = 3$

(c) $f(x) \cdot g(x)$, $x = 3$ (d) $f(x)/g(x)$, $x = 2$

(e) $f(g(x))$, $x = 2$ (f) $\sqrt{f(x)}$, $x = 2$

(g) $1/g^2(x)$, $x = 3$ (h) $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$, $x = 2$

74. Suponha que as funções f e g e suas derivadas em relação a x tenham os valores em $x = 0$ e $x = 1$ a seguir.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	−1/3
1	3	−4	−1/3	−8/3

Encontre as derivadas em relação a x das funções compostas a seguir usando os valores dados de x.

(a) $5f(x) - g(x)$, $x = 1$

(b) $f(x)g^3(x)$, $x = 0$

(c) $\dfrac{f(x)}{g(x)+1}$, $x = 1$

(d) $f(g(x))$, $x = 0$

(e) $g(f(x))$, $x = 0$

(f) $(x^{11} + f(x))^{-2}$, $x = 1$

(g) $f(x + g(x))$, $x = 0$

75. Se $s = \cos\theta$ e $d\theta/dt = 5$, determine ds/dt para $\theta = 3\pi/2$.

76. Se $y = x^2 + 7x - 5$ e $dx/dt = 1/3$, determine dy/dx para $x = 1$.

Escolhas em funções compostas

O que aconteceria se você pudesse escrever uma função composta de diferentes maneiras? Você conseguiria sempre a mesma derivada? A regra da cadeia diz que sim. Tente com as funções dos exercícios 77 e 78.

77. Se $y = x$, determine dy/dx usando a regra da cadeia, sendo y uma função composta de

(a) $y = (u/5) + 7$ e $u = 5x - 35$

(b) $y = 1 + (1/u)$ e $u = 1/(x - 1)$

78. Se $y = x^{3/2}$, determine dy/dx usando a regra da cadeia, sendo y uma fuxnção composta de

(a) $y = u^3$ e $u = \sqrt{x}$

(b) $y = \sqrt{u}$ e $u = x^3$

Tangentes e coeficientes angulares

79. (a) Encontre a tangente à curva $y = 2\,\mathrm{tg}\,(\pi x/4)$ para $x = 1$.

(b) **Coeficientes angulares de uma curva tangente** Qual é o menor valor de coeficiente angular que uma curva pode ter no intervalo $-2 < x < 2$? Justifique sua resposta.

80. Coeficientes angulares de senóides

(a) Encontre as equações para as tangentes às curvas $y = \operatorname{sen} 2x$ e $y = -\operatorname{sen}(x/2)$ na origem. Existe algum aspecto diferente sobre o modo como essas tangentes estão relacionadas? Justifique sua resposta.

(b) O que se pode dizer sobre as tangentes às curvas $y = \operatorname{sen} mx$ e $y = -\operatorname{sen}(x/m)$ na origem (m é uma constante $\neq 0$)? Justifique sua resposta.

(c) Para dado m, quais são os maiores valores de coeficiente angular que as curvas $y = \operatorname{sen} mx$ e $y = -\operatorname{sen}(x/m)$ podem ter? Justifique sua resposta.

(d) A função $y = \operatorname{sen} x$ completa um período no intervalo $[0, 2\pi]$, a função $y = \operatorname{sen} 2x$, dois períodos, a função $y = \operatorname{sen}(x/2)$, meio período e assim por diante. Existe alguma relação entre o número de períodos que $y = \operatorname{sen} mx$ completa em $[0, 2\pi]$ e o coeficiente angular da curva $y = \operatorname{sen} mx$ na origem? Justifique sua resposta.

Obtendo equações cartesianas a partir de equações paramétricas

Os exercícios 81–92 fornecem equações paramétricas e intervalos de parâmetros para o deslocamento de uma partícula no plano xy. Identifique a trajetória da partícula encontrando uma equação cartesiana para ela. Faça o gráfico correspondente. (Lembre-se de que os gráficos vão variar conforme a equação usada.) Indique a porção do gráfico percorrida pela partícula e a direção do deslocamento.

81. $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{sen} 2t$, $0 \le t \le \pi$

82. $x = \cos(\pi - t)$, $y = \operatorname{sen}(\pi - t)$, $0 \le t \le \pi$

83. $x = 4\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$

84. $x = 4\operatorname{sen} t$, $y = 5\cos t$, $0 \le t \le 2\pi$

85. $x = 3t$, $y = 9t^2$, $-\infty < t < \infty$

86. $x = -\sqrt{t}$, $y = t$, $t \ge 0$

87. $x = 2t - 5$, $y = 4t - 7$, $-\infty < t < \infty$

88. $x = 3 - 3t$, $y = 2t$, $0 \le t \le 1$

89. $x = t$, $y = \sqrt{1 - t^2}$, $-1 \le t \le 0$

90. $x = \sqrt{t+1}$, $y = \sqrt{t}$, $t \ge 0$

91. $x = \sec^2 t - 1$, $y = \mathrm{tg}\, t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$

92. $x = -\sec t$, $y = \mathrm{tg}\, t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$

Determinando equações paramétricas

93. Determine equações paramétricas e um intervalo de parâmetro para o deslocamento de uma partícula que começa em $(a, 0)$ e percorre a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$

(a) uma vez no sentido horário.

(b) uma vez no sentido anti-horário.

(c) duas vezes no sentido horário.

(d) duas vezes no sentido anti-horário.

(Há muitas maneiras de fazer isso, portanto as respostas dadas podem não coincidir com as que estão no final do livro.)

94. Determine equações paramétricas e um intervalo de parâmetro para o deslocamento de uma partícula que começa em $(a, 0)$ e percorre a elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$

(a) uma vez no sentido horário.

(b) uma vez no sentido anti-horário.

(c) duas vezes no sentido horário.

(d) duas vezes no sentido anti-horário.

(Assim como ocorreu no Exercício 93, há muitas respostas corretas.)

Nos exercícios 95–100, obtenha uma parametrização para a curva

95. segmento de reta com as extremidades $(-1, -3)$ e $(4, 1)$

96. segmento de reta com as extremidades $(-1, 3)$ e $(3, -2)$

97. a metade inferior da parábola $x - 1 = y^2$

98. a metade esquerda da parábola $y = x^2 + 2x$

99. o raio (semi-reta) com ponto inicial $(2, 3)$ que passa pelo ponto $(-1, -1)$

100. o raio (semi-reta) com ponto inicial $(-1, 2)$ que passa pelo ponto $(0, 0)$

Tangentes a curvas parametrizadas

Nos exercícios 101–108, encontre uma equação para a tangente da reta à curva no ponto definido pelos valores de t. Determine também o valor de d^2y/dx^2 nesse ponto.

101. $x = 2\cos t, \quad y = 2\,\text{sen}\, t, \quad t = \pi/4$

102. $x = \cos t, \quad y = \sqrt{3}\cos t, \quad t = 2\pi/3$

103. $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t = 1/4$

104. $x = -\sqrt{t+1}, \quad y = \sqrt{3t}, \quad t = 3$

105. $x = 2t^2 + 3, \quad y = t^4, \quad t = -1$

106. $x = t - \text{sen}\, t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t = \pi/3$

107. $x = \cos t, \quad y = 1 + \text{sen}\, t, \quad t = \pi/2$

108. $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \text{tg}\, t, \quad t = -\pi/4$

Teoria, exemplos e aplicações

109. Maquinário funcionando muito rápido Suponha que um pistão se desloque para cima e para baixo e que sua posição no instante t segundos seja dada por

$$s = A\cos(2\pi bt)$$

com A e b positivos. O valor de A é a amplitude do movimento e b é a freqüência (número de vezes que o pistão se desloca para cima e para baixo a cada segundo). Que efeito a duplicação da freqüência tem sobre a velocidade, a aceleração e a sobreaceleração do pistão? (Ao descobrir, você entenderá por que uma máquina quebra quando funciona rápido demais.)

110. Temperatura em Fairbanks, Alasca O gráfico da Figura 3.33 mostra a temperatura média (em Fahrenheit) em Fairbanks, Alasca, durante um ano de 365 dias. A equação que fornece a temperatura aproximada no dia x é

$$y = 37\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right] + 25$$

(a) Em que dia a temperatura aumenta mais rápido?

(b) Quantos graus por dia a temperatura sobe aproximadamente, quando está aumentando mais rápido?

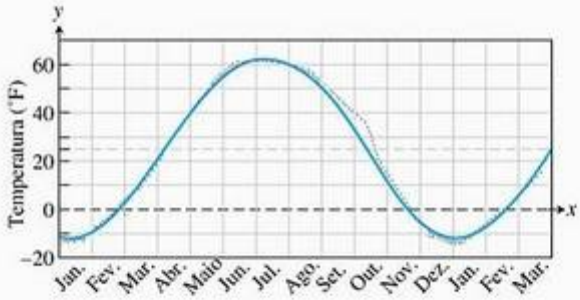


FIGURA 3.33 Temperatura média normal do ar em Fairbanks, Alasca (registro pontilhado) e a função seno aproximadora (Exercício 110).

111. Movimento de uma partícula A posição de uma partícula que se desloca ao longo de uma reta coordenada é dada por $s = \sqrt{1 + 4t}$, com s em metros e t em segundos. Determine a velocidade e a aceleração da partícula para $t = 6$ s.

112. Aceleração constante Suponha que a velocidade de um corpo em queda seja $v = k\sqrt{s}$ m/s (k é uma constante) no

instante em que o corpo caiu s metros do ponto de partida. Mostre que a aceleração do corpo é constante.

113. Um meteorito em queda Quando um meteorito pesado está a s km do centro da Terra, sua velocidade de entrada na atmosfera terrestre é inversamente proporcional a $\sqrt{s}$. Mostre que a aceleração do meteorito é inversamente proporcional a s^2.

114. Aceleração de uma partícula Uma partícula se desloca ao longo do eixo x com velocidade $dx/dt = f(x)$. Mostre que sua aceleração é $f(x)f'(x)$.

115. Temperatura e o período de um pêndulo Para oscilações de pequena amplitude (balanços curtos), é seguro modelar a relação entre o período T e o comprimento L de um pêndulo simples com a equação

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

onde g é a aceleração constante da gravidade no local em que está o pêndulo. Se medirmos g em cm/s^2, devemos usar L em cm e T em s. Se o pêndulo for de metal, seu comprimento variará com a temperatura, aumentando ou diminuindo a uma taxa aproximadamente proporcional a L. Usando os símbolos u para temperatura e k para a constante de proporcionalidade, temos

$$\frac{dL}{du} = kL$$

Considerando que este seja o caso, mostre que a taxa de variação do período, em relação à temperatura, é $kT/2$.

116. Regra da cadeia Suponha que $f(x) = x^2$ e $g(x) = |x|$. Então, as funções compostas

$$(f \circ g)(x) = |x|^2 = x^2 \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) = |x^2| = x^2$$

são ambas deriváveis em $x = 0$, muito embora g em si não seja derivável em $x = 0$. Isso contradiz a regra da cadeia? Explique.

117. Tangentes Suponha que $u = g(x)$ seja derivável em $x = 1$ e que $y = f(u)$, em $u = g(1)$. Se o gráfico de $y = f(g(x))$ tiver uma tangente horizontal em $x = 1$, podemos concluir algo em relação à tangente ao gráfico de g em $x = 1$ ou em relação à tangente ao gráfico de f em $u = g(1)$? Justifique sua resposta.

118. Suponha que $u = g(x)$ seja derivável em $x = -5$, que $y = f(u)$, em $u = g(-5)$ e que $(f \circ g)'(-5)$ seja negativa. O que se pode concluir a respeito dos valores de $g'(-5)$ e de $f'(g(-5))$?

119. A derivada de sen 2x Represente graficamente a função $y = 2\cos 2x$ para $-2 \le x \le 3{,}5$. Depois, na mesma tela, faça o gráfico de

T

$$y = \frac{\operatorname{sen} 2(x+h) - \operatorname{sen} 2x}{h}$$

para $h = 1{,}0$; $0{,}5$; e $0{,}2$. Experimente com outros valores de h, incluindo valores negativos. O que acontece quando $h \to 0$? Explique esse comportamento.

120. A derivada de cos (x^2) Represente graficamente a função $y = -2x \operatorname{sen}(x^2)$ para $-2 \le x \le 3$. Depois, na mesma tela, faça o gráfico de

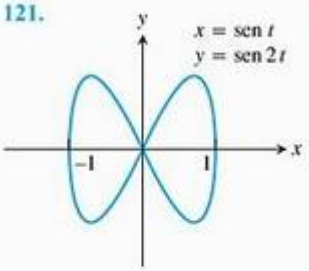
T

$$y = \frac{\cos((x+h)^2) - \cos(x^2)}{h}$$

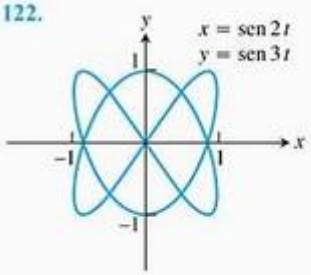
para $h = 1$; $0{,}7$; e $0{,}3$. Experimente com outros valores de h. O que acontece quando $h \to 0$? Explique esse comportamento.

T As curvas dos exercícios 121 e 122 são chamadas *curvas de Bowditch* ou *figuras de Lissajous*. Em cada caso, encontre o ponto, no interior do primeiro quadrante, onde a tangente da curva é horizontal e determine as equações das duas tangentes na origem.

121.



122.



Nos exercícios 123 e 124, use a regra da cadeia para demonstrar que a regra da potenciação $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$ aplica-se a funções x^n.

123. $x^{1/4} = \sqrt{\sqrt{x}}$

124. $x^{3/4} = \sqrt{x\sqrt{x}}$

USANDO O COMPUTADOR

Polinômios trigonométricos

125. Como se vê na Figura 3.34, o "polinômio" trigonométrico

$$s = f(t) = 0{,}78540 - 0{,}63662\cos 2t - 0{,}07074\cos 6t - 0{,}02546\cos 10t - 0{,}01299\cos 14t$$

permite uma boa estimativa da função dente-de-serra $s = g(t)$, no intervalo $[-\pi, \pi]$. Até que ponto a aproximação da derivada de f em relação à derivada de g é boa nos pontos onde dg/dt é definida? Para descobrir, siga os passos dados.

(a) Faça o gráfico de dg/dt (onde ela é definida) em $[-\pi, \pi]$.

(b) Determine df/dt.

(c) Faça o gráfico de df/dt. Onde a aproximação de dg/dt por df/dt parece ser melhor? E pior? As aproximações

de polinômios trigonométricos são importantes nas teorias de calor e oscilação, mas, como veremos no próximo exercício, não devemos esperar muito delas.

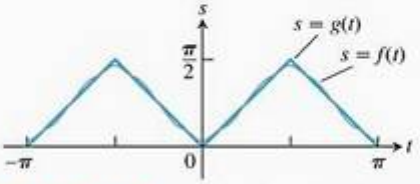


FIGURA 3.34 Estimativa da função dente-de-serra por um "polinômio" trigonométrico (Exercício 125).

126. *(Continuação do Exercício 125.)* No Exercício 125, o polinômio trigonométrico $f(t)$ que se aproximou da função dente-de-serra $g(t)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$ apresentou uma derivada que se aproximou da derivada da função dente-de-serra. Entretanto, é possível que um polinômio trigonométrico se aproxime razoavelmente de uma função, embora sua derivada não se aproxime da derivada da função. Nesse caso, o "polinômio"

$$s = h(t) = 1{,}2732 \text{ sen } 2t + 0{,}4244 \text{ sen } 6t + 0{,}25465 \text{ sen } 10t + 0{,}18189 \text{ sen } 14t + 0{,}14147 \text{ sen } 18t$$

representado graficamente na Figura 3.35 aproxima-se da função escada $s = k(t)$ apresentada. Contudo, a derivada de h em nada se parece com a derivada de k.

(a) Faça o gráfico de dk/dt (onde ela é definida) em $[-\pi, \pi]$.

(b) Determine dh/dt.

(c) Faça o gráfico de dh/dt para ver como ele não se ajusta bem ao de dk/dt. Comente a respeito.

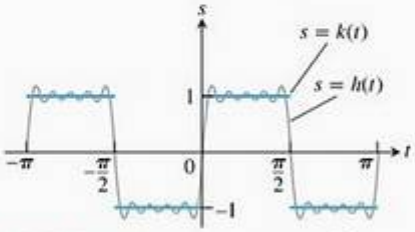


FIGURA 3.35 Aproximação de uma função escada por um "polinômio" trigonométrico (Exercício 126).

Curvas parametrizadas

Use um SAC para executar os passos a seguir nas curvas parametrizadas dos exercícios 127–130.

(a) Faça a curva no dado intervalo de valores de t.

(b) Determine dy/dx e d^2y/dx^2 no ponto t_0.

(c) Encontre uma equação para a reta tangente à curva no ponto definido pelo valor dado de t_0. Faça a curva com a tangente no mesmo gráfico.

127. $x = \frac{1}{3}t^3, \quad y = \frac{1}{2}t^2, \quad 0 \le t \le 1, \quad t_0 = 1/2$

128. $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, \quad y = t^2 + t - 3, \quad 0 \le t \le 6, \quad t_0 = 3/2$

129. $x = t - \cos t, \quad y = 1 + \text{sen } t, \quad -\pi \le t \le \pi, \quad t_0 = \pi/4$

130. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \text{ sen } t, \quad 0 \le t \le \pi, \quad t_0 = \pi/2$

3.6 Derivação implícita

A maioria das funções com as quais lidamos até agora foi descrita por uma equação com a forma $y = f(x)$, que expressa y explicitamente em termos da variável x. Aprendemos regras para derivar funções definidas dessa maneira. Na Seção 3.5, também aprendemos como determinar a derivada dy/dx quando uma curva é definida parametricamente por equações $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Uma terceira situação ocorre quando encontramos equações do seguinte tipo

$$x^2 + y^2 - 25 = 0, \qquad y^2 - x = 0, \qquad \text{ou} \qquad x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

(Veja as figuras 3.36, 3.37 e 3.38.) Essas equações definem uma relação *implícita* entre as variáveis x e y. Em alguns casos conseguimos determinar y em uma equação desse tipo expressando-a como uma (ou até mais de uma) função explícita de x. Quando não podemos colocar uma equação $F(x, y) = 0$ na forma $y = f(x)$ para derivá-la da maneira usual, podemos ainda determinar dy/dx por intermédio da *derivação implícita*.

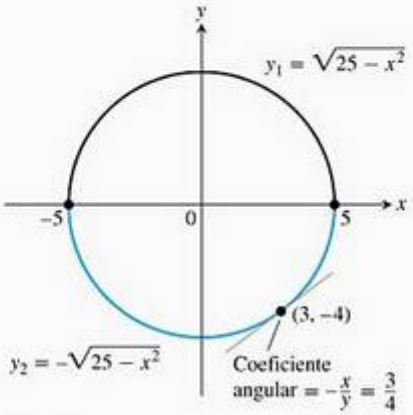


FIGURA 3.36 O círculo combina os gráficos de duas funções. O gráfico de y_2 é o semicírculo inferior e passa por (3, – 4).

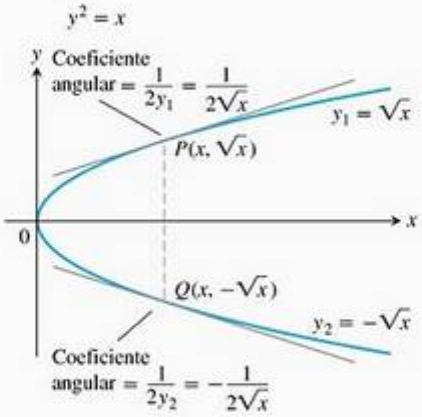


FIGURA 3.37 A equação $y^2 - x = 0$ ou $y^2 = x$, como geralmente é escrita, define duas funções deriváveis de x no intervalo $x \geq 0$. O Exemplo 1 mostra como encontrar as derivadas dessas funções sem resolver y na equação $y^2 = x$.

Esse processo consiste em derivar os dois lados da equação em relação a x e, depois, determinar y' na equação resultante. Nesta seção, vamos descrever essa técnica e usá-la para ampliar a regra da potenciação na derivação, a fim de incluir expoentes racionais. Nos exemplos e exercícios desta seção sempre se pressupõe que a equação dada determina y implicitamente como uma função derivável de x.

Funções definidas implicitamente

Começaremos com um exemplo.

EXEMPLO 1 Derivando implicitamente

Determine dy/dx se $y^2 = x$.

SOLUÇÃO A equação $y^2 = x$ define duas funções deriváveis de x que, na verdade, podemos encontrar em $y_1 = \sqrt{x}$ e $y_2 = -\sqrt{x}$ (Figura 3.37). Sabemos como calcular a derivada de cada uma delas para $x > 0$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

No entanto, imagine se soubéssemos apenas que a equação $y^2 = x$ definiu y como uma ou mais funções deriváveis de x para $x > 0$, sem saber exatamente quais são essas funções. Ainda seria possível determinar dy/dx?

A resposta é sim. Para determinar dy/dx, simplesmente derivamos os dois lados da equação $y^2 = x$ em relação a x, considerando $y = f(x)$ como uma função derivável de x:

$$y^2 = x$$

Pela regra da cadeia, temos $\frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]^2 = 2f(x)f'(x) = 2y\frac{dy}{dx}$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

Essa fórmula sozinha fornece as derivadas que calculamos para *ambas* as soluções explícitas $y_1 = \sqrt{x}$ e $y_2 = -\sqrt{x}$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2\left(-\sqrt{x}\right)} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

EXEMPLO 2 Coeficiente angular de um círculo em determinado ponto

Determine o coeficiente angular do círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto (3, –4).

SOLUÇÃO O círculo não é o gráfico de uma única função de x, e sim os gráficos combinados de duas funções deriváveis, $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ e $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ (Figura 3.36). O ponto (3, – 4) está no gráfico de y_2, portanto podemos determinar o coeficiente angular calculando explicitamente:

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3} = -\left.\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}\right|_{x=3} = -\frac{-6}{2\sqrt{25 - 9}} = \frac{3}{4}$$

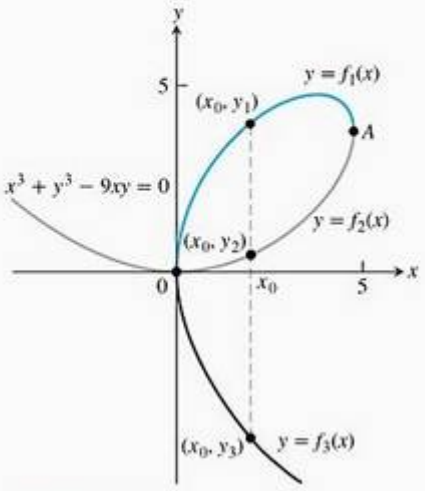


FIGURA 3.38 A curva $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ não é o gráfico de nenhuma função de x. Entretanto, ela pode ser dividida em arcos separados, que são, *sim*, gráficos de funções de x. Essa curva específica, chamada fólio, remonta a Descartes, em 1638.

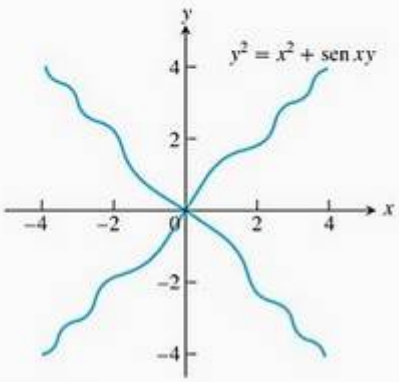


FIGURA 3.39 Gráfico de $y^2 = x^2 + \operatorname{sen} xy$ (Exemplo 3). O exemplo mostra como encontrar os coeficientes angulares nessa curva definida implicitamente.

No entanto, também podemos resolver o problema com mais facilidade derivando a equação dada do círculo implicitamente em relação a x:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dx}\left(25\right)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

O coeficiente angular em (3, −4) é $-\left.\frac{x}{y}\right|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$

Observe que, diferentemente da fórmula do coeficiente angular para dy_2/dx, que se aplica somente a pontos abaixo do eixo x, a fórmula $dy/dx = -x/y$ aplica-se a qualquer ponto do círculo que apresente coeficiente angular. Observe também que a derivada envolve *as duas* variáveis x e y, não apenas a variável independente x.

Para calcular as derivadas de outras funções definidas implicitamente, procedemos como nos exemplos 1 e 2: tratamos y como uma função derivável implícita de x e aplicamos as regras usuais para derivar os dois lados da equação.

EXEMPLO 3 Derivando implicitamente

Determine dy/dx se $y^2 = x^2 + \operatorname{sen} xy$ (Figura 3.39).

SOLUÇÃO

$$y^2 = x^2 + \operatorname{sen} xy$$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} xy)$$ Derive os dois lados em relação a x...

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\frac{d}{dx}(xy)$$ ...considerando y como uma função de x e usando a regra da cadeia.

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$$ Considere xy como um produto.

$$2y\frac{dy}{dx} - (\cos xy)\left(x\frac{dy}{dx}\right) = 2x + (\cos xy)y$$ Reúna os termos com dy/dx...

$$(2y - x\cos xy)\frac{dy}{dx} = 2x + y\cos xy$$ ... e fatore isolando dy/dx.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy}$$ Faça a divisão e encontre dy/dx.

Observe que a fórmula para dy/dx aplica-se a qualquer lugar onde a curva definida implicitamente tenha um coeficiente angular. Note ainda que a derivada envolve *ambas* as variáveis x e y, e não somente a variável independente x.

Derivação implícita

1. Derive os dois lados da equação em relação a x, considerando y como uma função derivável de x.
2. Reúna os termos que contêm dy/dx em um lado da equação.
3. Encontre dy/dx.

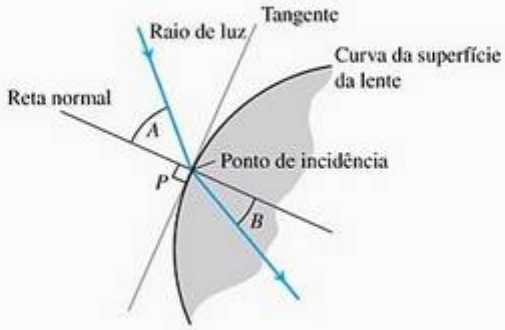


FIGURA 3.40 Perfil de uma lente mostrando um raio de luz sendo refratado ao atravessar sua superfície.

Lentes, tangentes e normais

Na lei que descreve como a luz muda de direção ao passar por uma lente, os ângulos importantes são aqueles que a luz forma com a reta perpendicular à superfície da lente, no ponto, de incidência (ângulos A e B da Figura 3.40). Nesse ponto, essa reta é chamada *normal* à superfície. Em uma vista de perfil de uma lente, como a ilustrada na Figura 3.40, a **normal** é a reta perpendicular àquela que tangencia a curva no ponto de incidência.

EXEMPLO 4 Tangente e normal ao fólio de Descartes

Mostre que o ponto (2, 4) está na curva $x^3 + y^3 - 9xy = 0$. Em seguida, encontre a tangente e a normal à curva nesse ponto (Figura 3.41).

SOLUÇÃO O ponto (2, 4) está na curva porque suas coordenadas satisfazem a equação dada para a curva: $2^3 + 4^3 - 9(2)(4) = 8 + 64 - 72 = 0$.

Para encontrar o coeficiente angular da curva em (2, 4), primeiro, usamos a derivação implícita para chegar à fórmula para dy/dx:

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(9xy) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 9\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) = 0 \qquad \text{Derive os dois lados em relação a } x.$$

$$(3y^2 - 9x)\frac{dy}{dx} + 3x^2 - 9y = 0 \qquad \text{Considere } xy \text{ como um produto e } y \text{ como uma função de } x.$$

$$3(y^2 - 3x)\frac{dy}{dx} = 9y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x} \qquad \text{Determine } dy/dx.$$

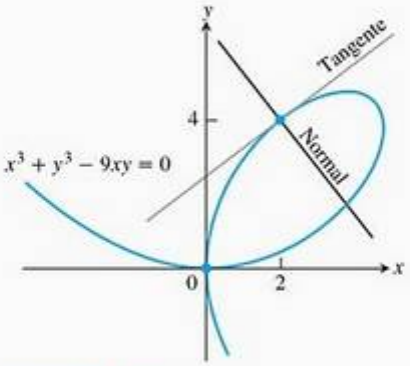


FIGURA 3.41 O Exemplo 4 mostra como encontrar equações para a tangente e a normal ao fólio de Descartes em (2, 4).

Então, calculamos a derivada em $(x, y) = (2, 4)$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)} = \left.\frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}\right|_{(2,4)} = \frac{3(4) - 2^2}{4^2 - 3(2)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

A tangente em (2, 4) é a reta que passa por (2, 4), tendo coeficiente angular 4/5:

$$y = 4 + \frac{4}{5}(x - 2)$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$$

A normal à curva em (2, 4) é a reta perpendicular à tangente nesse ponto, a reta que passa por (2, 4) tendo coeficiente angular −5/4:

$$y = 4 - \frac{5}{4}(x - 2)$$

$$y = -\frac{5}{4}x + \frac{13}{2}$$

A fórmula quadrática nos permite calcular y em função de x em uma equação de segundo grau do tipo $y^2 - 2xy + 3x^2 = 0$. Existe uma fórmula para as três raízes de uma equação cúbica parecida com a fórmula quadrática, mas muito

mais complexa. Se essa última fórmula for usada para calcular y em função de x na equação $x^3 + y^3 = 9xy$, então as três funções determinadas pela equação serão:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}} + \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}}$$

e

$$y = \frac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{\frac{-x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}} - \sqrt[3]{\frac{-x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}}\right)\right]$$

Usar a derivação implícita do Exemplo 4 é muito mais simples do que calcular dy/dx diretamente a partir de qualquer uma das duas fórmulas anteriores. Para determinar coeficientes angulares em curvas definidas por equações de grau mais elevado, em geral, é necessário recorrer à derivação implícita.

Derivadas de ordem superior

A derivação implícita também pode ser usada para encontrar derivadas de ordem superior. Eis um exemplo.

EXEMPLO 5 Encontrando uma segunda derivada implicitamente

Determine d^2y/dx^2 se $2x^3 - 3y^2 = 8$

SOLUÇÃO Para começar, derivamos os dois lados da equação em relação a x para encontrar $y' = dy/dx$.

$$\frac{d}{dx}\left(2x^3 - 3y^2\right) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$6x^2 - 6yy' = 0 \qquad \text{Considere } y \text{ como uma função de } x.$$

$$x^2 - yy' = 0$$

$$y' = \frac{x^2}{y} \quad \text{quando } y \neq 0 \qquad \text{Calcule } y'.$$

Agora aplicamos a regra do quociente para determinar y''.

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \cdot y'$$

Por fim, substituímos $y' = x^2/y$ para expressar y'' em termos de x e y.

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}, \qquad \text{quando } y \neq 0$$

Potências racionais de funções deriváveis

Sabemos que a regra

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

é válida quando n é um inteiro. Com a derivação implícita, podemos mostrar que ela é válida quando n é qualquer número racional.

Teorema 4 **Regra da potenciação para potências racionais**
Se p/q é um número racional, então $x^{p/q}$ é derivável em qualquer ponto interior do domínio de $x^{(p/q)-1}$ e

$$\frac{d}{dx}x^{p/q} = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}$$

EXEMPLO 6 Usando a regra da potenciação racional

(a) $\frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ para $x > 0$

(b) $\frac{d}{dx}\left(x^{2/3}\right) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ para $x \neq 0$

(c) $\frac{d}{dx}\left(x^{-4/3}\right) = -\frac{4}{3}x^{-7/3}$ para $x \neq 0$

PROVA DO TEOREMA 4 Considere p e q números inteiros com $q > 0$ e suponha que $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$. Então

$$y^q = x^p$$

Uma vez que p e q são números inteiros (para os quais já temos a regra da potenciação), e supondo que y seja uma função derivável de x, podemos derivar os dois lados da equação em relação a x e obter

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}$$

Se $y \neq 0$, podemos dividir os dois lados da equação por qy^{q-1} para determinar dy/dx, obtendo

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} \\
&= \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} && y = x^{p/q} \\
&= \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} && \frac{p}{q}(q-1) = p - \frac{p}{q} \\
&= \frac{p}{q}\cdot x^{(p-1)-(p-p/q)} && \text{Uma lei de expoentes.} \\
&= \frac{p}{q}\cdot x^{(p/q)-1}
\end{aligned}$$

que demonstra a regra.

Na próxima seção, ao provarmos a regra de potenciação para qualquer expoente real diferente de zero, derrubaremos o pressuposto de diferenciabilidade utilizado na prova do Teorema 4.

Combinando o resultado do Teorema 4 com a regra da cadeia, teremos um prolongamento da regra da cadeia para potências racionais de u: se p/q é um número racional e u é uma função derivável de x, então $u^{p/q}$ é uma função derivável de x e

$$\frac{d}{dx}u^{p/q} = \frac{p}{q}u^{(p/q)-1}\frac{du}{dx}$$

desde que $u \neq 0$ se $(p/q) < 1$. Como veremos no próximo exemplo, essa restrição é necessária porque 0 pode estar no domínio de $u^{p/q}$, mas não no domínio de $u^{(p/q)-1}$.

EXEMPLO 7 Usando as regras da potenciação racional e da cadeia

(a) $$\frac{d}{dx}\overbrace{\left(1-x^2\right)^{1/4}}^{\text{função definida em } [-1,\,1]} = \frac{1}{4}\left(1-x^2\right)^{-3/4}(-2x) \quad \text{Regra da cadeia para potências com } u = 1 - x^2$$

$$= \underbrace{\frac{-x}{2\left(1-x^2\right)^{3/4}}}_{\text{derivada definida somente em } (-1,\,1)}$$

(b) $$\frac{d}{dx}(\cos x)^{-1/5} = -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}(-\operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{1}{5}(\operatorname{sen} x)(\cos x)^{-6/5}$$

Exercícios 3.6

Derivadas de potências racionais

Determine dy/dx nos exercícios 1–10.

1. $y = x^{9/4}$
2. $y = x^{-3/5}$
3. $y = \sqrt[3]{2x}$
4. $y = \sqrt[4]{5x}$
5. $y = 7\sqrt{x+6}$
6. $y = -2\sqrt{x-1}$
7. $y = (2x+5)^{-1/2}$
8. $y = (1-6x)^{2/3}$
9. $y = x(x^2+1)^{1/2}$
10. $y = x(x^2+1)^{-1/2}$

Determine a primeira derivada das funções dos exercícios 11–18.

11. $s = \sqrt[7]{t^2}$
12. $r = \sqrt[4]{\theta^{-3}}$
13. $y = \operatorname{sen}\left[(2t+5)^{-2/3}\right]$
14. $z = \cos\left[(1-6t)^{2/3}\right]$
15. $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$
16. $g(x) = 2(2x^{-1/2}+1)^{-1/3}$
17. $h(\theta) = \sqrt[3]{1+\cos(2\theta)}$
18. $k(\theta) = (\operatorname{sen}(\theta+5))^{5/4}$

Derivação implícita

Use a derivação implícita para determinar dy/dx nos exercícios 19–32.

19. $x^2y + xy^2 = 6$
20. $x^3 + y^3 = 18xy$
21. $2xy + y^2 = x + y$
22. $x^3 - xy + y^3 = 1$
23. $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$
24. $(3xy+7)^2 = 6y$
25. $y^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$
26. $x^2 = \dfrac{x-y}{x+y}$
27. $x = \operatorname{tg} y$
28. $xy = \operatorname{cotg}(xy)$
29. $e^{2x} = \operatorname{sen}(x+3y)$
30. $x + \operatorname{sen} y = xy$
31. $y \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{y}\right) = 1 - xy$
32. $e^{x^2y} = 2x + 2y$

Determine $dr/d\theta$ nos exercícios 33–36.

33. $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$
34. $r - 2\sqrt{\theta} = \dfrac{3}{2}\theta^{2/3} + \dfrac{4}{3}\theta^{3/4}$
35. $\operatorname{sen}(r\theta) = \dfrac{1}{2}$
36. $\cos r + \operatorname{cotg}\theta = e^{r\theta}$

Segundas derivadas

Nos exercícios 37–42, use a derivada implícita para determinar dy/dx e depois d^2y/dx^2.

37. $x^2 + y^2 = 1$
38. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$
39. $y^2 = e^{x^2} + 2x$
40. $y^2 - 2x = 1 - 2y$
41. $2\sqrt{y} = x - y$
42. $xy + y^2 = 1$
43. Se $x^3 + y^3 = 16$, encontre o valor de d^2y/dx^2 no ponto $(2, 2)$.
44. Se $xy + y^2 = 1$, encontre o valor de d^2y/dx^2 no ponto $(0, -1)$.

Coeficientes angulares, tangentes e normais

Nos exercícios 45 e 46, encontre o coeficiente angular da curva nos pontos dados.

45. $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$ em $(-2, 1)$ e $(-2, -1)$

46. $(x^2 + y^2)^2 = (x - y)^2$ em $(1, 0)$ e $(1, -1)$

Nos exercícios 47–56, verifique se o ponto dado faz parte da curva e encontre as retas **(a)** tangente e **(b)** normal à curva no ponto dado.

47. $x^2 + xy - y^2 = 1, \quad (2, 3)$

48. $x^2 + y^2 = 25, \quad (3, -4)$

49. $x^2y^2 = 9, \quad (-1, 3)$

50. $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0, \quad (-2, 1)$

51. $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0, \quad (-1, 0)$

52. $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 5, \quad (\sqrt{3}, 2)$

53. $2xy + \pi \operatorname{sen} y = 2\pi, \quad (1, \pi/2)$

54. $x \operatorname{sen} 2y = y \cos 2x, \quad (\pi/4, \pi/2)$

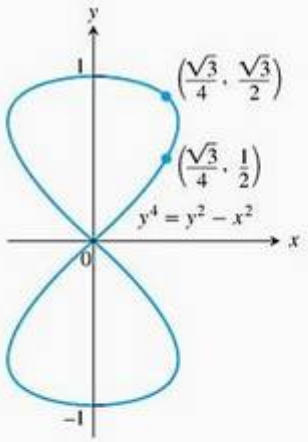
55. $y = 2 \operatorname{sen} (\pi x - y), \quad (1, 0)$

56. $x^2 \cos^2 y - \operatorname{sen} y = 0, \quad (0, \pi)$

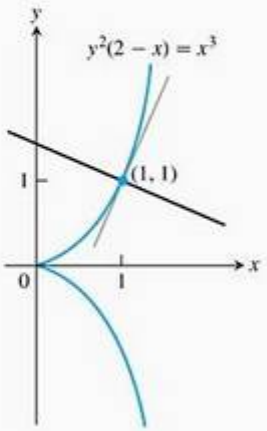
57. **Tangentes paralelas** Encontre os dois pontos onde a curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ cruza o eixo x e mostre que as tangentes à curva nesses pontos são paralelas. Qual é o coeficiente angular comum dessas retas?

58. **Paralelas tangentes a eixos cartesianos** Encontre pontos na curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ onde a tangente é paralela **(a)** ao eixo x e **(b)** ao eixo y. No último caso, dy/dx não é definida, mas dx/dy é. Qual é o valor de dx/dy nesses pontos?

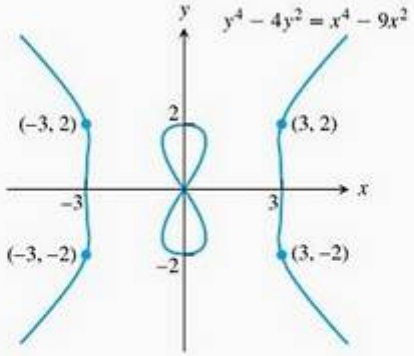
59. **A curva do oito** Encontre os coeficientes angulares da curva $y^4 = y^2 - x^2$ nos pontos a seguir apresentados.



60. **A cissóide de Diocles (cerca de 200 a.C.)** Encontre as equações para a tangente e a normal à cissóide de Diocles $y^2(2 - x) = x^3$ em $(1, 1)$.



61. **A curva do diabo (Gabriel Cramer, o Cramer da regra de Cramer, 1750)** Encontre os coeficientes angulares para a curva do diabo $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ nos quatro pontos indicados.



62. **O fólio de Descartes** (Veja a Figura 3.38)

(a) Encontre o coeficiente angular do fólio de Descartes, $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ nos pontos $(4, 2)$ e $(2, 4)$.

(b) Em qual ponto, além da origem, o fólio tem uma tangente horizontal?

(c) Encontre as coordenadas do ponto A na Figura 3.38, onde o fólio tem uma tangente vertical.

Parametrizações definidas implicitamente

Assumindo que as equações dos exercícios 63–66 definem x e y implicitamente como funções deriváveis $x = f(t)$ e $y = g(t)$, encontre o coeficiente angular das curvas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ nos valores dados de t.

63. $x^2 - 2tx + 2t^2 = 4, \quad 2y^3 - 3t^2 = 4, \quad t = 2$

64. $x = \sqrt{5 - \sqrt{t}}, \; y(t - 1) = \sqrt{t}, \quad t = 4$

65. $x + 2x^{3/2} = t^2 + t, \quad y\sqrt{t + 1} + 2t\sqrt{y} = 4, \quad t = 0$

66. $x \operatorname{sen} t + 2x = t, \quad t \operatorname{sen} t - 2t = y, \quad t = \pi$

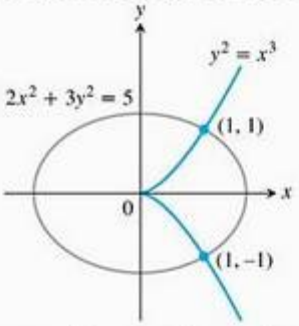
Teoria e exemplos

67. Qual das afirmações a seguir pode ser verdadeira se $f''(x) = x^{-1/3}$?

(a) $f(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} - 3$ **(b)** $f(x) = \frac{9}{10}x^{5/3} - 7$

(c) $f'''(x) = -\frac{1}{3}x^{-4/3}$ **(d)** $f'(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6$

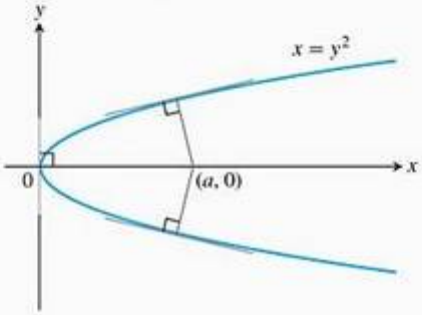
68. Existe algo especial em relação às tangentes das curvas $y^2 = x^3$ e $2x^2 + 3y^2 = 5$ nos pontos $(1, \pm 1)$? Justifique sua resposta.



69. Normal que cruza Em que outro ponto a reta normal à curva $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ em $(1, 1)$ cruza a curva de novo?

70. Normais paralelas a uma reta Encontre as normais à curva $xy + 2x - y = 0$ que sejam paralelas à reta $2x + y = 0$.

71. Normais a uma parábola Mostre que, se for possível desenhar três normais, desde o ponto $(a, 0)$ até a parábola $x = y^2$ (apresentada a seguir), a deve ser maior que $1/2$. Uma das normais é o eixo x. Para que valor de a as outras duas normais são perpendiculares?



72. Qual geometria é a base para as restrições nos domínios das derivadas nos exemplos 6(b) e 7(a)?

T Nos exercícios 73 e 74, determine dy/dx (considerando y como função derivável de x) e dx/dy (considerando x como uma função derivável de y). Como dy/dx e dx/dy parecem estar relacionadas? Explique a relação geometricamente em termos de gráficos.

73. $xy^3 + y = 6$ **74.** $x^3 + y^2 = \operatorname{sen}^2 y$

USANDO O COMPUTADOR

75. (a) Dado $x^4 + 4y^2 = 1$, determine dy/dx de duas maneiras: (1) resolvendo y e derivando as funções resultantes de modo usual e (2) por derivação implícita. Você obtém o mesmo resultado dos dois modos?

(b) Calcule y na equação $x^4 + 4y^2 = 1$ e represente graficamente, juntas, as funções resultantes para ter um gráfico completo da equação original. Em seguida, adicione à tela os gráficos das primeiras derivadas dessas funções. Seria possível prever o comportamento geral dos gráficos das derivadas analisando o gráfico da equação original? E, inversamente, seria possível prever o comportamento geral do gráfico da equação original analisando os gráficos das derivadas? Justifique suas respostas.

76. (a) Dado $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, determine dy/dx de duas maneiras: (1) calculando y e derivando as funções resultantes em relação a x e (2) por derivação implícita. Você obtém o mesmo resultado dos dois modos?

(b) Calcule y na equação $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ e represente graficamente as funções resultantes para ter um gráfico completo da equação original. Em seguida, adicione à tela os gráficos das primeiras derivadas dessas funções. Seria possível prever o comportamento geral dos gráficos das derivadas analisando o gráfico da equação original? E, inversamente, seria possível prever o comportamento geral do gráfico da equação original analisando os gráficos das derivadas? Justifique suas respostas.

Use um SAC para seguir os passos indicados nos exercícios 77–84.

(a) Esboce o gráfico da equação com o desenhador de gráficos implícito do SAC. Verifique se o ponto dado P satisfaz a equação.

(b) Usando a derivação implícita, obtenha uma fórmula para a derivada dy/dx e calcule-a no ponto dado P.

(c) Use o coeficiente angular encontrado no item **(b)** para determinar a equação da reta que tangencia a curva em P. Em seguida, construa a curva implícita e a reta tangente no mesmo gráfico.

77. $x^3 - xy + y^3 = 7, \quad P(2, 1)$

78. $x^5 + y^3x + yx^2 + y^4 = 4, \quad P(1, 1)$

79. $y^2 + y = \frac{2 + x}{1 - x}, \quad P(0, 1)$

80. $y^3 + \cos xy = x^2, \quad P(1, 0)$

81. $x + \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = 2, \quad P\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$

82. $xy^3 + \operatorname{tg}(x + y) = 1, \quad P\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

83. $2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2, \quad P(1, 1)$

84. $x\sqrt{1 + 2y} + y = x^2, \quad P(1, 0)$

3.7 Derivadas de funções inversas e logaritmos

Na Seção 1.6, vimos como a inversa de uma função desfaz, ou inverte, o efeito dessa função. Além disso, definimos a função logaritmo natural $f^{-1}(x) = \ln x$ como a inversa da função exponencial natural $f(x) = e^x$. Esse é um dos mais importantes pares função–inversa na matemática e na ciência. Na Seção 3.2, aprendemos como derivar a função exponencial. Aqui, aprenderemos uma regra para derivar a inversa de uma função derivável e aplicaremos tal regra para encontrar a derivada da função logaritmo natural.

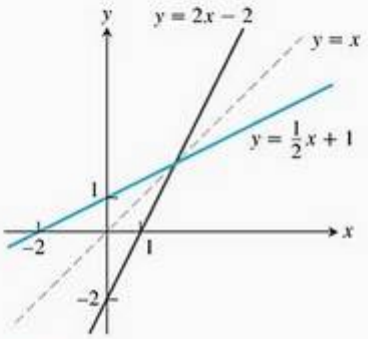


FIGURA 3.42 Os gráficos de $f(x) = (1/2)x + 1$ e $f^{-1}(x) = 2x - 2$ juntos mostram a simetria dos gráficos em relação à reta $y = x$. Seus coeficientes angulares são recíprocos entre si.

Derivadas de inversas de funções deriváveis

No Exemplo 2 da Seção 1.6, calculamos a inversa da função $f(x) = (1/2)x + 1$ como $f^{-1}(x) = 2x - 2$. A Figura 3.42 mostra novamente os gráficos das duas funções. Se calcularmos suas derivadas, veremos que

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{d}{dx}(2x - 2) = 2$$

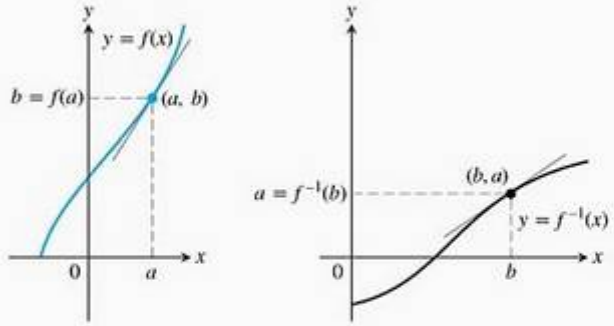
As derivadas são recíprocas entre si. O gráfico de f é a reta $y = (1/2)x + 1$, e o gráfico de f^{-1} é a reta $y = 2x - 2$ (Figura 3.42). Seus coeficientes angulares são recíprocos entre si.

Não se trata de um caso especial. Refletindo qualquer reta não horizontal ou não vertical em torno da reta $y = x$, sempre teremos o inverso do coeficiente angular da reta. Se o coeficiente angular da reta original é $m \neq 0$, a reta refletida tem coeficiente angular $1/m$.

A relação de reciprocidade entre os coeficientes angulares de f e f^{-1} aplica-se a outras funções, mas precisamos tomar o cuidado de comparar coeficientes angulares em pontos correspondentes. Se o coeficiente angular $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ é $f'(a)$ e $f'(a) \neq 0$, então o coeficiente angular de $y = f^{-1}(x)$ no ponto $(f(a), a)$ é o recíproco $1/f'(a)$ (Figura 3.43). Se estabelecermos $b = f(a)$, então

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Se $y = f(x)$ apresenta uma tangente horizontal em $(a, f(a))$, então a função inversa f^{-1} apresentará uma tangente vertical em $(f(a), a)$, e esse coeficiente angular infinito implica que f^{-1} não é derivável em $f(a)$. O Teorema 5 apresenta as condições sob as quais f^{-1} é derivável em seu domínio, que é igual à imagem de f.



Os coeficientes angulares são recíprocos: $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ ou $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

FIGURA 3.43 Os gráficos das funções inversas têm coeficientes angulares recíprocos em pontos correspondentes.

Teorema 5 Regra da derivada para funções inversas
Se f apresenta um intervalo I como domínio e $f'(x)$ existe e nunca é nulo em I, então f^{-1} é derivável em qualquer ponto de seu domínio. O valor de $(f^{-1})'$ no ponto b do domínio de f^{-1} é a recíproca do valor de f' no ponto $a = f^{-1}(b)$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

ou

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(b)}} \qquad (1)$$

A prova do Teorema 5 será omitida. Podemos ver evidências do resultado da seguinte maneira. Quando $y = f(x)$ é derivável em $x = a$ e alteramos x em uma pequena quantidade Δx, a variação correspondente em y é aproximadamente

$$\Delta y \approx f'(a)\,\Delta x \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(a)$$

Isso significa que y varia cerca de $f'(a)$ vezes tão rápido quanto x quando $x = a$, e que x varia cerca de $1/f'(a)$ vezes tão rápido quanto y quando $y = b$. É razoável que a derivada de f^{-1} em b seja a recíproca da derivada de f em a.

EXEMPLO 1 Aplicando o Teorema 5

A função $f(x) = x^2$, $x \geq 0$ e sua inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ apresentam as derivadas $f'(x) = 2x$ e $(f^{-1})'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

Segundo o Teorema 5, a derivada de $f^{-1}(x)$ é

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{2(f^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{2(\sqrt{x})}\end{aligned}$$

O Teorema 5 fornece uma derivada que está de acordo com o cálculo que fizemos usando a regra de potenciação para a derivada da função raiz quadrada.

Vamos examinar o Teorema 5 em um ponto específico. Pegamos $x = 2$ (o número a) e $f(2) = 4$ (o valor b). O Teorema 5 diz que a derivada de f em 2, $f'(2) = 4$, e a derivada de f^{-1} em $f(2)$, $(f^{-1})'(4)$, são recíprocas. Ele estabelece que

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(4))} = \frac{1}{f'(2)} = \left.\frac{1}{2x}\right|_{x=2} = \frac{1}{4}$$

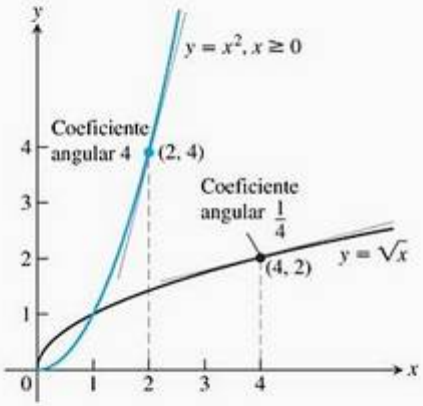


FIGURA 3.44 A derivada de $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ no ponto (4, 2) é a recíproca da derivada de $f(x) = x^2$ em (2, 4) (Exemplo 1).

Veja a Figura 3.44.

A Equação (1) às vezes nos permite encontrar valores específicos de df^{-1}/dx sem saber a fórmula para f^{-1}.

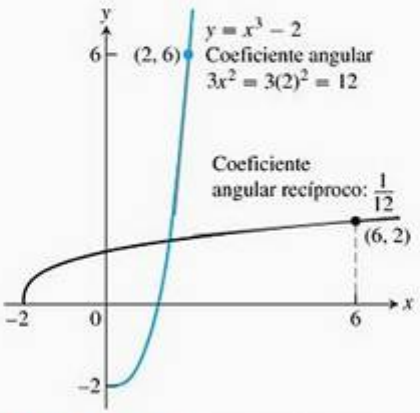


FIGURA 3.45 A derivada de $f(x) = x^3 - 2$ em $x = 2$ nos fornece a derivada de f^{-1} em $x = 6$ (Exemplo 2).

EXEMPLO 2 Determinando um valor para a derivada da inversa

Seja $f(x) = x^3 - 2$. Determine o valor de df^{-1}/dx em $x = 6 = f(2)$ sem achar uma fórmula para $f^{-1}(x)$.

SOLUÇÃO

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2} = \left.3x^2\right|_{x=2} = 12$$

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=f(2)} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2}} = \frac{1}{12} \qquad \text{Equação (1)}$$

Veja a Figura 3.45.

Parametrizando funções inversas

Podemos traçar ou representar parametricamente o gráfico de qualquer função $y = f(x)$ fazendo

$$x = t \qquad \text{e} \qquad y = f(t)$$

Trocando t por $f(t)$ e vice-versa, obtemos equações paramétricas para a inversa:

$$x = f(t) \qquad e \qquad y = t$$

(veja a Seção 3.5).

Por exemplo, para traçar a função injetora $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, em uma ferramenta gráfica, juntamente com sua inversa e a reta $y = x$, $x \geq 0$, use a opção para gráficos paramétricos com

Gráfico de f:	$x_1 = t$,	$y_1 = t^2$,	$t \geq 0$
Gráfico de f^{-1}:	$x_2 = t^2$,	$y_2 = t$	
Gráfico de $y = x$:	$x_3 = t$,	$y_3 = t$	

Derivada da função logaritmo natural

Uma vez que sabemos que a função exponencial $f(x) = e^x$ é derivável em qualquer parte, podemos aplicar o Teorema 5 para achar a derivada de sua inversa $f^{-1}(x) = \ln x$:

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Teorema 5} \\
&= \frac{1}{e^{f^{-1}(x)}} && f'(u) = e^u \\
&= \frac{1}{e^{\ln x}} \\
&= \frac{1}{x} && \text{Relação de função inversa.}
\end{aligned}$$

Derivação alternativa Em vez de aplicar o Teorema 5 diretamente, podemos determinar a derivada de $y = \ln x$ usando a derivação implícita, conforme segue:

$$\begin{aligned} y &= \ln x \\ e^y &= x && \text{Relação de função inversa} \\ \frac{d}{dx}(e^y) &= \frac{d}{dx}(x) && \text{Derive implicitamente} \\ e^y \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} && e^y = x \end{aligned}$$

Independentemente de qual derivação usarmos, a derivada de $y = \ln x$ em relação a x será

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Se u é uma função derivável de x com $u > 0$, aplicamos a regra da cadeia para obter

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \qquad u > 0 \tag{2}$$

EXEMPLO 3 Derivadas de logaritmos naturais

(a) $\frac{d}{dx}\ln 2x = \frac{1}{2x}\frac{d}{dx}(2x) = \frac{1}{2x}(2) = \frac{1}{x}$

(b) A equação (2) com $u = x^2 + 3$ fornece

$$\frac{d}{dx}\ln(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+3}$$

Observe a peculiaridade do Exemplo 3(a). A função $y = \ln 2x$ possui a mesma derivada que a função $y = \ln x$. Isso é verdadeiro para $y = \ln bx$ para qualquer constante b, desde que $bx > 0$:

$$\frac{d}{dx}\ln bx = \frac{1}{bx}\cdot\frac{d}{dx}(bx) = \frac{1}{bx}(b) = \frac{1}{x} \tag{3}$$

Se $x < 0$ e $b < 0$, então $bx > 0$ e a Equação (3) se aplica. Em particular, se $x < 0$ e $b = -1$, temos

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{x} \qquad \text{para } x < 0$$

Uma vez que $|x| = x$ quando $x > 0$ e $|x| = -x$ quando $x < 0$, temos este importante resultado

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \tag{4}$$

Isso se aplica a qualquer x diferente de zero e será útil para nossos estudos no Capítulo 9.

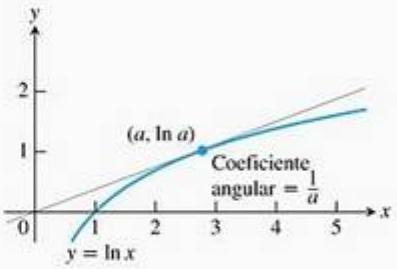


FIGURA 3.46 A reta tangente corta a curva em algum ponto $(a, \ln a)$, onde o coeficiente angular da curva é $1/a$ (Exemplo 4).

EXEMPLO 4 Encontrando uma reta tangente que passa pela origem

Uma reta cujo coeficiente angular m passa pela origem é tangente à curva de $y = \ln x$. Qual é o valor de m?

SOLUÇÃO Suponha que o ponto de tangência ocorra em um ponto desconhecido $x = a > 0$. Logo, sabemos que o ponto $(a, \ln a)$ faz parte da curva e que a reta tangente a esse ponto apresenta coeficiente angular $m = 1/a$ (Figura 3.46). Como a reta tangente passa pela origem, seu coeficiente angular é

$$m = \frac{\ln a - 0}{a - 0} = \frac{\ln a}{a}$$

Igualando as duas razões, temos

$$\begin{aligned} \frac{\ln a}{a} &= \frac{1}{a} \\ \ln a &= 1 \\ e^{\ln a} &= e^1 \\ a &= e \\ m &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

A derivada de a^u

Começamos com a equação $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} a^x &= \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \cdot \frac{d}{dx}(x \ln a) \qquad \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} \\ &= a^x \ln a \end{aligned}$$

Se $a > 0$, então

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

Essa equação mostra por que e^x é a função exponencial preferida em cálculo. Se $a = e$, então $\ln a = 1$, e a derivada de a^x pode ser assim simplificada

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \ln e = e^x$$

Com a regra da cadeia, obtemos uma forma mais geral da derivada.

Se $a > 0$ e u é uma função derivável de x, então a^u é uma função derivável de x e

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx} \tag{5}$$

Na Seção 3.2, examinaremos a derivada $f'(0)$ para as funções exponenciais $f(x) = a^x$ com base a de diferentes valores. O número $f'(0)$ é o limite, $\lim_{h \to 0} (a^h - 1)/h$, e nos fornece o coeficiente angular da curva de a^x quando ela cruza o eixo y no ponto $(0, 1)$. Agora, sabemos calcular o valor desse coeficiente angular como

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a \tag{6}$$

Em particular, quando $a = e$, obtemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \ln e = 1$$

No entanto, ainda não provamos totalmente que esses limites existem. Embora todos os argumentos apresentados durante o cálculo das derivadas das funções exponenciais e logarítmicas estejam corretos, eles pressupõem a existência de tais limites. No Capítulo 7, apresentaremos outro desdobramento da teoria das funções logarítmicas e exponenciais que prova totalmente a existência de ambos os limites e seus valores derivados apresentados anteriormente.

Derivada de $\log_a u$

Para encontrar a derivada de $\log_a u$ com uma base arbitrária ($a > 0$, $a \neq 1$), começaremos com a fórmula para mudança de base dos logaritmos (estudada na Seção 1.6) para expressar $\log_a u$ em termos de logaritmos naturais,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Calculando derivadas, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \log_a x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) \\
&= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d}{dx} \ln x \qquad \text{Pois } \ln a \text{ é uma constante.} \\
&= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x \ln a}
\end{aligned}$$

Então, se u é uma função derivável de x e $u > 0$, a regra da cadeia nos leva à seguinte fórmula.

Para $a > 0$ e $a \neq 1$,

$$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx} \tag{7}$$

EXEMPLO 5 O longo caminho com a regra da cadeia

Determine dy/dx se $y = \log_a a^{\operatorname{sen} x}$.

SOLUÇÃO Trabalhando cuidadosamente de fora para dentro, aplicamos a regra da cadeia para obter:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\log_a a^{\operatorname{sen} x}) &= \frac{1}{a^{\operatorname{sen} x} \ln a} \cdot \frac{d}{dx}(a^{\operatorname{sen} x}) \qquad \log_a u, \quad u = a^{\operatorname{sen} x} \\
&= \frac{1}{a^{\operatorname{sen} x} \ln a} \cdot a^{\operatorname{sen} x} \ln a \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) \qquad a^u, \quad u = \operatorname{sen} x \\
&= \frac{a^{\operatorname{sen} x} \ln a}{a^{\operatorname{sen} x} \ln a} \cdot \cos x \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

No Exemplo 5, poderíamos ter poupado muito trabalho se tivéssemos percebido no início que $\log_a a^{\operatorname{sen} x}$, sendo composta de funções inversas, é igual a sen x. Sempre que possível, é aconselhável simplificar funções *antes* de derivá-las.

Derivação logarítmica

As derivadas de funções positivas dadas por fórmulas que envolvem produtos, quocientes e potências muitas vezes podem ser encontradas mais rapidamente se calcularmos o logaritmo natural dos dois lados da equação antes de derivar. Isso nos permite usar as regras dos logaritmos para simplificar as fórmulas antes de derivar. Tal processo, denominado **derivação logarítmica**, é ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 6 Usando a derivação logarítmica

Determine dy/dx se

$$y = \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}, \qquad x > 1$$

SOLUÇÃO Calculamos os logaritmos naturais dos dois lados da equação e simplificamos o resultado usando as propriedades algébricas dos logaritmos:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1} \\
&= \ln((x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}) - \ln(x - 1) && \text{Regra 2} \\
&= \ln(x^2 + 1) + \ln(x + 3)^{1/2} - \ln(x - 1) && \text{Regra 1} \\
&= \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2}\ln(x + 3) - \ln(x - 1) && \text{Regra 3}
\end{aligned}$$

Então, calculamos as derivadas dos dois lados da equação em relação a x, usando a Equação (2) na esquerda:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x - 1}$$

Em seguida, calculamos dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 6} - \frac{1}{x - 1}\right)$$

Por fim, substituímos y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}\left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 6} - \frac{1}{x - 1}\right)$$

Um cálculo direto no Exemplo 6, usando as regras do quociente e do produto, seria muito mais longo.

A regra da potenciação (forma geral)

Agora, podemos definir x^n para qualquer $x > 0$ e qualquer número real n como $x^n = e^{n \ln x}$. Portanto, o n na equação $\ln x^n = n \ln x$ não precisa mais ser racional — pode ser qualquer número desde que $x > 0$:

$$\ln x^n = \ln (e^{n \ln x}) = n \ln x \qquad \ln e^u = u, \text{ qualquer } u$$

Juntas, a regra $a^x/a^y = a^{x-y}$ e a definição $x^n = e^{n \ln x}$ nos permitem estabelecer a regra da potenciação para derivação em sua forma final. Derivando x^n em relação a x, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} x^n &= \frac{d}{dx} e^{n \ln x} && \text{Definição de } x^n,\ x > 0 \\
&= e^{n \ln x} \cdot \frac{d}{dx}(n \ln x) && \text{Regra da Cadeia para } e^u. \\
&= x^n \cdot \frac{n}{x} && \text{A definição de novo.} \\
&= n x^{n-1}
\end{aligned}$$

Em resumo, desde que $x > 0$,

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

A regra da cadeia amplia essa equação para a forma geral da regra da potenciação.

Regra da potenciação (forma geral)
Se u é uma função positiva derivável de x e n é qualquer número real, então u^n é uma função derivável de x e

$$\frac{d}{dx} u^n = n u^{n-1} \frac{du}{dx} \qquad (8)$$

EXEMPLO 7 Usando a regra da potenciação com potências irracionais

(a) $\dfrac{d}{dx} x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, x^{\sqrt{2}-1} \qquad (x > 0)$

(b) $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2 + \operatorname{sen} 3x)^{\pi} &= \pi(2 + \operatorname{sen} 3x)^{\pi - 1}(\cos 3x) \cdot 3 \\ &= 3\pi(2 + \operatorname{sen} 3x)^{\pi-1}(\cos 3x)\end{aligned}$$

EXEMPLO 8

Derive $f(x) = x^x$, $x > 0$.

SOLUÇÃO Percebemos que $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$, portanto a derivação nos leva a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(e^{x \ln x}) \\
&= e^{x \ln x} \frac{d}{dx}(x \ln x) && \frac{d}{dx} e^u,\ u = x \ln x
\end{aligned}$$

$$= e^{x \ln x}\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^x (\ln x + 1) \qquad x > 0$$

O número e expresso como um limite

Na Seção 1.5, definimos o número e como o valor de base para o qual a função exponencial $y = a^x$ apresenta coeficiente angular 1 ao cruzar o eixo y em (0, 1). Logo, e é a constante que satisfaz a equação

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \ln e = 1$$

Também afirmamos que poderíamos calcular e como $\lim_{y \to \infty} (1 + 1/y)^y$ ou, substituindo $y = 1/x$, como $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$. Agora, provaremos esse resultado.

Teorema 6 O número e como um limite
O número e pode ser calculado como o limite

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

PROVA Se $f(x) = \ln x$, então $f'(x) = 1x$ e $f'(1) = 1$. Contudo, pela definição de derivada,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1 + x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x) \qquad \ln 1 = 0$$

$$= \lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x} = \ln\left[\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}\right] \qquad \ln \text{ é contínuo.}$$

Uma vez que $f'(1) = 1$, obtemos

$$\ln\left[\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}\right] = 1$$

Assim, fazendo a exponenciação de ambos os lados, temos

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

Aproximando o limite do Teorema 6 com valores muito pequenos de x, conseguimos aproximar e. Seu valor é: $e \approx 2{,}718281828459045$ para 15 casas decimais.

Exercícios 3.7

Derivadas de funções inversas

Nos exercícios 1–4:

(a) Determine $f^{-1}(x)$.

(b) Faça os gráficos de f e f^{-1} juntos.

(c) Calcule df/dx em $x = a$ e df^{-1}/dx em $x = f(a)$ para mostrar que nesses pontos $df^{-1}/dx = 1/(df/dx)$.

1. $f(x) = 2x + 3, \quad a = -1$
2. $f(x) = (1/5)x + 7, \quad a = -1$
3. $f(x) = 5 - 4x, \quad a = 1/2$
4. $f(x) = 2x^2, \quad x \geq 0, \quad a = 5$
5. (a) Mostre que $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$ são inversas entre si.
   (b) Faça os gráficos de f e g juntos em um intervalo de x suficientemente grande para mostrar os gráficos se cruzando em (1, 1) e (–1, –1). Certifique-se de que o gráfico apresenta a simetria necessária em relação à reta $y = x$.
   (c) Encontre os coeficientes angulares das tangentes aos gráficos de f e g em (1, 1) e (–1, –1) (quatro tangentes no total).
   (d) Quais retas tangenciam a curva na origem?
6. (a) Mostre que $h(x) = x^3/4$ e $k(x) = (4x)^{1/3}$ são inversas entre si.
   (b) Faça os gráficos de h e k juntos em um intervalo de x suficientemente grande para mostrar os gráficos se cruzando em (2, 2) e (–2, –2). Certifique-se de que o gráfico mostra a simetria necessária em relação à reta $y = x$.
   (c) Encontre os coeficientes angulares das tangentes aos gráficos de h e k em (2, 2) e (–2, –2).
   (d) Quais retas tangenciam a curva na origem?
7. Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1, x \geq 2$. Determine o valor de df^{-1}/dx no ponto $x = -1 = f(3)$.
8. Seja $f(x) = x^2 - 4x - 5, x > 2$. Determine o valor de df^{-1}/dx no ponto $x = 0 = f(5)$.
9. Suponha que a função derivável $y = f(x)$ tenha uma inversa e que a curva de f passe pelo ponto (2, 4) e tenha um coeficiente angular de 1/3 nesse ponto. Determine o valor de df^{-1}/dx em $x = 4$.
10. Suponha que a função derivável $y = g(x)$ tenha uma inversa e que a curva de f passe pela origem com coeficiente angular 2. Determine o coeficiente angular da curva de g^{-1} na origem.

Derivadas de logaritmos

Nos exercícios 11–40, determine as derivadas de y em relação a x, t ou θ, conforme o caso.

11. $y = \ln 3x$
12. $y = \ln kx$, k constante
13. $y = \ln(t^2)$
14. $y = \ln(t^{3/2})$
15. $y = \ln \frac{3}{x}$
16. $y = \ln \frac{10}{x}$
17. $y = \ln(\theta + 1)$
18. $y = \ln(2\theta + 2)$
19. $y = \ln x^3$
20. $y = (\ln x)^3$
21. $y = t(\ln t)^2$
22. $y = t\sqrt{\ln t}$
23. $y = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}$
24. $y = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$
25. $y = \frac{\ln t}{t}$
26. $y = \frac{1 + \ln t}{t}$
27. $y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$
28. $y = \frac{x \ln x}{1 + \ln x}$
29. $y = \ln(\ln x)$
30. $y = \ln(\ln(\ln x))$
31. $y = \theta(\operatorname{sen}(\ln\theta) + \cos(\ln\theta))$
32. $y = \ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)$
33. $y = \ln \frac{1}{x\sqrt{x + 1}}$
34. $y = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}$
35. $y = \frac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$
36. $y = \sqrt{\ln\sqrt{t}}$
37. $y = \ln(\sec(\ln\theta))$
38. $y = \ln\left(\frac{\sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}}{1 + 2\ln\theta}\right)$
39. $y = \ln\left(\frac{(x^2 + 1)^5}{\sqrt{1 - x}}\right)$
40. $y = \ln\sqrt{\frac{(x + 1)^5}{(x + 2)^{20}}}$

Derivação logarítmica

Nos exercícios 41–54, use a derivação logarítmica para determinar a derivada de y em relação à variável independente dada.

41. $y = \sqrt{x(x + 1)}$
42. $y = \sqrt{(x^2 + 1)(x - 1)^2}$
43. $y = \sqrt{\frac{t}{t + 1}}$
44. $y = \sqrt{\frac{1}{t(t + 1)}}$
45. $y = \sqrt{\theta + 3}\operatorname{sen}\theta$
46. $y = (\operatorname{tg}\theta)\sqrt{2\theta + 1}$
47. $y = t(t + 1)(t + 2)$
48. $y = \frac{1}{t(t + 1)(t + 2)}$
49. $y = \frac{\theta + 5}{\theta\cos\theta}$
50. $y = \frac{\theta\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\sec\theta}}$
51. $y = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{(x + 1)^{2/3}}$
52. $y = \sqrt{\frac{(x + 1)^{10}}{(2x + 1)^5}}$
53. $y = \sqrt[3]{\frac{x(x - 2)}{x^2 + 1}}$
54. $y = \sqrt[3]{\frac{x(x + 1)(x - 2)}{(x^2 + 1)(2x + 3)}}$

Derivadas

Nos exercícios 55–62, determine a derivada de y em relação a x, t ou θ, conforme o caso.

55. $y = \ln(\cos^2\theta)$
56. $y = \ln(3\theta e^{-\theta})$
57. $y = \ln(3te^{-t})$
58. $y = \ln(2e^{-t}\operatorname{sen} t)$
59. $y = \ln\left(\frac{e^\theta}{1 + e^\theta}\right)$
60. $y = \ln\left(\frac{\sqrt{\theta}}{1 + \sqrt{\theta}}\right)$
61. $y = e^{(\cos t + \ln t)}$
62. $y = e^{\operatorname{sen} t}(\ln t^2 + 1)$

Nos exercícios 63–66, determine dy/dx.

63. $\ln y = e^y \operatorname{sen} x$
64. $\ln xy = e^{x+y}$
65. $x^y = y^x$
66. $\operatorname{tg} y = e^x + \ln x$

Nos exercícios 67–88, determine a derivada de y em relação à variável independente dada.

67. $y = 2^x$
68. $y = 3^{-x}$
69. $y = 5^{\sqrt{x}}$
70. $y = 2^{(s^2)}$
71. $y = x^{\pi}$
72. $y = t^{1-e}$
73. $y = \log_2 5\theta$
74. $y = \log_3(1 + \theta \ln 3)$
75. $y = \log_4 x + \log_4 x^2$
76. $y = \log_{25} e^x - \log_5 \sqrt{x}$
77. $y = \log_2 r \cdot \log_4 r$
78. $y = \log_3 r \cdot \log_9 r$
79. $y = \log_3\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\ln 3}\right)$
80. $y = \log_5 \sqrt{\left(\frac{7x}{3x+2}\right)^{\ln 5}}$
81. $y = \theta \operatorname{sen}(\log_7 \theta)$
82. $y = \log_7\left(\frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}{e^{\theta} 2^{\theta}}\right)$
83. $y = \log_5 e^x$
84. $y = \log_2\left(\frac{x^2 e^2}{2\sqrt{x+1}}\right)$
85. $y = 3^{\log_2 t}$
86. $y = 3 \log_8(\log_2 t)$
87. $y = \log_2(8t^{\ln 2})$
88. $y = t \log_3\left(e^{(\operatorname{sen} t)(\ln 3)}\right)$

Derivação logarítmica

Nos exercícios 89–96, utilize a derivação logarítmica para determinar a derivada de y em relação à variável independente dada.

89. $y = (x+1)^x$
90. $y = x^{(x+1)}$
91. $y = (\sqrt{t})^t$
92. $y = t^{\sqrt{t}}$
93. $y = (\operatorname{sen} x)^x$
94. $y = x^{\operatorname{sen} x}$
95. $y = x^{\ln x}$
96. $y = (\ln x)^{\ln x}$

Teoria e aplicações

97. Se escrevemos $g(x)$ para $f^{-1}(x)$, a Equação (1) pode ser escrita como

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \quad \text{ou} \quad g'(f(a)) \cdot f'(a) = 1$$

Se depois escrevemos x para a, temos

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

A última equação pode fazê-lo lembrar-se da regra da cadeia, e realmente existe uma conexão entre elas.

Suponha que f e g sejam funções deriváveis e sejam a inversa uma da outra, de modo que $(g \circ f)(x) = x$. Derive os dois lados da equação em relação a x, usando a regra da cadeia para expressar $(g \circ f)'(x)$ como um produto das derivadas de g e f. O que você descobriu? (Isso não é uma prova do Teorema 5, pois pressupomos aqui a conclusão do teorema, ou seja, que $g = f^{-1}$ é derivável.)

98. Mostre que $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ para qualquer $x > 0$.

99. Se $y = A \operatorname{sen}(\ln x) + B \cos(\ln x)$, sendo A e B constantes, mostre que

$$x^2 y'' + xy' + y = 0$$

100. Usando a indução matemática, mostre que

$$\frac{d^n}{dx^n} \ln x = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

USANDO O COMPUTADOR

Nos exercícios 101–108, você vai explorar algumas funções e suas inversas junto a suas derivadas e retas tangentes em pontos especificados. Execute os passos a seguir utilizando um SAC:

(a) Construa o gráfico da função $y = f(x)$ junto a sua derivada em dado intervalo. Explique como você sabe que f é injetora nesse intervalo.

(b) Resolva a equação $y = f(x)$ para x como uma função de y e chame a função inversa resultante de g.

(c) Encontre a equação para a reta tangente ao gráfico de f no ponto especificado $(x_0, f(x_0))$.

(d) Encontre a equação para a reta tangente ao gráfico de g no ponto $(f(x_0), x_0)$, localizada simetricamente em relação à reta de 45° $y = x$ (que é o gráfico da função identidade). Use o Teorema 5 para encontrar o coeficiente angular dessa reta tangente.

(e) Construa o gráfico das funções f e g, da função identidade, das duas retas tangentes e do segmento de reta que liga os pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(f(x_0), x_0)$. Discuta as simetrias observadas em relação à diagonal principal.

101. $y = \sqrt{3x-2}, \quad \frac{2}{3} \le x \le 4, \quad x_0 = 3$

102. $y = \frac{3x+2}{2x-11}, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = 1/2$

103. $y = \frac{4x}{x^2+1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = 1/2$

104. $y = \frac{x^3}{x^2+1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = 1/2$

105. $y = x^3 - 3x^2 - 1, \quad 2 \le x \le 5, \quad x_0 = \frac{27}{10}$

106. $y = 2 - x - x^3, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = \frac{3}{2}$

107. $y = e^x, \quad -3 \le x \le 5, \quad x_0 = 1$

108. $y = \operatorname{sen} x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad x_0 = 1$

Nos exercícios 109 e 110, repita os passos anteriores para encontrar $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$ definidas implicitamente no intervalo pelas equações dadas.

109. $y^{1/3} - 1 = (x+2)^3, \quad -5 \le x \le 5, \quad x_0 = -3/2$

110. $\cos y = x^{1/5}, \quad 0 \le x \le 1, \quad x_0 = 1/2$

3.8 Funções trigonométricas inversas

Na Seção 1.6, apresentamos as seis funções trigonométricas inversas básicas, mas nos concentramos nas funções arco seno e arco cosseno. Aqui, complementaremos o assunto explicando como todas as seis funções trigonométricas inversas são definidas, representadas graficamente e calculadas, e também como suas derivadas são determinadas.

Inversas de tg x, cotg x, sec x e cosec x

Os gráficos de todas as seis funções trigonométricas inversas básicas são mostrados na Figura 3.47. Obtemos esses gráficos refletindo os gráficos das funções trigonométricas restritas (conforme visto na Seção 1.6) em torno da reta $y = x$. Vamos olhar mais de perto as funções arco tangente, arco cotangente, arco secante e arco cossecante.

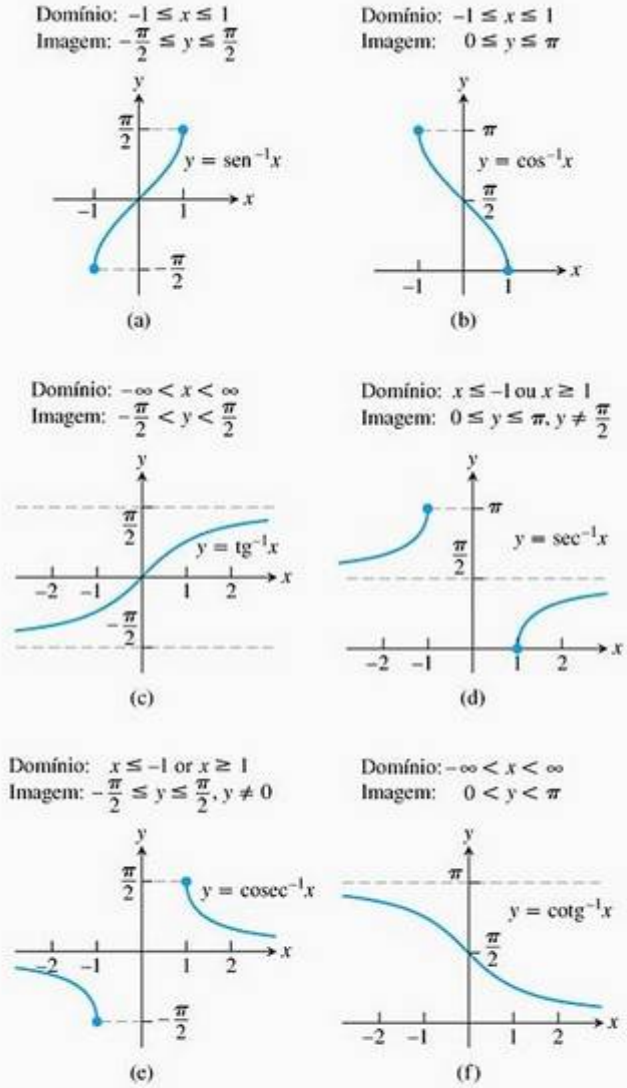


FIGURA 3.47 Gráficos das seis funções trigonométricas inversas básicas.

O arco tangente de x é um ângulo cuja tangente é x. O arco cotangente de x é um ângulo cuja cotangente é x.

Definição Funções arco tangente e arco cotangente

$y = \mathbf{tg}^{-1}\, x$ é o número em $(-\pi/2, \pi/2)$ para o qual $\text{tg}\, y = x$.

$y = \mathbf{cotg}^{-1}\, x$ é o número em $(0, \pi)$ para o qual $\text{cotg}\, y = x$.

Usamos intervalos abertos para evitar valores em que a tangente e a cotangente sejam indefinidas.

O gráfico de $y = \text{tg}^{-1}\, x$ é simétrico em relação à origem, pois é um ramo do gráfico $x = \text{tg}\, y$, que é simétrico em relação à origem (Figura 3.47c). Algebricamente, isso significa que

$$\text{tg}^{-1}(-x) = -\text{tg}^{-1}\, x$$

o arco tangente é uma função ímpar. O gráfico de $y = \text{cotg}^{-1}\, x$ não apresenta tal simetria (Figura 3.47f). Observe, na Figura 3.47c, que o gráfico da função arco tangente apresenta duas assíntotas horizontais, uma em $y = \pi/2$ e a outra em $y = -\pi/2$.

As funções inversas das formas restritas de sec x e cosec x foram escolhidas para serem representadas graficamente nas figuras 3.47d e 3.47e.

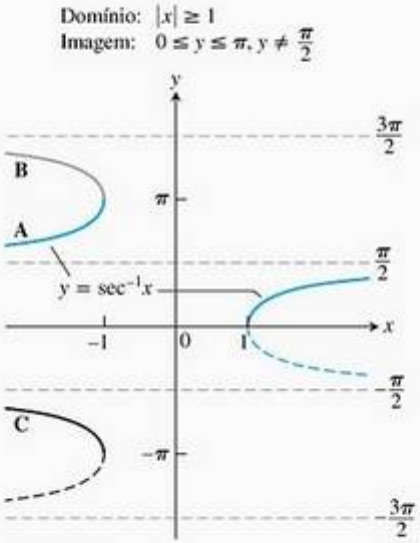


FIGURA 3.48 Existem várias opções lógicas para o ramo esquerdo de $y = \sec^{-1} x$. Com a opção **A**, $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$, uma identidade útil empregada por muitas calculadoras.

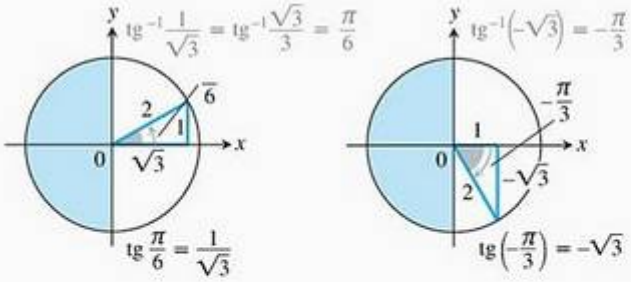
ATENÇÃO Não existe consenso sobre como definir $\sec^{-1} x$ para valores negativos de x. Escolhemos ângulos no segundo quadrante entre $\pi/2$ e π. Essa escolha implica $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$. Também implica que $\sec^{-1} x$ seja uma função crescente em cada intervalo de seu domínio. Algumas tabelas preferem colocar $\sec^{-1} x$ no intervalo $[-\pi, -\pi/2)$ para $x < 0$, enquanto outros textos preferem posicioná-la em $[\pi, 3\pi/2])$ (Figura 3.48). Essas escolhas simplificam a fórmula para a derivada (nossa fórmula precisa de sinais de valor absoluto), mas não satisfazem a equação computacional $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$. A partir dela, podemos derivar a identidade

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \tag{1}$$

aplicando a Equação (5) da Seção 1.6.

x	$\text{tg}^{-1}\, x$
$\sqrt{3}$	$\pi/3$
1	$\pi/4$
$\sqrt{3}/3$	$\pi/6$
$-\sqrt{3}/3$	$-\pi/6$
-1	$-\pi/4$
$-\sqrt{3}$	$-\pi/3$

EXEMPLO 1 Valores comuns de $\text{tg}^{-1}\, x$



Os ângulos vêm do primeiro e do quarto quadrantes, pois a imagem de $\text{tg}^{-1}\, x$ é $(-\pi/2, \pi/2)$.

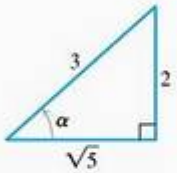


FIGURA 3.49 Se $\alpha = \text{sen}^{-1}(2/3)$, então os valores das outras funções trigonométricas básicas de α podem ser lidos a partir deste triângulo (Exemplo 2).

EXEMPLO 2

Determine $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, $\sec\alpha$, $\text{cosec}\,\alpha$ e $\text{cotg}\,\alpha$ se

$$\alpha = \text{sen}^{-1}\frac{2}{3}$$

SOLUÇÃO Essa equação diz que $\text{sen}\,\alpha = 2/3$. Representamos α como um ângulo em um triângulo retângulo com o cateto oposto 2 e hipotenusa 3 (Figura 3.49). O comprimento do outro lado é

$$\sqrt{(3)^2 - (2)^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} \quad \text{Teorema de Pitágoras.}$$

Acrescentamos essa informação à figura e, em seguida, lemos os valores que queremos a partir do triângulo completado.

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \text{cosec}\,\alpha = \frac{3}{2}, \quad \text{cotg}\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

EXEMPLO 3

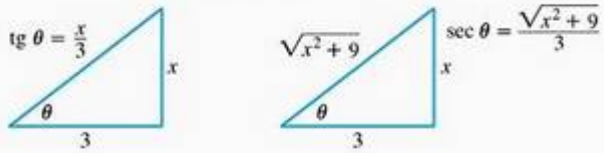
Determine $\sec\left(\text{tg}^{-1}\dfrac{x}{3}\right)$.

SOLUÇÃO Vamos considerar $\theta = \text{tg}^{-1}(x/3)$ (para dar um nome ao ângulo) e desenhar θ em um triângulo retângulo com

$$\text{tg}\,\theta = \text{cateto oposto/cateto adjacente} = x/3.$$

O comprimento da hipotenusa do triângulo é

$$\sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 9}$$



Logo,

$$\sec\left(\text{tg}^{-1}\frac{x}{3}\right) = \sec\theta$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adjacente}}$$

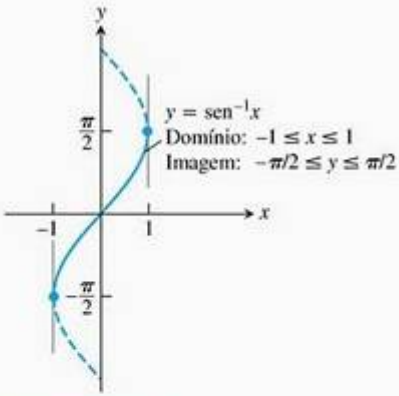


FIGURA 3.50 O gráfico de $y = \text{sen}^{-1}x$ possui tangentes verticais em $x = -1$ e $x = 1$.

Derivada de $y = \text{sen}^{-1}u$

Sabemos que a função $x = \text{sen}\,y$ é derivável no intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$ e que sua derivada, o cosseno, é positiva nesse intervalo. Por essa razão, o Teorema 5 da Seção 3.7 nos garante que a função inversa $y = \text{sen}^{-1}x$ é derivável no intervalo $-1 < x < 1$. Entretanto, não podemos esperar que seja derivável em $x = 1$ ou $x = -1$, porque as tangentes do gráfico são verticais nesses pontos (Figura 3.50).

Encontramos a derivada de $y = \text{sen}^{-1} x$ aplicando o Teorema 5 com $f(x) = \text{sen}\, x$ e $f^{-1}(x) = \text{sen}^{-1} x$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad \text{Teorem 5}$$

$$= \frac{1}{\cos(\text{sen}^{-1} x)} \qquad f'(u) = \cos u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\text{sen}^{-1} x)}} \qquad \cos u = \sqrt{1 - \text{sen}^2 u}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x$$

Derivação alternativa Em vez de aplicar o Teorema 5 diretamente, podemos achar a derivada de $y = \text{sen}^{-1} x$ usando a derivação implícita, como segue:

$$\text{sen}\, y = x \qquad y = \text{sen}^{-1} x \Leftrightarrow \text{sen}\, y = x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\, y) = 1 \qquad \text{Derivando os dois membros em relação a } x.$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{Regra da cadeia.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \qquad \text{Podemos dividir, pois } \cos y > 0 \text{ para } -\pi/2 < y < \pi/2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$$

Independentemente de qual derivação usarmos, chegaremos à conclusão de que a derivada de $y = \text{sen}^{-1} x$ em relação a x é

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Se u é uma função derivável de x com $|u| < 1$, aplicamos a regra da cadeia para obter

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1.$$

EXEMPLO 4 Aplicando a fórmula da derivada

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1} x^2) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

Derivada de $y = \text{tg}^{-1} u$

Encontramos a derivada de $y = \text{tg}^{-1} x$ aplicando o Teorema 5 com $f(x) = \text{tg}\, x$ e $f^{-1}(x) = \text{tg}^{-1} x$. O Teorema 5 pode ser aplicado, pois a derivada de $\text{tg}\, x$ é positiva para $-\pi/2 < x < \pi/2$:

$$
\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Teorema 5} \\
&= \frac{1}{\sec^2(\operatorname{tg}^{-1} x)} && f'(u) = \sec^2 u \\
&= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{tg}^{-1} x)} && \sec^2 u = 1 + \operatorname{tg}^2 u \\
&= \frac{1}{1 + x^2} && \operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1} x) = x
\end{aligned}
$$

A derivada é definida para qualquer número real. Se u é uma função derivável de x, então temos a fórmula da regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^{-1} u) = \frac{1}{1 + u^2}\frac{du}{dx}$$

EXEMPLO 5 Uma partícula em movimento

Uma partícula se desloca ao longo do eixo x de modo que, em qualquer instante $t \geq 0$, sua posição seja dada por $x(t) = \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{t}$. Qual será a velocidade da partícula quando $t = 16$?

SOLUÇÃO

$$v(t) = \frac{d}{dt}\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{t} = \frac{1}{1 + (\sqrt{t})^2} \cdot \frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{1}{1 + t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

Quando $t = 16$, a velocidade é

$$v(16) = \frac{1}{1 + 16} \cdot \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{136}$$

Derivada de $y = \sec^{-1} u$

Uma vez que a derivada de $\sec x$ é positiva para $0 < x < \pi/2$ e $\pi/2 < x < \pi$, o Teorema 5 diz que a função inversa $y = \sec^{-1} x$ é derivável. Em vez de aplicar a fórmula no Teorema 5 diretamente, determinamos a derivada de $y = \sec^{-1} x$, $|x| > 1$, usando derivação implícita e a regra da cadeia como segue:

$$
\begin{aligned}
y &= \sec^{-1} x \\
\sec y &= x && \text{Relação da função inversa.} \\
\frac{d}{dx}(\sec y) &= \frac{d}{dx} x && \text{Derive os dois lados.} \\
\sec y \operatorname{tg} y \frac{dy}{dx} &= 1 && \text{Regra da cadeia.} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec y \operatorname{tg} y} && \text{Como } |x| > 1, y \text{ está em } (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi) \text{ e } \sec y \operatorname{tg} y \neq 0.
\end{aligned}
$$

Para expressar o resultado em termos de x, usamos as relações

$$\sec y = x \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tg} y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2 - 1}$$

para obter

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Podemos fazer algo com o sinal ±? Basta olhar a Figura 3.51 para ver que o coeficiente angular do gráfico $y = \sec^{-1} x$ é sempre positivo. Logo,

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \begin{cases} +\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{se } x > 1 \\ -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

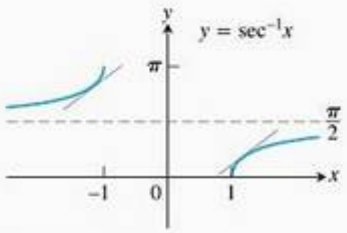


FIGURA 3.51 A inclinação da curva $y = \sec^{-1}x$ é positiva para $x < -1$ e $x > 1$.

Com o símbolo de valor absoluto, podemos escrever uma única expressão que elimina a ambigüidade do "±":

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

Se u é uma função derivável de x com $|u| > 1$, temos a fórmula

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1$$

EXEMPLO 6 Usando a fórmula

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sec^{-1}(5x^4) &= \frac{1}{|5x^4|\sqrt{(5x^4)^2 - 1}}\frac{d}{dx}(5x^4) \\ &= \frac{1}{5x^4\sqrt{25x^8 - 1}}(20x^3) \qquad 5x^4 > 1 > 0 \\ &= \frac{4}{x\sqrt{25x^8 - 1}} \end{aligned}$$

Derivadas das outras três

Podemos usar a mesma técnica para encontrar as derivadas das outras três funções trigonométricas inversas — arco cosseno, arco cotangente e arco cossecante —, mas existe uma maneira muito mais fácil de fazê-lo, graças às identidades a seguir.

Identidades da função inversa — co-função inversa

$$\cos^{-1} x = \pi/2 - \operatorname{sen}^{-1} x$$
$$\operatorname{cotg}^{-1} x = \pi/2 - \operatorname{tg}^{-1} x$$
$$\operatorname{cosec}^{-1} x = \pi/2 - \sec^{-1} x$$

Vimos a primeira dessas identidades na Equação (5) da Seção 1.6. As outras são derivadas de modo semelhante. Partindo-se dessas identidades, observa-se facilmente que as derivadas das co-funções inversas são as opostas

das derivadas das funções inversas correspondentes. A derivada de $\cos^{-1} x$, por exemplo, é calculada como segue:

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1} x\right) \quad \text{Identidade.}$$

$$= -\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{Derivada do arco seno.}$$

EXEMPLO 7 Uma reta tangente à curva arco cotangente

Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = \operatorname{cotg}^{-1} x$ em $x = -1$.

SOLUÇÃO Primeiro, notamos que

$$\operatorname{cotg}^{-1}(-1) = \pi/2 - \operatorname{tg}^{-1}(-1) = \pi/2 - (-\pi/4) = 3\pi/4.$$

O coeficiente angular da reta tangente é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = -\left.\frac{1}{1 + x^2}\right|_{x=-1} = -\frac{1}{1 + (-1)^2} = -\frac{1}{2},$$

então a reta tangente tem a equação $y - 3\pi/4 = (-1/2)(x + 1)$.

As derivadas das funções trigonométricas inversas são resumidas na Tabela 3.1.

TABELA 3.1 Derivadas das funções trigonométricas inversas

1. $\dfrac{d(\operatorname{sen}^{-1} u)}{dx} = \dfrac{du/dx}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad |u| < 1$
2. $\dfrac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = -\dfrac{du/dx}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad |u| < 1$
3. $\dfrac{d(\operatorname{tg}^{-1} u)}{dx} = \dfrac{du/dx}{1 + u^2}$
4. $\dfrac{d(\operatorname{cotg}^{-1} u)}{dx} = -\dfrac{du/dx}{1 + u^2}$
5. $\dfrac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \dfrac{du/dx}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}, \quad |u| > 1$
6. $\dfrac{d(\operatorname{cosec}^{-1} u)}{dx} = \dfrac{-du/dx}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}, \quad |u| > 1$

Exercícios 3.8

Valores comuns de funções trigonométricas inversas

Use triângulos de referência como o do Exemplo 1 para determinar os ângulos nos exercícios 1–12.

1. (a) $\text{tg}^{-1} 1$ (b) $\text{tg}^{-1}(-\sqrt{3})$ (c) $\text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
2. (a) $\text{tg}^{-1}(-1)$ (b) $\text{tg}^{-1}\sqrt{3}$ (c) $\text{tg}^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$
3. (a) $\text{sen}^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ (b) $\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (c) $\text{sen}^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
4. (a) $\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (b) $\text{sen}^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ (c) $\text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
5. (a) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ (c) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
6. (a) $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (c) $\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
7. (a) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ (b) $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (c) $\sec^{-1}(-2)$
8. (a) $\sec^{-1}\sqrt{2}$ (b) $\sec^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$ (c) $\sec^{-1} 2$
9. (a) $\text{cosec}^{-1}\sqrt{2}$ (b) $\text{cosec}^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$ (c) $\text{cosec}^{-1} 2$
10. (a) $\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$ (b) $\text{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (c) $\text{cosec}^{-1}(-2)$
11. (a) $\text{cotg}^{-1}(-1)$ (b) $\text{cotg}^{-1}(\sqrt{3})$ (c) $\text{cotg}^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$
12. (a) $\text{cotg}^{-1}(1)$ (b) $\text{cotg}^{-1}(-\sqrt{3})$ (c) $\text{cotg}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Valores das funções trigonométricas

13. Dado que $\alpha = \text{sen}^{-1}(5/13)$, determine $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, $\sec\alpha$, $\text{cosec}\,\alpha$ e $\text{cotg}\,\alpha$.
14. Dado que $\alpha = \text{tg}^{-1}(4/3)$, determine $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$, $\text{cosec}\,\alpha$ e $\text{cotg}\,\alpha$.
15. Dado que $\alpha = \sec^{-1}(-\sqrt{5})$, determine $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, $\text{cosec}\,\alpha$ e $\text{cotg}\,\alpha$.
16. Dado que $\alpha = \sec^{-1}(-\sqrt{13}/2)$, determine $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, $\text{cosec}\,\alpha$ e $\text{cotg}\,\alpha$.

Calculando termos trigonométricos e trigonométricos inversos

Determine os valores nos exercícios 17–28.

17. $\text{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$
18. $\sec\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$
19. $\text{tg}\left(\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$
20. $\text{cotg}\left(\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$
21. $\text{cosec}(\sec^{-1} 2) + \cos(\text{tg}^{-1}(-\sqrt{3}))$
22. $\text{tg}(\sec^{-1} 1) + \text{sen}(\text{cosec}^{-1}(-2))$
23. $\text{sen}\left(\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$
24. $\text{cotg}\left(\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) - \sec^{-1} 2\right)$
25. $\sec(\text{tg}^{-1} 1 + \text{cosec}^{-1} 1)$
26. $\sec(\text{cotg}^{-1}\sqrt{3} + \text{cosec}^{-1}(-1))$
27. $\sec^{-1}\left(\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ (A resposta *não* é $-\pi/6$.)
28. $\text{cotg}^{-1}\left(\text{cotg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ (A resposta *não* é $-\pi/4$.)

Determinando expressões trigonométricas

Calcule as expressões dos exercícios 29–40.

29. $\sec\left(\text{tg}^{-1}\frac{x}{2}\right)$
30. $\sec(\text{tg}^{-1} 2x)$
31. $\text{tg}(\sec^{-1} 3y)$
32. $\text{tg}\left(\sec^{-1}\frac{y}{5}\right)$
33. $\cos(\text{sen}^{-1} x)$
34. $\text{tg}(\cos^{-1} x)$
35. $\text{sen}(\text{tg}^{-1}\sqrt{x^2 - 2x})$, $x \geq 2$
36. $\text{sen}\left(\text{tg}^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$
37. $\cos\left(\text{sen}^{-1}\frac{2y}{3}\right)$
38. $\cos\left(\text{sen}^{-1}\frac{y}{5}\right)$
39. $\text{sen}\left(\sec^{-1}\frac{x}{4}\right)$
40. $\text{sen}\,\sec^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\right)$

Limites

Encontre os limites nos exercícios 41–48. (Se tiver dúvidas, olhe o gráfico da função.)

41. $\lim_{x\to 1^-} \text{sen}^{-1} x$
42. $\lim_{x\to -1^+} \cos^{-1} x$
43. $\lim_{x\to\infty} \text{tg}^{-1} x$
44. $\lim_{x\to -\infty} \text{tg}^{-1} x$
45. $\lim_{x\to\infty} \sec^{-1} x$
46. $\lim_{x\to -\infty} \sec^{-1} x$
47. $\lim_{x\to\infty} \text{cosec}^{-1} x$
48. $\lim_{x\to -\infty} \text{cosec}^{-1} x$

Encontrando derivadas

Nos exercícios 49–70, encontre a derivada de y em relação à variável apropriada.

49. $y = \cos^{-1}(x^2)$

50. $y = \cos^{-1}(1/x)$

51. $y = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{2}\,t$

52. $y = \operatorname{sen}^{-1}(1 - t)$

53. $y = \sec^{-1}(2s + 1)$

54. $y = \sec^{-1} 5s$

55. $y = \operatorname{cosec}^{-1}(x^2 + 1), \quad x > 0$

56. $y = \operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{x}{2}$

57. $y = \sec^{-1}\dfrac{1}{t}, \quad 0 < t < 1$

58. $y = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{3}{t^2}$

59. $y = \operatorname{cotg}^{-1}\sqrt{t}$

60. $y = \operatorname{cotg}^{-1}\sqrt{t - 1}$

61. $y = \ln(\operatorname{tg}^{-1} x)$

62. $y = \operatorname{tg}^{-1}(\ln x)$

63. $y = \operatorname{cosec}^{-1}(e^t)$

64. $y = \cos^{-1}(e^{-t})$

65. $y = s\sqrt{1 - s^2} + \cos^{-1} s$

66. $y = \sqrt{s^2 - 1} - \sec^{-1} s$

67. $y = \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x^2 - 1} + \operatorname{cosec}^{-1} x, \quad x > 1$

68. $y = \operatorname{cotg}^{-1}\dfrac{1}{x} - \operatorname{tg}^{-1} x$

69. $y = x \operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$

70. $y = \ln(x^2 + 4) - x \operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Modelos de comportamento final

Nos exercícios 71–74, encontre **(a)** um modelo de comportamento final à direita, **(b)** um modelo de comportamento final à esquerda e **(c)** todas as tangentes horizontais para a função, caso exista alguma.

71. $y = \operatorname{tg}^{-1} x$

72. $y = \operatorname{cotg}^{-1} x$

73. $y = \sec^{-1} x$

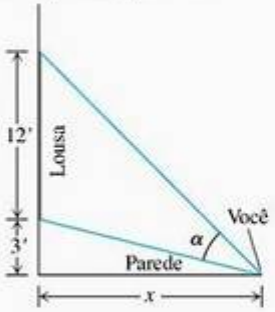
74. $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$

Aplicações e teoria

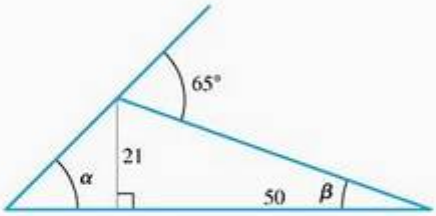
75. Você está sentado na sala de aula, próximo à parede que está de frente para a lousa, que fica na frente da sala. A lousa tem 12 pés de comprimento e começa a 3 pés da parede próximo à qual você se senta. Demonstre que seu ângulo de visão é

$$\alpha = \operatorname{cotg}^{-1}\frac{x}{15} - \operatorname{cotg}^{-1}\frac{x}{3}$$

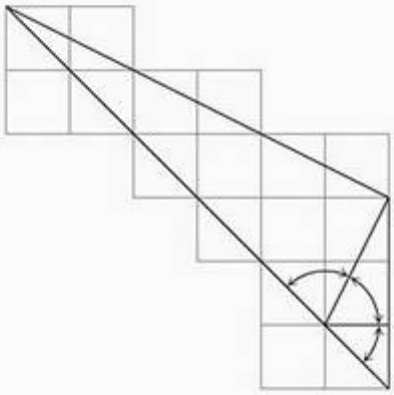
caso você esteja a x pés da parede.



76. Determine o ângulo α.

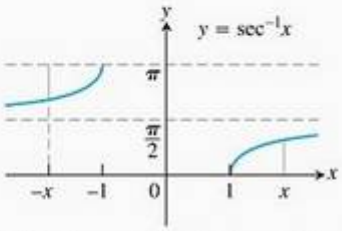


77. Eis uma prova informal de que $\operatorname{tg}^{-1} 1 + \operatorname{tg}^{-1} 2 + \operatorname{tg}^{-1} 3 = \pi$. Explique por quê.



78. Duas deduções da identidade $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$

(a) (*Geométrica*) Eis uma prova pictórica de que $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$. Veja se você consegue dizer o que está acontecendo.



(b) (*Algébrica*) Deduza a identidade $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$ combinando as duas equações a seguir:

$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$ Equação (3), Seção 1.6

$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$ Equação (1)

79. A identidade $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$ A Figura 1.67 estabelece a identidade para $0 < x < 1$. Para estabelecê-la para o resto de $[-1, 1]$, verifique por cálculo direto que ela é verdadeira para $x = 1, 0$ e -1. Depois, para valores de x em $(-1, 0)$, faça $x = -a$, $a > 0$ e aplique as equações (1) e (3) à soma $\operatorname{sen}^{-1}(-a) + \cos^{-1}(-a)$.

80. Demonstre que $\operatorname{tg}^{-1} x + \operatorname{tg}^{-1}(1/x)$ é constante.

Quais das expressões nos exercícios 81–84 são definidas e quais não são? Justifique suas respostas.

81. **(a)** $\operatorname{tg}^{-1} 2$ **(b)** $\cos^{-1} 2$

82. **(a)** $\operatorname{cosec}^{-1}(1/2)$ **(b)** $\operatorname{cosec}^{-1} 2$

83. **(a)** $\sec^{-1} 0$ **(b)** $\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{2}$

84. (a) $\text{cotg}^{-1}(-1/2)$ (b) $\cos^{-1}(-5)$

85. Use a identidade

$$\text{cosec}^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} u$$

para derivar a fórmula para a derivada de $\text{cosec}^{-1} u$ (Tabela 3.1) a partir da fórmula para a derivada de $\sec^{-1} u$.

86. Derive a fórmula

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

para a derivada de $y = \text{tg}^{-1} x$ derivando os dois lados da equação equivalente $\text{tg}\, y = x$.

87. Use a regra da derivada vista na Seção 3.7, Teorema 5, para derivar

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$$

88. Use a identidade

$$\text{cotg}^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \text{tg}^{-1} u$$

para derivar a fórmula para a derivada de $\text{cotg}^{-1} u$ (Tabela 3.1) a partir da fórmula para a derivada de $\text{tg}^{-1} u$.

89. O que há de especial nas funções

$$f(x) = \text{sen}^{-1}\frac{x-1}{x+1}, \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad g(x) = 2\,\text{tg}^{-1}\sqrt{x}?$$

Explique.

90. O que há de especial nas funções

$$f(x) = \text{sen}^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{e} \quad g(x) = \text{tg}^{-1}\frac{1}{x}?$$

Explique.

T Usando a calculadora e a ferramenta gráfica

91. Determine os valores de

(a) $\sec^{-1} 1{,}5$ (b) $\text{cosec}^{-1}(-1{,}5)$ (c) $\text{cotg}^{-1} 2$

92. Determine os valores de

(a) $\sec^{-1}(-3)$ (b) $\text{cosec}^{-1} 1{,}7$ (c) $\text{cotg}^{-1}(-2)$

Nos exercícios 93–95, determine o domínio e a imagem de cada uma das funções compostas. Depois, trace as funções compostas em telas diferentes. Os gráficos fazem sentido em cada caso? Justifique suas respostas. Comente as diferenças observadas.

93. (a) $y = \text{tg}^{-1}(\text{tg}\, x)$ (b) $y = \text{tg}(\text{tg}^{-1} x)$

94. (a) $y = \text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x)$ (b) $y = \text{sen}(\text{sen}^{-1} x)$

95. (a) $y = \cos^{-1}(\cos x)$ (b) $y = \cos(\cos^{-1} x)$

96. Faça o gráfico de $y = \sec(\sec^{-1} x) = \sec(\cos^{-1}(1/x))$. Explique o que você observa.

97. **A serpentina de Newton** Trace a serpentina de Newton, $y = 4x/(x^2+1)$. Depois trace $y = 2\,\text{sen}(2\,\text{tg}^{-1} x)$ na mesma tela. O que você observa? Explique.

98. Faça o gráfico da função racional, $y = (2 - x^2)/x^2$. Depois trace $y = \cos(2\sec^{-1} x)$ na mesma tela. O que você observa? Explique.

99. Faça o gráfico de $f(x) = \text{sen}^{-1} x$ junto com os de suas duas primeiras derivadas. Comente o comportamento de f e a forma de seu gráfico em relação aos sinais e valores de f' e f''.

100. Faça o gráfico de $f(x) = \text{tg}^{-1} x$ junto com os de suas duas primeiras derivadas. Comente o comportamento de f e a forma de seu gráfico em relação aos sinais e valores de f' e f''.

3.9 Taxas relacionadas

Nesta seção, veremos problemas em que temos de determinar a taxa à qual alguma variável varia. Em todos os casos, a taxa é uma derivada que tem de ser calculada a partir da taxa à qual se sabe que alguma outra variável (ou talvez várias variáveis) varia. Para determiná-la, escrevemos uma equação que relaciona as variáveis envolvidas e a derivamos, obtendo assim uma equação que relaciona a taxa que procuramos às taxas que conhecemos. Encontrar uma taxa que não pode ser facilmente medida a partir de outras que podem é um problema que se chama *problema de taxas relacionadas*.

Equações de taxas relacionadas

Suponha que estejamos enchendo de ar um balão esférico. Tanto o volume quanto o raio do balão aumentam ao longo do tempo. Se V é o volume e r é o raio do balão em dado instante, então

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Usando a regra da cadeia, derivamos para determinar a equação de taxas relacionadas.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Conseqüentemente, se conhecemos o raio r do balão e a taxa dV/dt à qual o volume está aumentando em dado instante, podemos resolver dr/dt nessa última equação e, assim, determinar a velocidade com que o raio está aumentando naquele instante. Observe que é mais fácil medir diretamente a taxa de aumento do volume que a do raio. A equação de taxas relacionadas nos permite calcular dr/dt a partir de dV/dt.

Quase sempre, a chave para relacionar as variáveis em um problema de taxas relacionadas é fazer um desenho que mostre a relação geométrica entre elas, conforme ilustrado no exemplo a seguir.

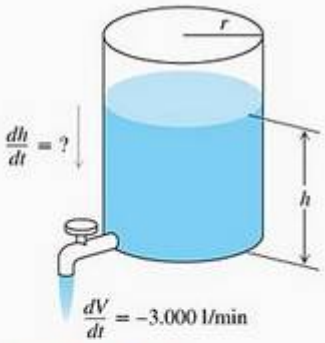


FIGURA 3.52 A taxa de variação no volume do líquido em um tanque cilíndrico está relacionada à taxa de variação no nível de líquido do tanque (Exemplo 1).

EXEMPLO 1 Esvaziando um tanque

A que taxa o nível do líquido diminui dentro de um tanque cilíndrico vertical se bombearmos o líquido para fora a uma taxa de 3.000 l/min?

SOLUÇÃO Esquematizamos a figura de um tanque cilíndrico vertical parcialmente cheio, chamando seu raio de r e a altura do líquido de h (Figura 3.52). Chame o volume do líquido de V.

Com o passar do tempo, o raio permanece constante, mas V e h variam. Percebemos que V e h são funções deriváveis do tempo e usamos t para representar o tempo. Sabemos que

$$\frac{dV}{dt} = -3.000$$

Bombeamos o líquido para fora a uma taxa de 3.000 l/min. A taxa é negativa porque o volume está diminuindo.

E devemos determinar

$$\frac{dh}{dt}$$

A que taxa o nível do líquido diminui?

Para determinar dh/dt, primeiro, escrevemos uma equação que relacione h e V. A equação depende das unidades escolhidas para V, r e h. Com V em litros e r e h em metros, a equação adequada para o volume do cilindro é

$$V = 1.000\pi r^2 h$$

pois um metro cúbico contém 1.000 litros.

Como V e h são funções deriváveis de t, podemos derivar os dois lados da equação $V = 1.000\pi r^2 h$ em relação a t para obter uma equação que relacione dh/dt a dV/dt:

$$\frac{dV}{dt} = 1.000\,\pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

r é constante.

Substituímos o valor conhecido $dV/dt = -3.000$ e determinamos dh/dt:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-3.000}{1.000\,\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}$$

O nível do líquido diminui a uma taxa de $3/(\pi r^2)$ m/min.

A equação $dh/dt = -3/\pi r^2$ mostra como a taxa com que o nível do líquido diminui está relacionada ao raio do tanque. Se r for pequeno, dh/dt será grande; se r for grande, dh/dt será pequena.

Se $r = 1$ m: $\dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{3}{\pi} \approx -0{,}95$ m/min $= -95$ cm/min.

Se $r = 10$ m: $\dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{3}{100\pi} \approx -0{,}0095$ m/min $= -0{,}95$ cm/min.

Estratégia para a resolução de problemas de taxas relacionadas

1. *Desenhe uma figura e identifique as variáveis e as constantes.* Use t para tempo. Suponha que todas as variáveis são funções deriváveis de t.
2. *Escreva as informações numéricas* (em termos dos símbolos que você escolheu).
3. *Escreva aquilo que você deve encontrar* (geralmente uma taxa, expressa como uma derivada).
4. *Escreva uma equação que relacione as variáveis.* Talvez você possa combinar duas ou mais equações para conseguir uma única, relacionando a variável que você quer com as variáveis que conhece.
5. *Derive em relação a t.* Em seguida, expresse a taxa que você quer em termos das taxas e variáveis cujos valores você conhece.
6. *Calcule.* Use os valores conhecidos para encontrar a taxa desconhecida.

EXEMPLO 2 Um balão subindo

Um balão de ar quente, subindo na vertical a partir do solo, é rastreado por um telêmetro colocado a 500 pés de distância do ponto de decolagem. No momento em que o ângulo de elevação do telêmetro é $\pi/4$, o ângulo aumenta a uma taxa de 0,14 rad/min. A que velocidade o balão sobe nesse momento?

SOLUÇÃO Responderemos à questão em seis passos.

1. *Desenhe uma figura e identifique as variáveis e as constantes* (Figura 3.53). As variáveis da figura são

θ = o ângulo, em radianos, que o telêmetro forma com o solo

y = a altitude do balão, em pés

Utilizamos t para representar o tempo e consideramos que θ e y são funções deriváveis de t.

A única constante da figura é a distância do telêmetro ao ponto de decolagem (500 pés). Não é preciso atribuir um símbolo especial para essa distância.

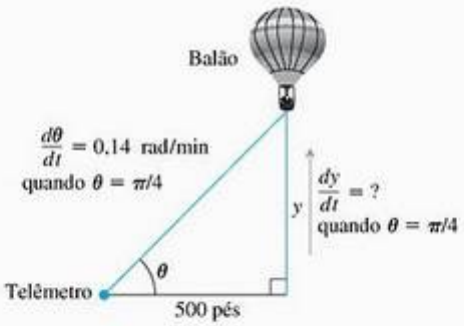


FIGURA 3.53 A taxa de variação da altura do balão está relacionada à taxa de variação do ângulo que o telêmetro forma com o solo (Exemplo 2).

2. *Escreva as informações numéricas adicionais.*

$$\frac{d\theta}{dt} = 0{,}14 \text{ rad/min} \qquad \text{quando} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

3. *Escreva aquilo que você deve encontrar.* Queremos dy/dt quando $\theta = \pi/4$.
4. Escreva uma equação que relacione as variáveis y e θ.

$$\frac{y}{500} = \operatorname{tg}\theta \qquad \text{ou} \qquad y = 500 \operatorname{tg}\theta$$

5. *Derive em relação a t usando a regra da cadeia.* O resultado a seguir mostra que dy/dt (que queremos) está relacionada a $d\theta/dt$ (que conhecemos).

$$\frac{dy}{dt} = 500\,(\sec^2\theta)\,\frac{d\theta}{dt}$$

6. *Calcule usando $\theta = \pi/4$ e $d\theta/dt = 0{,}14$ para determinar dy/dt.*

$$\frac{dy}{dt} = 500\left(\sqrt{2}\right)^2(0{,}14) = 140 \qquad \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

No momento em questão, o balão está subindo a uma velocidade de 140 pés/min.

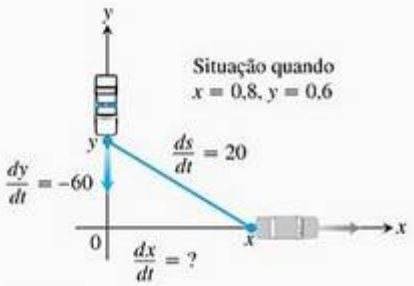


FIGURA 3.54 A velocidade do carro está relacionada à velocidade da viatura policial e à taxa de variação da distância entre eles (Exemplo 3).

EXEMPLO 3 Perseguição na rodovia

Uma viatura de polícia, vindo do norte e aproximando-se de um cruzamento em ângulo reto, está perseguindo um carro em alta velocidade, que, no cruzamento, toma a direção leste. Quando a viatura está a 0,6 mi ao norte do cruzamento e o carro fugitivo a 0,8 mi a leste, o radar da polícia detecta que a distância entre a viatura e o fugitivo está aumentando a 20 mi/h. Se a viatura está se deslocando a 60 mi/h no instante dessa medida, qual é a velocidade do fugitivo?

SOLUÇÃO Desenhamos o carro do fugitivo e a viatura no plano, usando o eixo x positivo como a parte da estrada que vai para o leste e o eixo y positivo como a parte da estrada que vem do norte (Figura 3.54). Usamos t para representar tempo e

x = posição do carro do fugitivo no tempo t
y = posição da viatura no tempo t
s = distância entre o carro do fugitivo e a viatura no tempo t.

Consideramos que x, y, s são funções deriváveis de t.

Queremos determinar dx/dt quando

$$x = 0{,}8 \text{ mi}, \qquad y = 0{,}6 \text{ mi}, \qquad \frac{dy}{dt} = -60 \text{ mi/h}, \qquad \frac{ds}{dt} = 20 \text{ mi/h}$$

Veja que dy/dt é negativa porque y está diminuindo.
Derivamos a equação da distância

$$s^2 = x^2 + y^2$$

(poderíamos usar também $s = \sqrt{x^2 + y^2}$), e obtemos

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{s}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Por fim, usamos $x = 0{,}8$, $y = 0{,}6$, $dy/dt = -60$, $ds/dt = 20$ e determinamos dx/dt.

$$20 = \frac{1}{\sqrt{(0{,}8)^2 + (0{,}6)^2}}\left(0{,}8\frac{dx}{dt} + (0{,}6)(-60)\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20\sqrt{(0{,}8)^2 + (0{,}6)^2} + (0{,}6)(60)}{0{,}8} = 70$$

No momento em questão, a velocidade do carro é de 70 mi/h.

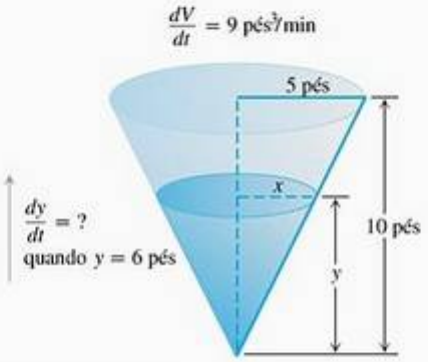


FIGURA 3.55 A geometria do tanque cônico e a taxa à qual a água o preenche determinam a velocidade com que o nível de água aumenta (Exemplo 4).

EXEMPLO 4 Enchendo um tanque cônico

A água entra em um tanque cônico a uma taxa de 9 pés³/min. O tanque tem o vértice voltado para baixo e altura de 10 pés e o raio da base é de 5 pés. A que taxa o nível da água estará subindo quando a profundidade for de 6 pés?

SOLUÇÃO A Figura 3.55 mostra o tanque cônico parcialmente cheio. As variáveis do problema são

V = volume (pés³) de água no tanque no instante t (min)
x = raio (pés) da superfície da água no instante t
y = profundidade (pés) da água no tanque no instante t.

Consideramos que V, x e y são funções deriváveis de t. As constantes são as dimensões do tanque. Queremos determinar dy/dt quando

$$y = 6 \text{ pés} \qquad \text{e} \qquad \frac{dV}{dt} = 9 \text{ pés}^3/\text{min}$$

A água forma um cone de volume

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Essa equação envolve x, assim como V e y. Como não há informação sobre x e dx/dt no instante em questão, precisamos eliminar x. Os triângulos semelhantes da Figura 3.55 permitem expressar x em termos de y:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{y}{2}$$

Portanto,

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{12}y^3$$

que nos leva à derivada

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12}\cdot 3y^2\frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}y^2\frac{dy}{dt}$$

Por fim, use $y = 6$ e $dV/dt = 9$ para determinar dy/dt.

$$9 = \frac{\pi}{4}(6)^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0{,}32$$

No momento em questão, o nível da água está aumentando em aproximadamente 0,32 pé/min.

Exercícios 3.9

1. **Área** Suponha que o raio r e a área $A = \pi r^2$ de um círculo sejam funções deriváveis de t. Escreva uma equação que relacione dA/dt a dr/dt.

2. **Área da superfície** Suponha que o raio r e a área da superfície $S = 4\pi r^2$ de uma esfera sejam funções deriváveis de t. Escreva uma equação que relacione dS/dt a dr/dt.

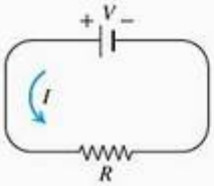
3. **Volume** O raio r e a altura h de um cilindro circular estão relacionados com o volume V do cilindro pela fórmula $V = \pi r^2 h$.
   (a) Como dV/dt está relacionada a dh/dt se r é constante?
   (b) Como dV/dt está relacionada a dr/dt se h é constante?
   (c) Como dV/dt está relacionada a dr/dt e dh/dt se nem r nem h são constantes?

4. **Volume** O raio r e altura h de um cone circular estão relacionados com o volume V do cone pela fórmula $V = (1/3)\pi r^2 h$.
   (a) Como dV/dt está relacionada a dh/dt, se r é constante?

(b) Como dV/dt está relacionada a dr/dt, se h é constante?

(c) Como dV/dt está relacionada a dr/dt e dh/dt, se nem r nem h são constantes?

5. **Variando a voltagem** A voltagem V (volts), a corrente I (amperes) e a resistência R (ohms) de um circuito elétrico (veja a seguir) estão relacionadas entre si pela equação $V = IR$. Suponha que V esteja aumentando a uma taxa de 1 volt/s, enquanto I está diminuindo a uma taxa de 1/3 A/s. Representaremos o tempo t em segundos.



(a) Qual é o valor de dV/dt?

(b) Qual é o valor de dI/dt?

(c) Qual equação relaciona dR/dt a dV/dt e dI/dt?

(d) Encontre a taxa com a qual R está variando quando $V = 12$ e $I = 2$ A. R está aumentando ou diminuindo?

6. **Potência elétrica** A potência P (em watt) dissipada em um circuito elétrico está relacionada à resistência R (em ohms) e à corrente I (em amperes) que circula nesse circuito pela equação $P = RI^2$.

(a) Como estão relacionadas dP/dt, dR/dt e dI/dt se P, R e I não são constantes?

(b) Como dR/dt está relacionada com dI/dt se P é constante?

7. **Distância** Sejam x e y funções deriváveis de t e seja $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ a distância entre os pontos $(x, 0)$ e $(0, y)$ no plano xy.

(a) Como ds/dt está relacionada a dx/dt se y é constante?

(b) Como ds/dt está relacionada a dx/dt e dy/dt se nem x nem y são constantes?

(c) Como dx/dt está relacionada a dy/dt se s é constante?

8. **Diagonais** Se x, y e z são os comprimentos dos lados de uma caixa retangular, o comprimento comum das diagonais da caixa é $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) Considerando que x, y e z sejam funções deriváveis de t, como ds/dt está relacionada dx/dt, a dy/dt e dz/dt?

(b) Como ds/dt está relacionada a dy/dt e dz/dt se x é constante?

(c) Como dx/dt, dy/dt e dz/dt estão relacionadas se s é constante?

9. **Área** A área A de um triângulo, com lados de comprimento a e b formando um ângulo θ, é

$$A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$$

(a) Como dA/dt está relacionada a $d\theta/dt$, se a e b são constantes?

(b) Como dA/dt está relacionada a $d\theta/dt$ e da/dt se somente b é constante?

(c) Como dA/dt está relacionada com $d\theta/dt$, da/dt e db/dt, se nem a, nem b nem θ são constantes?

10. **Aquecendo um prato** Quando um prato circular de metal é aquecido em um forno, seu raio aumenta a uma taxa de 0,01 cm/min. A que taxa a área do prato aumenta quando seu raio é de 50 cm?

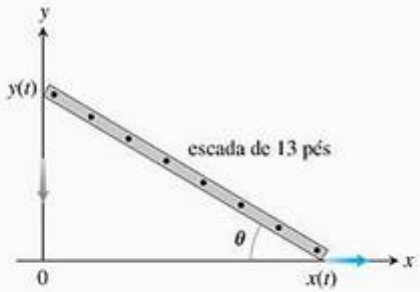
11. **Mudando as dimensões de um retângulo** O comprimento l de um retângulo diminui a uma taxa de 2 cm/s, enquanto a largura w aumenta a uma taxa de 2 cm/s. Encontre as taxas de variação para (a) a área, (b) o perímetro e (c) os comprimentos das diagonais do retângulo quando $l = 12$ cm e $w = 5$ cm. Quais medidas estão aumentando e quais estão diminuindo?

12. **Mudando as dimensões de uma caixa retangular** Suponha que os comprimentos dos lados x, y, z de uma caixa retangular estejam variando às seguintes taxas:

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ m/s}, \quad \frac{dy}{dt} = -2 \text{ m/s}, \quad \frac{dz}{dt} = 1 \text{ m/s}.$$

Encontre as taxas de variação de (a) volume, (b) área da superfície e (c) comprimento da diagonal $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ no instante em que $x = 4$, $y = 3$ e $z = 2$.

13. **Uma escada escorregadia** Uma escada com 13 pés está em pé e apoiada em uma parede, quando sua base começa a escorregar, afastando-se da parede. No momento em que a base está a 12 pés da casa, ela escorrega a uma taxa de 5 pés/s.



(a) A que taxa o topo da escada escorrega para baixo nesse momento?

(b) A que taxa a área do triângulo, formado pela escada, pela parede e pelo solo, varia?

(c) A que taxa o ângulo θ, formado pela escada e pelo solo, varia?

14. **Tráfego aéreo comercial** Dois aviões comerciais voam a 40.000 pés em rotas retilíneas, que se cruzam formando ângulos retos. O avião A se aproxima do ponto de interseção a uma velocidade de 442 nós (milhas náuticas por hora; uma milha náutica é igual a 2.000 jardas) e o avião B se aproxima a 481 nós. A que taxa a distância entre os aviões varia, quando A está a 5 milhas náuticas do ponto de interseção e B a 12 milhas náuticas do mesmo ponto?

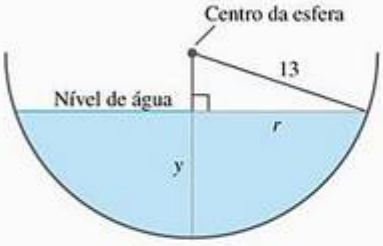
15. **Empinando uma pipa** Um menino empina uma pipa a 300 pés de altura; o vento afasta a pipa horizontalmente em relação ao menino a uma velocidade de 25 pés/s. A que taxa ele deve soltar a linha, quando a pipa está a 500 pés de distância?

16. **Torneando um cilindro** Os mecânicos da automotiva Lincoln estão torneando um cilindro de 6 polegadas de profundidade para receber um novo pistão. A máquina usada aumenta o raio do cilindro em 0,001 polegada a cada 3 minutos. A que taxa o volume do cilindro aumentará quando o diâmetro for de 3,8 polegadas?

17. **O crescimento de um monte de areia** A areia cai de uma esteira transportadora a uma taxa de 10 m^3/min no topo de um monte cônico. A altura do monte sempre tem três oitavos do diâmetro da base. A que taxa variará (a) a altura e (b) o raio quando o monte tiver 4 m de altura? Responda em cm/min.

18. **Esvaziando um reservatório cônico** A água escoa de um reservatório de concreto cônico (vértice para baixo), com raio da base de 45 m e altura de 6 m, a uma taxa de 50 m^3/min.
    (a) Com que taxa (cm/min) o nível da água estará diminuindo quando este for de 5 m de profundidade?
    (b) Com que taxa o raio da superfície da água estará variando nesse momento? Use cm/min como unidade.

19. **Drenando um reservatório hemisférico** A água escoa a uma taxa de 6 m^3/min de um reservatório hemisférico com raio de 13 m (veja a seguir). Responda às questões a seguir, sendo o volume de água em um recipiente hemisférico de raio R dado por $V = (\pi/3)y^2(3R - y)$, quando a água tem y metros de profundidade.

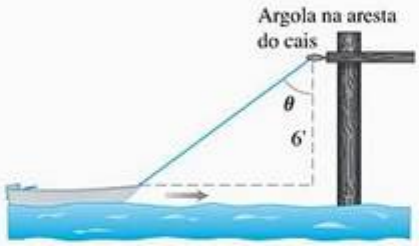


    (a) A que taxa o nível da água variará quando a água tiver 8 m de profundidade?
    (b) Qual será o raio r na superfície da água quando a água tiver y metros de profundidade?
    (c) A que taxa o raio r variará quando a água tiver 8 m de profundidade?

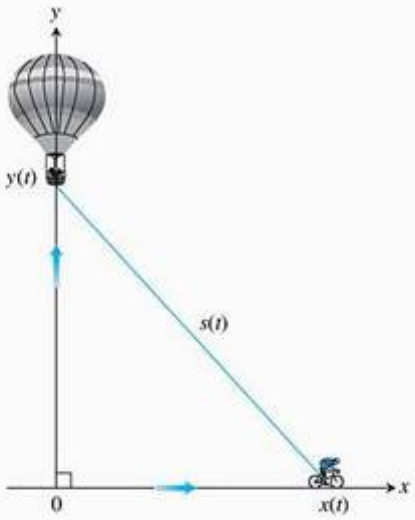
20. **O aumento de uma gota** Suponha que uma gota de neblina seja uma esfera perfeita e que, por condensação, capte umidade a uma taxa proporcional à área de sua superfície. Mostre que nessas circunstâncias o raio da gota cresce a uma taxa constante.

21. **O raio de um balão inflável** Um balão esférico é inflado com hélio a uma taxa de 100π $pés^3$/min. Quando o raio do balão for de 5 pés, a que taxa aumentará? A que taxa a área da superfície crescerá?

22. **Puxando um bote** Um bote é puxado por uma corda presa à proa que passa por uma argola presa no cais a 6 pés acima da proa. A corda é puxada com uma taxa de 2 pés/s.
    (a) A que velocidade o bote se aproxima do cais quando 10 pés de corda foram puxados?
    (b) A que taxa o ângulo θ varia nesse momento (veja a figura)?



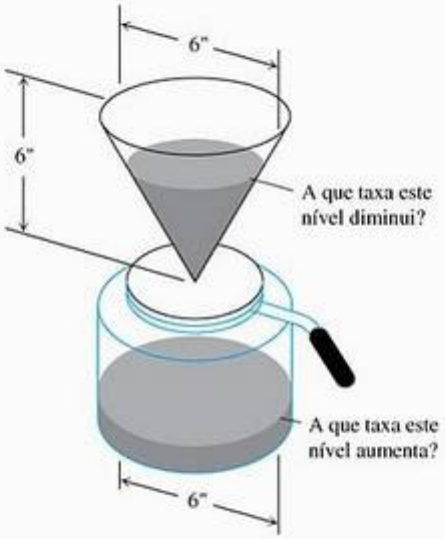
23. **Um balão e uma bicicleta** Um balão está subindo verticalmente acima de uma estrada a uma velocidade constante de 1 pé/s. Quando ele está a 65 pés acima do solo, uma bicicleta que se desloca a uma velocidade constante de 17 pés/s passa por baixo dele. A que taxa a distância $s(t)$ entre a bicicleta e o balão aumentará 3 segundos depois?



24. Fazendo café O café escoa de um filtro cônico para uma cafeteira cilíndrica a uma taxa de 10 pol^3/min.

(a) A que taxa o nível na cafeteira aumentará quando o café no filtro tiver 5 pol de profundidade?

(b) A que taxa o nível no filtro diminuirá nesse momento?



25. Débito cardíaco No final da década de 1860, Adolf Fick, professor de fisiologia da Faculdade de Medicina de Würtzberg, Alemanha, desenvolveu um método usado até hoje para determinar a quantidade de sangue que o coração humano bombeia por minuto. Enquanto você lê esta frase, é possível que seu débito cardíaco seja de 7 l/min. Em repouso, geralmente é um pouco menos que 6 l/min. Se você for um atleta, seu débito cardíaco poderá atingir 30 l/min quando estiver participando de uma maratona.

O débito cardíaco pode ser calculado pela fórmula

$$y = \frac{Q}{D}$$

onde Q é o volume (em ml) de CO_2 exalado por minuto e D é a diferença entre as concentrações de CO_2 (ml de CO_2/litro de sangue) bombeado para e retornando dos pulmões. Com $Q = 233$ ml/min e $D = 97 - 56 = 41$ ml/l,

$$y = \frac{233 \text{ ml/min}}{41 \text{ ml/l}} \approx 5{,}68 \text{ l/min}$$

bem próximo a 6 l/min, valor que a maioria das pessoas apresenta na condição basal (repouso). (Dados cedidos por J. Kenneth Herd, M.D., Escola de Medicina de Quillan, Universidade do Leste do Estado do Tennessee.)

Suponha que, para $Q = 233$ e $D = 41$, D diminua a uma velocidade de 2 unidades por minuto, mas Q permaneça constante. O que acontecerá com o débito cardíaco?

26. Custo, rendimento e lucro Uma empresa pode produzir x itens a um custo de $c(x)$ mil dólares, um rendimento de venda de $r(x)$ mil dólares e um lucro de $p(x) = r(x) - c(x)$ mil dólares. Determine dc/dt, dr/dt e dp/dt para os valores de x e dx/dt a seguir.

(a) $r(x) = 9x$, $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ e $dx/dt = 0{,}1$ quando $x = 2$

(b) $r(x) = 70x$, $c(x) = x^3 - 6x^3 + 45/x$ e $dx/dt = 0{,}05$ quando $x = 1{,}5$

27. Movimento ao longo de uma parábola Uma partícula se desloca ao longo da parábola $y = x^2$ no primeiro quadrante, de modo que sua coordenada x (medida em metros) aumente a uma taxa constante de 10 m/s. A que taxa o ângulo de inclinação θ da reta que liga a partícula à origem varia quando $x = 3$ m?

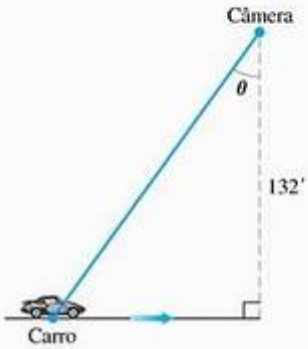
28. Movimento ao longo de outra parábola Uma partícula se desloca da direita para a esquerda ao longo de uma parábola $y = \sqrt{-x}$ de modo que sua coordenada x (medida em metros) diminua a uma velocidade de 8 m/s. A que taxa estará variando o ângulo de inclinação θ da reta que liga a partícula à origem quando $x = -4$?

29. Movimento em um plano As coordenadas de uma partícula em um plano xy são funções deriváveis do tempo t com $dx/dt = -1$ m/s e $dy/dt = -5$ m/s. A que taxa a distância entre a partícula e a origem varia, quando esta passa pelo ponto (5, 12)?

30. Uma sombra em movimento Um homem que mede 6 pés anda pela rua a uma velocidade de 5 pés/s em direção a um poste de luz de 16 pés de altura. Com que velocidade a parte mais alta de sua sombra estará se movendo? A que velocidade o comprimento da sombra varia quando ele está a 10 pés da base do poste?

31. Outra sombra em movimento Uma luz está acesa no topo de um poste de 50 pés de altura. Uma bola cai da mesma altura em um ponto situado a 30 pés de distância do poste. (Veja a figura a seguir.) A que velocidade a sombra da bola se desloca no solo 1/2 s depois? (Considere que na queda a bola percorreu $s = 16t^2$ pés em t segundos.)

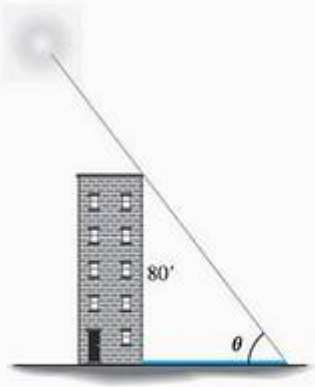
32. Filmando um carro em movimento Você está filmando uma corrida de um lugar a 132 pés de distância da pista, seguindo um carro que se desloca a 180 mi/h (264 pé/s). Quando o carro estiver exatamente na sua frente, a que velocidade o ângulo θ de sua câmera variará? E meio segundo depois?



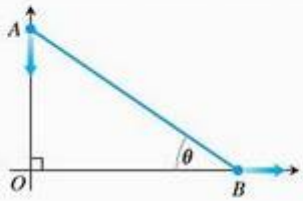
33. Derretimento de uma camada de gelo Uma bola de ferro esférica com 8 pol de diâmetro está coberta com uma camada de gelo de espessura uniforme. Se o gelo derrete a uma taxa de 10 pol^3/min, a que taxa a espessura do gelo diminuirá quando tiver 2 pol? A que taxa a área da superfície externa do gelo diminuirá?

34. Polícia rodoviária Um helicóptero da polícia rodoviária sobrevoa uma auto-estrada a 3 milhas do solo a uma velocidade constante de 120 mi/h. O piloto vê um carro se aproximando e o radar assinala que no instante da observação a distância entre o carro e o avião é de 5 mi. A distância entre eles diminui a uma taxa de 160 mi/h. Calcule a velocidade do carro.

35. A sombra de um prédio Em uma manhã, um prédio com 80 pés de altura projeta uma sombra de 60 pés de comprimento. Nesse momento, o ângulo θ que os raios solares projetam no solo aumenta a uma taxa de 0,27°/min. A que taxa a sombra diminui? (Lembre-se de usar radianos. Expresse sua resposta em polegadas por minuto, arredondando para a primeira casa decimal.)



36. Pessoas caminhando A e B estão caminhando em ruas retilíneas que formam um ângulo reto no cruzamento. A aproxima-se do cruzamento a 2 m/s, enquanto B se afasta a 1 m/s. A que taxa o ângulo θ varia quando A está a 10 m do cruzamento e B a 20 m? Expresse sua resposta em graus por segundo, arredondando para o grau mais próximo.



37. Jogadores de beisebol Um campo de beisebol é um quadrado que mede 90 pés lado. Um jogador corre da primeira para a segunda base a uma velocidade de 16 pés/s.

(a) A que taxa varia a distância do jogador para a terceira base quando ele está a 30 pés da primeira base?

(b) A que taxas os ângulos θ_1 e θ_2 (veja a figura) variam nesse momento?

(c) O jogador desliza para a segunda base a uma velocidade de 15 pés/s. A que taxas os ângulos θ_1 e θ_2 variam quando o jogador toca a base?

38. Navios Dois navios a vapor estão navegando para longe de um ponto O em rotas que formam um ângulo de 120°. O navio A desloca-se a 14 nós (milhas náuticas por hora; uma milha náutica é igual a 2.000 jardas). O navio B desloca-se a 21 nós. A que taxa os navios estão se afastando entre si, quando $OA = 5$ e $OB = 3$ milhas náuticas?

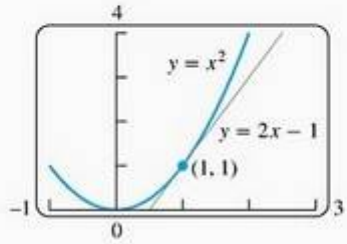
3.10 Linearização e diferenciais

Às vezes, podemos aproximar funções complicadas usando funções mais simples que, além de serem mais fáceis de trabalhar, fornecem a precisão desejada para aplicações específicas. As funções de aproximação discutidas nesta seção são denominadas *linearizações* e se baseiam em retas tangentes. Outras funções de aproximação, como os polinômios, serão discutidas no Capítulo 11, no volume II.

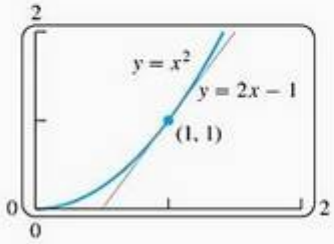
Vamos apresentar as novas variáveis dx e dy, chamadas *diferenciais*, e defini-las de um modo que transformará a notação de Leibniz para a derivada dy/dx em uma verdadeira razão. Usaremos dy para estimar o erro da medida e a sensibilidade de uma função à variação. A aplicação dessas idéias vai nos dar, então, uma prova precisa da regra da cadeia (Seção 3.5).

Linearização

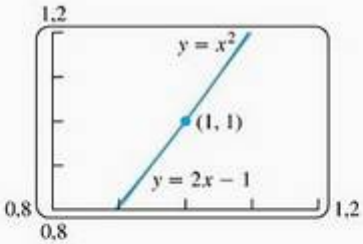
Como você pode ver na Figura 3.56, a tangente à curva $y = x^2$ fica perto da curva próximo ao ponto de tangência. Em um pequeno intervalo, de cada lado do ponto, os valores de y ao longo da tangente fornecem boas aproximações para os valores de y na curva. Observamos esse fenômeno ampliando os dois gráficos no ponto de tangência ou analisando as tabelas com valores da diferença entre $f(x)$ e sua reta tangente próximo à abscissa do ponto de tangência. Localmente, toda curva derivável se comporta como uma reta.



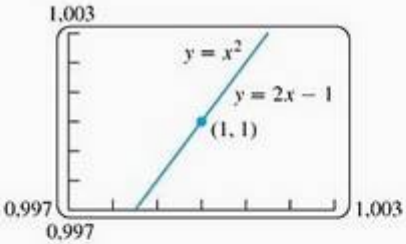
$y = x^2$ e sua tangente $y = 2x - 1$ em (1, 1).



A tangente e a curva bem próximas, perto de (1, 1).



A tangente e a curva muito próximas ao longo de todo o intervalo x apresentado.



A tangente e a curva ainda mais próximas. A tela do computador não consegue distinguir a tangente da curva nesse intervalo de x.

FIGURA 3.56 Quanto mais ampliamos o gráfico de uma função próximo a um ponto onde a função é derivável, mais "reto" o gráfico se torna e mais se assemelha à sua tangente.

Em geral, a tangente a $y = f(x)$ no ponto $x = a$, onde f é derivável (Figura 3.57) passa pelo ponto $(a, f(a))$, então sua equação é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

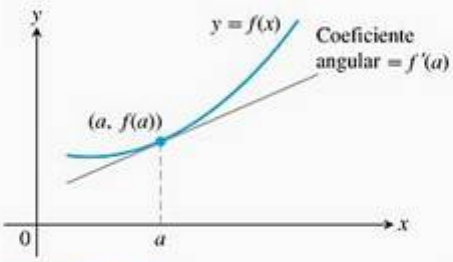


FIGURA 3.57 A tangente à curva $y = f(x)$ em $x = a$ é a reta $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Assim, essa reta tangente é o gráfico da função linear

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Enquanto essa reta permanecer próximo ao gráfico de f, $L(x)$ fornecerá uma boa aproximação de $f(x)$.

Definições **Linearização, aproximação linear padrão**
Se f é derivável em $x = a$, então a função aproximação

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é a **linearização** de f em a. A aproximação

$$f(x) \approx L(x)$$

de f por L é a **aproximação linear padrão** de f em a. O ponto $x = a$ é o **centro** da aproximação.

EXEMPLO 1 Determinando uma linearização

Determine a linearização de $f(x) = \sqrt{1+x}$ quando $x = 0$ (Figura 3.58).

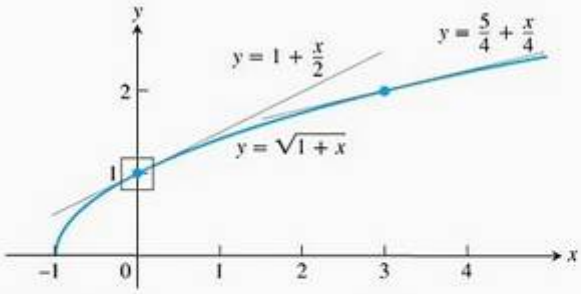


FIGURA 3.58 O gráfico de $y = \sqrt{1+x}$ e sua linearização quando $x = 0$ e $x = 3$. A Figura 3.59 apresenta uma vista ampliada na região destacada ao redor de 1, no eixo y.

SOLUÇÃO Como

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + x\right)^{-1/2}$$

temos que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1/2$, o que leva à linearização

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}\left(x - 0\right) = 1 + \frac{x}{2}$$

Veja a Figura 3.59.

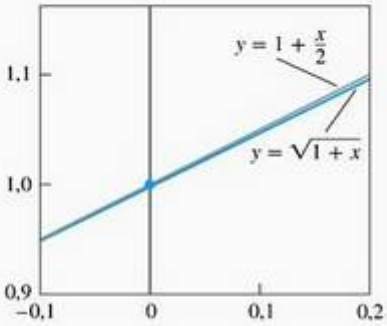


FIGURA 3.59 Vista ampliada da janela da Figura 3.58.

Observe como a aproximação $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ do Exemplo 1 é precisa para valores de x próximos de zero. Conforme nos afastamos de zero, perdemos a precisão. Por exemplo, para $x = 2$, a linearização fornece 2 como a aproximação de $\sqrt{3}$, que não é exata nem para uma única casa decimal.

Aproximação	Valor real	Valor real − aproximação
$\sqrt{1{,}2} \approx 1 + \frac{0{,}2}{2} = 1{,}10$	1,095445	$<10^{-2}$
$\sqrt{1{,}05} \approx 1 + \frac{0{,}05}{2} = 1{,}025$	1,024695	$<10^{-3}$
$\sqrt{1{,}005} \approx 1 + \frac{0{,}005}{2} = 1{,}00250$	1,002497	$<10^{-5}$

Não se deixe iludir pelos cálculos anteriores, pensando que qualquer coisa feita por meio da linearização será melhor se for feita com uma calculadora. Na prática, nunca utilizaríamos a linearização para determinar uma raiz quadrada. A utilidade da linearização está em sua capacidade de substituir fórmulas complicadas por uma mais simples ao longo de um intervalo de valores. Se precisássemos trabalhar com $\sqrt{1+x}$ para x próximo a 0 e pudéssemos tolerar o pequeno erro envolvido, em vez disso, poderíamos trabalhar com $1 + (x/2)$. Obviamente, precisamos saber qual o tamanho do erro. Falaremos mais sobre estimativa de erro no Capítulo 11, Volume II.

Uma aproximação linear normalmente perde a precisão longe de seu centro. Como a Figura 3.58 sugere, a aproximação $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ provavelmente é imprecisa para ser usada próximo a $x = 3$. Nessa região, precisamos saber a linearização quando $x = 3$.

EXEMPLO 2 Determinando uma linearização em outro ponto

Determine a linearização de $f(x) = \sqrt{1+x}$ quando $x = 3$.

SOLUÇÃO Calculamos a equação definindo $L(x)$ em $a = 3$. Com

$$f(3) = 2, \qquad f'(3) = \frac{1}{2}\left(1 + x\right)^{-1/2}\Big|_{x=3} = \frac{1}{4}$$

temos que

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}$$

Quando $x = 3{,}2$, a linearização do Exemplo 2 fornece

$$\sqrt{1 + x} = \sqrt{1 + 3{,}2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3{,}2}{4} = 1{,}250 + 0{,}800 = 2{,}050$$

que difere do valor real $\sqrt{4{,}2} \approx 2{,}04939$ em menos de um milésimo. A linearização do Exemplo 1 fornece

$$\sqrt{1 + x} = \sqrt{1 + 3{,}2} \approx 1 + \frac{3{,}2}{2} = 1 + 1{,}6 = 2{,}6$$

um resultado que está errado em mais de 25%.

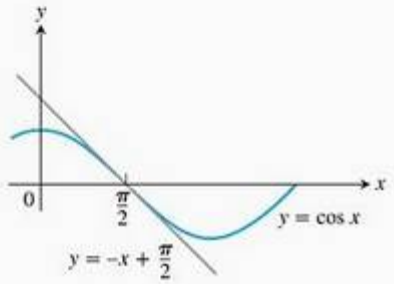


FIGURA 3.60 O gráfico de $f(x) = \cos x$ e sua linearização quando $x = \pi/2$. Próximo a $x = \pi/2$, $\cos x \approx -x + (\pi/2)$ (Exemplo 3).

EXEMPLO 3 Determinando uma linearização para a função cosseno

Determine a linearização de $f(x) = \cos x$ quando $x = \pi/2$ (Figura 3.60).

SOLUÇÃO Como $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, $f'(x) = -\text{sen } x$, e $f'(\pi/2) = -\text{sen}(\pi/2) = -1$, temos

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) \\ &= 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -x + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Uma aproximação linear importante para raízes e potências é

$$(1 + x)^k \approx 1 + kx \quad (x \text{ próximo de } 0, \text{ sendo } k \text{ qualquer número})$$

(Exercício 15). Essa aproximação, boa para valores de x suficientemente próximos de zero, tem uma vasta aplicação. Por exemplo, quando x é pequeno,

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad k = 1/2$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x \qquad k = -1;\ \text{substituindo } x \text{ por } -x.$$

$$\sqrt[3]{1+5x^4} = (1+5x^4)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}\left(5x^4\right) = 1 + \frac{5}{3}x^4 \qquad k = 1/3;\ \text{substituindo } x \text{ por } 5x^4$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad k = -1/2 \text{ substituindo } x \text{ por } -x^2.$$

Diferenciais

Às vezes, usamos a notação de Leibniz dy/dx para representar a derivada de y em relação a x. Ao contrário do que parece, não se trata de uma razão. Agora, introduziremos duas novas variáveis dx e dy com a propriedade de que, caso a razão exista, esta será igual à derivada.

Definição Diferencial

Seja $y = f(x)$ uma função derivável. A **diferencial** $\boldsymbol{dx}$ é uma variável independente. A **diferencial** $\boldsymbol{dy}$ é

$$dy = f'(x)\,dx$$

Ao contrário da variável independente dx, a variável dy é sempre dependente. Ela depende tanto de x quanto de dx. Se atribuímos a dx um valor específico e x é um número particular no domínio da função f, então o valor numérico de dy é determinado.

EXEMPLO 4 Determinando a diferencial dy

(a) Determine dy se $y = x^5 + 37x$.

(b) Determine o valor de dy quando $x = 1$ e $dx = 0{,}2$.

SOLUÇÃO

(a) $dy = (5x^4 + 37)\,dx$

(b) Substituindo $x = 1$ e $dx = 0{,}2$ na expressão de dy, temos

$$dy = (5 \cdot 1^4 + 37)0{,}2 = 8{,}4$$

O significado geométrico das diferenciais é mostrado na Figura 3.61. Seja $x = a$ e estabeleçamos $dx = \Delta x$. A variação correspondente em $y = f(x)$ é

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a)$$

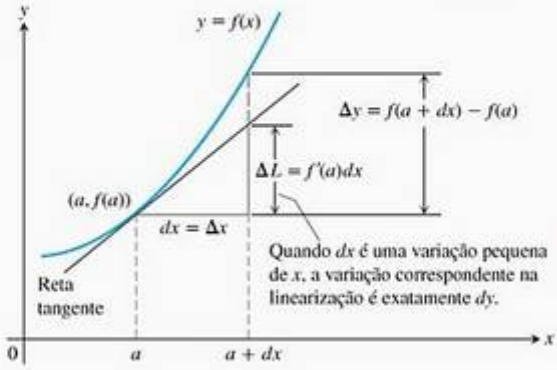


FIGURA 3.61 Geometricamente, a diferencial dy é a variação ΔL na linearização de f quando $x = a$ varia em uma quantidade $dx = \Delta x$.

A variação correspondente em L é

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(a + dx) - L(a)\\ &= \underbrace{f(a) + f'(a)[(a + dx) - a]}_{L(a + dx)} - \underbrace{f(a)}_{L(a)}\\ &= f'(a)\,dx\end{aligned}$$

Ou seja, a variação da linearização de f equivale justamente ao valor da diferencial dy quando $x = a$ e $dx = \Delta x$. Portanto, dy representa a medida em que a reta tangente sobe ou desce quando x varia em uma quantidade $dx = \Delta x$.

Se $dx \neq 0$, então o quociente da diferencial dy pela diferencial dx é igual à derivada $f'(x)$, pois

$$dy \div dx = \frac{f'(x)\,dx}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Às vezes, escrevemos

$$df = f'(x)\,dx$$

em vez de $dy = f'(x)\,dx$, denominando df a **diferencial de f**. Por exemplo, se $f(x) = 3x^2 - 6$, então

$$df = d(3x^2 - 6) = 6x\,dx$$

Toda fórmula de diferenciação do tipo

$$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d(\operatorname{sen} u)}{dx} = \cos u\,\frac{du}{dx}$$

tem uma forma diferencial do tipo

$$d(u + v) = du + dv \qquad \text{ou} \qquad d(\operatorname{sen} u) = \cos u\,du$$

EXEMPLO 5 Determinando diferenciais de funções

(a) $d(\operatorname{tg} 2x) = \sec^2(2x)\,d(2x) = 2\sec^2 2x\,dx$

(b) $d\left(\dfrac{x}{x + 1}\right) = \dfrac{(x + 1)\,dx - x\,d(x + 1)}{(x + 1)^2} = \dfrac{x\,dx + dx - x\,dx}{(x + 1)^2} = \dfrac{dx}{(x + 1)^2}$

Estimando com diferenciais

Suponha que saibamos o valor de uma função derivável $f(x)$ em um ponto a e que queiramos prever a variação que esse valor sofrerá se formos para um ponto $a + dx$ próximo. Se dx for pequeno, observamos pela Figura 3.61 que Δy é aproximadamente igual à diferencial dy. Uma vez que

$$f(a + dx) = f(a) + \Delta y$$

a aproximação diferencial resulta em

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

onde $dx = \Delta x$. Assim, a aproximação $\Delta y \approx dy$ pode ser usada para calcular $f(a + dx)$ quando $f(a)$ é conhecido e dx é pequeno.

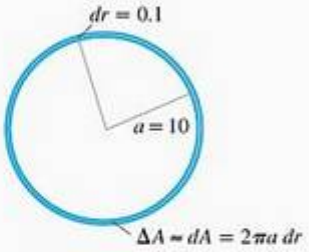


FIGURA 3.62 Quando dr é pequeno, comparado a a, como é quando $dr = 0{,}1$ e $a = 20$, a diferencial $dA = 2\pi a\, dr$ oferece uma maneira de estimar a área do círculo com raio $r = a + dr$ (Exemplo 6).

EXEMPLO 6 Estimando com diferenciais

O raio r de uma circunferência aumenta de $a = 10$ m para 10,1 m (Figura 3.62). Utilize dA para estimar o aumento na área A da circunferência. Estime a área do círculo aumentado e compare essa estimativa com a área real.

SOLUÇÃO Como $A = \pi r^2$, o aumento estimado é
$dA = A'(a)\, dr = 2\pi a\, dr = 2\pi(10)(0{,}1) = 2\pi \text{ m}^2$

Logo,

$$\begin{aligned} A(10 + 0{,}1) &\approx A(10) + 2\pi \\ &= \pi(10)^2 + 2\pi = 102\pi \end{aligned}$$

A área de um círculo de raio 10,1 m é de aproximadamente 102π m^2.
A verdadeira variação é

$$\begin{aligned} A(10{,}1) &= \pi(10{,}1)^2 \\ &= 102{,}01\pi \text{ m}^2 \end{aligned}$$

O erro em nossa estimativa é $0{,}01\pi$ m^2, que corresponde à diferença $\Delta A - dA$.

Erro na aproximação diferencial

Suponha que $f(x)$ seja uma função derivável em $x = a$ e que $dx = \Delta x$ seja um incremento de x. Há duas maneiras de descrever a variação de f à medida que x varia de a para $a + \Delta x$:

Variação real: $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$
Estimativa diferencial: $df = f'(a)\, \Delta x$

Em que medida df se sai bem aproximando Δf?

Medimos o erro da aproximação subtraindo df de Δf:

$$\begin{aligned} \text{Erro da aproximação} &= \Delta f - df \\ &= \Delta f - f'(a)\Delta x \\ &= \underbrace{f(a + \Delta x) - f(a)}_{\Delta f} - f'(a)\Delta x \\ &= \underbrace{\left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a)\right)}_{\text{Chame esta parte de } \epsilon} \cdot \Delta x \\ &= \epsilon \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Conforme $\Delta x \to 0$, a razão incremental

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

se aproxima de $f'(a)$ (lembre-se da definição de $f'(a)$), então a quantidade entre parênteses se torna um número muito pequeno (daí, a notação ϵ). Na verdade, $\epsilon \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. Quando Δx é pequeno, o erro de aproximação $\epsilon\, \Delta x$ é menor ainda.

$$\underbrace{\Delta f}_{\text{variação verdadeira}} = \underbrace{f'(a)\Delta x}_{\text{variação estimada}} + \underbrace{\epsilon\,\Delta x}_{\text{erro}}$$

Embora não saibamos exatamente a magnitude do erro (e não faremos muito progresso nesse aspecto até o Capítulo 11, no Volume II), há algo que vale a pena observar aqui, que é a *forma* assumida pela equação.

Variação de y = f(x) próximo de x = a

Se $y = f(x)$ é derivável quando $x = a$ e x varia de a para $a + \Delta x$, então a variação Δy de f é dada por uma equação na forma

$$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x \qquad (1)$$

na qual $\epsilon \to 0$ à medida que $\Delta x \to 0$.

No Exemplo 6, descobrimos que

$$\Delta A = \pi(10{,}1)^2 - \pi(10)^2 = (102{,}01 - 100)\pi = (\underbrace{2\pi}_{dA} + \underbrace{0{,}01\pi}_{\text{erro}})\ \text{m}^2$$

Logo, o erro de aproximação é $\Delta A - dA = \epsilon\,\Delta r = 0{,}01\pi$ e $\epsilon = 0{,}001\pi/\Delta r = 0{,}01\pi/0{,}1 = 0{,}1\pi$ m.

A Equação (1) nos permite levar a prova da regra da cadeia a uma conclusão bem-sucedida.

PROVA DA REGRA DA CADEIA Nosso objetivo é mostrar que, se $f(u)$ é uma função derivável de u, e $u = g(x)$ é uma função derivável de x, então a função composta $y = f(g(x))$ é uma função derivável de x.

Mais precisamente, se g é derivável em x_0 e f é derivável em $g(x_0)$, então a composta é derivável em x_0 e

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Seja Δx um incremento de x, e Δu e Δy os incrementos correspondentes em u e y. Aplicando a Equação (1), temos

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1\,\Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

onde $\epsilon_1 \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. De modo similar,

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2\,\Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u$$

onde $\epsilon_2 \to 0$ conforme $\Delta u \to 0$. Observe também que $\Delta u \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. Combinando as equações para Δu e Δy, temos

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

logo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2\,g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1$$

Como ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero conforme Δx tende a zero, três dos quatro termos da direita desaparecem no limite, restando

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Isso conclui a prova.

Sensibilidade à variação

A equação $df = f'(x)\,dx$ nos mostra o quanto o valor de f é *sensível* a uma variação de x. Quanto maior o valor de f' em x, maior é o efeito de uma determinada variação dx. Conforme nos deslocamos de a para um ponto $a + dx$ próximo, podemos descrever a variação de f de três maneiras:

	Real	Estimada
Variação absoluta	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a)\,dx$
Variação relativa	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
Variação percentual	$\dfrac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(a)} \times 100$

Angiografia

Um corante opaco é injetado em uma artéria parcialmente obstruída para tornar o interior visível aos raios X. Isso revela a localização e a gravidade da obstrução.

Angioplastia

Um cateter com um balão na extremidade é inflado no interior da artéria para alargá-la no local da obstrução.

EXEMPLO 7 Determinando a profundidade de um poço

Você deseja calcular a profundidade de um poço a partir da equação $s = 4{,}9t^2$ determinando quanto tempo leva para uma pedra pesada que você derruba da entrada do poço encontrar a água no fundo deste. Qual será a sensibilidade de seus cálculos a um erro de 0,1 s na medição do tempo?

SOLUÇÃO O tamanho de ds na equação

$$ds = 9{,}8t\,dt$$

depende do tamanho de t. Se $t = 2$ s, a variação causada por $dt = 0{,}1$ é de cerca de

$$ds = 9{,}8(2)(0{,}1) = 1{,}96 \text{ m}$$

Três segundos depois, quando $t = 5$ s, a variação causada pelo mesmo dt é

$$ds = 9{,}8(5)(0{,}1) = 4{,}9 \text{ m}$$

A profundidade estimada do poço difere da real por uma distância maior quanto maior for o tempo que a pedra leva para atingir a água, para dado erro na medição do tempo.

EXEMPLO 8 Desobstruindo artérias

No final da década de 1830, o fisiologista francês Jean Poiseuille descobriu a fórmula que hoje empregamos para predizer quanto o raio de uma artéria obstruída necessita ser expandido para que o fluxo normal de sangue seja restabelecido. Sua fórmula

$$V = kr^4$$

diz que o volume V de líquido correndo por um pequeno vaso ou tubo por unidade de tempo, sob pressão constante, é uma constante multiplicada pela quarta potência do raio r do duto. Como é que um aumento de 10% em r afeta V?

SOLUÇÃO As diferenciais de r e V estão relacionadas pela equação

$$dV = \frac{dV}{dr}\,dr = 4kr^3\,dr$$

A variação relativa de V é

$$\frac{dV}{V} = \frac{4kr^3\,dr}{kr^4} = 4\frac{dr}{r}$$

A variação relativa de V é quatro vezes a variação relativa de r, portanto um aumento de 10% em r acarretará um aumento de 40% no fluxo.

EXEMPLO 9 Convertendo massa em energia

A segunda lei de Newton,

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} = ma$$

vale desde que admitamos que a massa seja constante, mas sabemos que isso não é estritamente verdadeiro, pois a massa de um corpo aumenta com a velocidade. Na fórmula corrigida de Einstein, a massa possui o valor

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde a "massa de repouso" m_0 representa a massa de um corpo que não está se deslocando e c é a velocidade da luz, cerca de 300.000 km/s. Use a aproximação

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad (2)$$

para estimar o aumento Δm na massa resultante do aumento na velocidade v.

SOLUÇÃO Quando v é muito pequena comparada a c, a razão v^2/c^2 está próxima de zero e é seguro utilizar a aproximação

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \quad \text{Equação (2) com } x = \frac{v}{c}$$

para obter

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

ou

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right) \qquad (3)$$

A Equação (3) expressa o aumento da massa que resulta do acréscimo de velocidade v.

INTERPRETAÇÃO ENERGÉTICA Na física newtoniana, $(1/2)m_0v^2$ é a energia cinética (Ec) do corpo, e, se reescrevemos a Equação (3) na forma

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2$$

vemos que

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0v^2 - \frac{1}{2}m_0(0)^2 = \Delta(\text{Ec})$$

ou

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{Ec})$$

Em outras palavras, a variação da energia cinética $\Delta(\text{Ec})$ ao se variar a velocidade de 0 para a velocidade v é aproximadamente igual a $(\Delta m)c^2$, a variação da massa multiplicada pelo quadrado da velocidade da luz. Usando $c \approx 3 \times 10^8$ m/s, vemos que uma pequena variação da massa pode causar uma grande variação da energia.

Exercícios 3.10

Determinando linearizações

Nos exercícios 1–5, determine a linearização $L(x)$ de $f(x)$ quando $x = a$.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad a = 2$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad a = -4$
3. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad a = 1$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$
5. $f(x) = \text{tg}\, x, \quad a = \pi$

6. **Aproximações lineares comuns quando $x = 0$** Determine as linearizações das seguintes funções quando $x = 0$.

(a) $\text{sen}\, x$ (b) $\cos x$ (c) $\text{tg}\, x$

(d) e^x (e) $\ln(1 + x)$

Linearização para aproximar

Você está em busca de linearizações capazes de substituir as funções dos exercícios 7–14 dentro de intervalos que incluam os pontos dados x_0. Para facilitar seu trabalho, escolha linearizações cujo centro não esteja em $x = a$, mas em um valor próximo no qual a função e sua derivada sejam fáceis de calcular. Qual linearização você usaria em cada caso?

7. $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 0{,}1$
8. $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0{,}9$
9. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -0{,}9$
10. $f(x) = 1 + x, \quad x_0 = 8{,}1$
11. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 8{,}5$
12. $f(x) = \frac{x}{x + 1}, \quad x_0 = 1{,}3$
13. $f(x) = e^{-x}, \quad x_0 = -0{,}1$
14. $f(x) = \text{sen}^{-1} x, \quad x_0 = \pi/12$

Aproximação $(1 + x)^k \approx 1 + kx$

15. Mostre que a linearização de $f(x) = (1 + x)^k$ em $x = 0$ é $L(x) = 1 + kx$.

16. Use a aproximação linear $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ para determinar uma aproximação da função $f(x)$ para valores de x próximos a zero.

(a) $f(x) = (1 - x)^6$ (b) $f(x) = \frac{2}{1 - x}$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x}}$ (d) $f(x) = \sqrt{2 + x^2}$

(e) $f(x) = (4 + 3x)^{1/3}$ (f) $f(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{2 + x}\right)^2}$

17. **Mais rápido que uma calculadora** Use a aproximação $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ para estimar

(a) $(1{,}0002)^{50}$ (b) $\sqrt[3]{1.009}$

18. Determine a linearização de $f(x) = \sqrt{x + 1} + \text{sen}\, x$ quando $x = 0$. Como ela está relacionada com as linearizações individuais de $\sqrt{x + 1}$ e de $\text{sen}\, x$ quando $x = 0$?

Derivadas na forma diferencial

Nos exercícios 19–38 determine dy.

19. $y = x^3 - 3\sqrt{x}$
20. $y = x\sqrt{1 - x^2}$
21. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$
22. $y = \frac{2\sqrt{x}}{3(1 + \sqrt{x})}$
23. $2y^{3/2} + xy - x = 0$
24. $xy^2 - 4x^{3/2} - y = 0$
25. $y = \text{sen}\,(5\sqrt{x})$
26. $y = \cos(x^2)$
27. $y = 4\,\text{tg}\,(x^3/3)$
28. $y = \sec(x^2 - 1)$
29. $y = 3\,\text{cosec}\,(1 - 2\sqrt{x})$
30. $y = 2\,\text{cotg}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
31. $y = e^{\sqrt{x}}$
32. $y = xe^{-x}$
33. $y = \ln(1 + x^2)$
34. $y = \ln\left(\frac{x + 1}{\sqrt{x - 1}}\right)$
35. $y = \text{tg}^{-1}(e^{x^2})$
36. $y = \text{cotg}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right) + \cos^{-1} 2x$
37. $y = \sec^{-1}(e^{-x})$
38. $y = e^{\text{tg}^{-1}\sqrt{x^2+1}}$

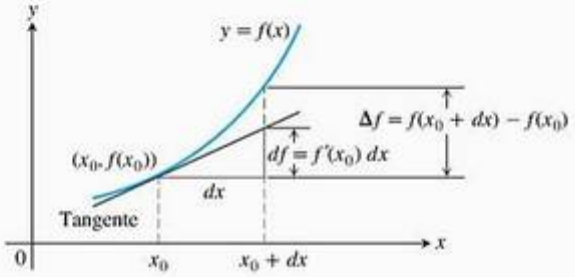
Erro de aproximação

Nos exercícios 39–44, o valor de cada função $f(x)$ varia quando x varia de x_0 para $x_0 + dx$. Determine

(a) a variação $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$;

(b) o valor da estimativa $df = f'(x_0)\,dx$;

(c) o erro de aproximação $|\Delta f - df|$.



39. $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 0, \quad dx = 0{,}1$

40. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -1, \quad dx = 0{,}1$

41. $f(x) = x^3 - x, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0{,}1$

42. $f(x) = x^4, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0{,}1$

43. $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0{,}5, \quad dx = 0{,}1$

44. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad x_0 = 2, \quad dx = 0{,}1$

Estimativas diferenciais de variação

Nos exercícios 45–50, escreva uma fórmula diferencial que permita estimar a variação dada do volume ou da área da superfície.

45. A variação do volume $V = (4/3)\pi r^3$ de uma esfera quando o raio varia de r_0 para $r_0 + dr$.

46. A variação do volume $V = x^3$ de um cubo quando o comprimento das arestas varia de x_0 para $x_0 + dx$.

47. A variação na área da superfície $S = 6x^2$ de um cubo quando o comprimento das arestas varia de x_0 para $x_0 + dx$.

48. A variação na área da superfície lateral $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ de um cone circular reto quando o raio varia de r_0 para $r_0 + dr$ e a altura permanece a mesma.

49. A variação do volume $V = \pi r^2 h$ de um cilindro circular reto quando o raio varia de r_0 para $r_0 + dr$ e a altura permanece a mesma.

50. A variação na área da superfície lateral $S = 2\pi rh$ de um cilindro circular reto quando a altura varia de h_0 para $h_0 + dh$ e o raio permanece o mesmo.

Aplicações

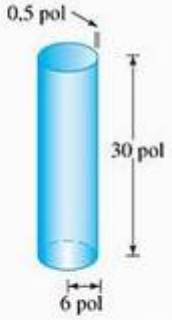
51. O raio de uma circunferência aumentou de 2 m para 2,02 m.

(a) Estime a variação resultante na área.

(b) Expresse a estimativa como uma porcentagem da área inicial da circunferência.

52. O diâmetro de uma árvore era 10 pol. Durante o ano seguinte, a circunferência aumentou 2 pol. Quanto variou aproximadamente o diâmetro da árvore? E a área da seção transversal?

53. **Estimando o volume** Estime o volume de material presente em uma embalagem cilíndrica de 30 pol de altura, 6 pol de raio e 0,5 pol de espessura.



54. **Estimando a altura de um edifício** Um agrimensor a 30 pés da base de um edifício mede o ângulo de elevação até o topo do edifício como 75°. Que exatidão deve apresentar a medição desse ângulo para que o erro percentual na estimativa da altura do edifício seja inferior a 4%?

55. **Tolerância** A altura e o raio de um cilindro reto são iguais, de modo que o volume desse cilindro é dado por $V = \pi h^3$. O volume deve ser calculado com erro não maior que 1% em relação ao valor real. Determine aproximadamente o maior erro que pode ser tolerado na medida de h, expressando-o como porcentagem de h.

56. **Tolerância**

(a) Aproximadamente que exatidão deve ter a medição do diâmetro interno de um tanque cilíndrico de armazenagem com 10 m de altura para que o cálculo de seu volume fique *a* 1% do valor real?

(b) Aproximadamente que exatidão deve ter a medição do diâmetro externo desse tanque para que o cálculo da quantidade de tinta para pintar sua parede fique a no máximo 5% da quantidade real?

57. **Cunhando moedas** Uma empresa foi contratada para cunhar moedas para o governo federal. Que variação dr pode ser tolerada no raio r das moedas para que o peso das moedas não exceda 1/1.000 do peso ideal? Suponha que não haja variação da espessura das moedas.

58. **Lucro** O lucro P de certo fabricante, ao vender x itens, é

$$P(x) = 200xe^{-x/400}$$

Estime a variação e a variação percentual conforme as vendas aumentam de $x = 145$ para $x = 150$ itens.

59. **Efeito das manobras de vôo sobre o coração** A quantidade de trabalho realizado pela principal câmara de bombeamento do coração, o ventrículo esquerdo, é dada pela equação

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

onde W é o trabalho por unidade de tempo, P é a pressão arterial média, V é o volume de sangue bombeado por unidade de tempo, δ ("delta") é a densidade do sangue, v é a velocidade média do sangue ejetado e g é a aceleração da gravidade.

Quando P, V, δ e v permanecem constantes, W se torna uma função de g e a equação toma a forma de

$$W = a + \frac{b}{g} \quad (a, b \text{ constantes})$$

Como membro da equipe médica da Nasa, você quer saber qual é a sensibilidade de W às variações aparentes de g causadas pelas manobras de vôo, e isso depende do valor inicial de g. Como parte de seu estudo, você decide comparar o efeito em W causado por dada variação dg na superfície da Lua, onde $g = 5{,}2$ pés/s^2, com o efeito que a mesma variação dg teria na Terra, onde $g = 32$ pés/s^2. Utilize a equação simplificada para determinar a razão dW_{Lua} sobre dW_{Terra}.

60. **Medindo a aceleração da gravidade** Quando o comprimento L do pêndulo de um relógio é mantido constante, controlando-se a temperatura, o período T do pêndulo depende da aceleração g da gravidade. Portanto, o período variará ligeiramente à medida que o relógio for deslocado para diferentes posições na superfície da Terra, dependendo das variações de g. Acompanhando-se as variações de ΔT, podemos estimar a variação de g pela equação $T = 2\pi(L/g)^{1/2}$ que relaciona T, g e L.

(a) Mantendo-se L constante e sendo g a variável independente, calcule dT e use-o para responder aos itens (b) e (c).

(b) Se g aumenta, T vai aumentar ou diminuir? Um relógio de pêndulo adiantará ou atrasará? Explique.

(c) Um relógio cujo pêndulo mede 100 cm é deslocado de um lugar (onde $g = 980$ cm/s^2) para outro. Isso aumenta o período em $dT = 0{,}001$ s. Determine dg e estime o valor de g nesse outro lugar.

61. Mede-se a aresta de um cubo em 10 cm com um erro de 1%. O volume do cubo será calculado a partir dessa medição. Estime o erro percentual no cálculo do volume.

62. Aproximadamente que exatidão deve ter a medição do lado de um quadrado para termos certeza de que o cálculo da área não se afastará mais de 2% do valor real?

63. Mede-se o diâmetro de uma esfera em 100 ± 1 cm e o volume é calculado a partir dessa medição. Estime o erro percentual no cálculo do volume.

64. Estime o erro percentual admissível na medição do diâmetro D de uma esfera se o volume pode ser calculado corretamente com uma margem de erro de 3%.

65. *(Continuação do Exemplo 7.)* Mostre que um erro de 5% na medição de t causará um erro de cerca de 10% no cálculo de s a partir da equação $s = 16t^2$.

66. *(Continuação do Exemplo 8.)* Em qual percentual r deveria ser aumentado para aumentar V em 50%?

Teoria e exemplos

67. Mostre que a aproximação de $\sqrt{1+x}$ por sua linearização na origem deve melhorar à medida que $x \to 0$, mostrando que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{1+(x/2)} = 1$$

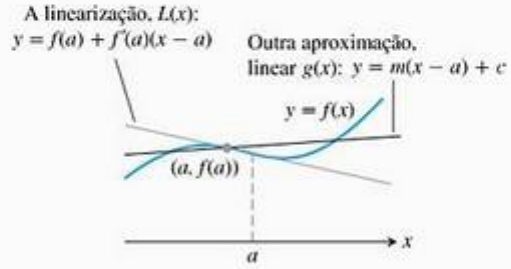
68. Mostre que a aproximação de tg x por sua linearização na origem deve melhorar à medida que $x \to 0$, mostrando que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

69. **A linearização é a melhor aproximação linear** (Por isso utilizamos a linearização.) Suponha que $y = f(x)$ seja derivável quando $x = a$ e que $g(x) = m(x - a) + c$ seja uma função linear em que m e c são constantes. Se o erro $E(x) = f(x) - g(x)$ for suficientemente pequeno perto de $x = a$, poderemos pensar em utilizar g como aproximação linear de f em vez da linearização $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Demonstre que se impusermos a g as condições

1. $E(a) = 0$ — O erro de aproximação é nulo quando $x = a$.
2. $\lim_{x\to a} \frac{E(x)}{x - a} = 0$ — O erro é desprezível quando comparado com $x - a$

então $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Assim, a linearização $L(x)$ fornece a única aproximação cujo erro é zero para $x = a$, sendo ainda desprezível em relação a $x - a$.



70. Aproximações quadráticas

(a) Seja $Q(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2$ uma aproximação quadrática de $f(x)$ quando $x = a$ com as seguintes propriedades:

i. $Q(a) = f(a)$

ii. $Q'(a) = f'(a)$

iii. $Q''(a) = f''(a)$

Determine os coeficientes b_0, b_1 e b_2.

(b) Determine a aproximação quadrática de $f(x) = 1/(1 - x)$ quando $x = 0$.

(c) T Esboce o gráfico de $f(x) = 1/(1 - x)$ e sua aproximação quadrática quando $x = 0$. Depois, amplie os dois gráficos no ponto (0, 1). Comente o que você observa.

(d) T Determine a aproximação quadrática de $g(x) = 1/x$ em $x = 1$. Trace juntamente os gráficos de g e de sua aproximação quadrática. Comente o que você observa.

(e) T Determine a aproximação quadrática de $h(x) = \sqrt{1 + x}$ quando $x = 0$. Trace juntamente os gráficos de h e de sua aproximação quadrática. Comente o que você observa.

(f) Quais são as linearizações de f, g e h nos respectivos pontos dos itens (b), (d) e (e)?

71. A linearização de 2^x

(a) Determine a linearização de $f(x) = 2^x$ quando $x = 0$. Depois, arredonde seus coeficientes para duas casas decimais.

(b) T Trace juntamente os gráficos da linearização e da função para $-3 \le x \le 3$ e $-1 \le x \le 1$.

72. A linearização de $\log_3 x$

(a) Determine a linearização de $f(x) = \log_3 x$ quando $x = 3$. Depois, arredonde seus coeficientes para duas casas decimais.

(b) T Trace juntamente os gráficos da linearização e da função para $0 \le x \le 8$ e $2 \le x \le 4$.

73. Lendo as derivadas a partir dos gráficos A idéia de que curvas deriváveis tornam-se retas quando ampliadas pode ser utilizada para estimar o valor das derivadas dessas funções em alguns pontos específicos. Ampliamos a curva até que a porção observada se assemelhe a uma reta no ponto em questão; depois, usamos a escala das coordenadas na tela para determinar a inclinação da curva como a inclinação da reta à qual esta se assemelha.

(a) Para ver como o processo funciona, tente fazê-lo primeiro com a função $y = x^2$ quando $x = 1$. O coeficiente angular obtido deve ser 2.

(b) Depois, tente fazê-lo com a curva $y = e^x$ quando $x = 1$, $x = 0$ e $x = -1$. Em cada caso, compare sua estimativa da derivada com o valor de e^x em cada ponto. Que padrão você pode observar? Teste isso usando outros valores de x. No Capítulo 7, vamos explicar o que está acontecendo.

74. Suponha que o gráfico de uma função derivável $f(x)$ tenha uma tangente horizontal em $x = a$. Podemos dizer algo sobre a linearização de f quando $x = a$? Justifique sua resposta.

75. À qual velocidade relativa um corpo em repouso deve ser acelerado para que sua massa aumente em 1%?

76. Radiciação repetida

(a) T Digite "2" em sua calculadora e extraia sucessivas raízes quadradas pressionando repetidamente a tecla correspondente (ou elevando o número apresentado a 0,5). Que padrão você vê surgindo? Explique o que está acontecendo. O que vai acontecer se, em vez disso, você tirar sucessivas raízes décimas?

(b) Repita o procedimento com 0,5, em vez de 2, como valor inicial. O que acontece agora? Você poderia utilizar qualquer número positivo x, em vez de 2? Explique o que está acontecendo.

77. Ampliando a imagem para "ver" se uma função é derivável T Alguma destas funções é derivável quando $x = 0$?

$$f(x) = |x| + 1, \qquad g(x) = \sqrt{x^2 + 0{,}0001} + 0{,}99$$

(a) Já sabemos que f não é derivável quando $x = 0$; seu gráfico apresenta um vértice nesse ponto. Esboce o gráfico de f e amplie a imagem no ponto (0, 1) várias vezes. O vértice mostra sinais de que vai se tornar linear?

(b) Agora faça o mesmo com g. O gráfico de g mostra sinais de que vai se tornar linear? Sabemos que g é derivável quando $x = 0$ e, de fato, possui uma tangente horizontal nesse ponto.

(c) Quantas ampliações foram necessárias para que o gráfico de g se parecesse exatamente com uma reta horizontal?

(d) Agora, trace o gráfico de f *juntamente* com o de g em uma janela normal. Eles parecem idênticos até que você use o "Zoom". A função derivável acaba por se assemelhar a uma reta, enquanto a função não derivável permanece inalterada.

78. Esboçando a variação do volume de um cubo O volume $V = x^3$ de um cubo com arestas de comprimento x aumenta em uma quantidade ΔV quando x aumenta em uma quantidade Δx. Faça um esboço para mostrar como representar ΔV geometricamente como a soma dos volumes de

(a) três placas de dimensões x por x por Δx

(b) três barras de dimensões x por Δx por Δx

(c) um cubo de dimensões Δx por Δx por Δx.

A fórmula diferencial $dV = 3x^2\,dx$ estima a variação em V com as três placas.

USANDO O COMPUTADOR

Comparando funções com as suas linearizações

Nos exercícios 79–84, utilize um SAC para estimar a magnitude do erro no uso da linearização, em lugar da função ao longo de um intervalo I determinado. Siga os passos indicados.

(a) Esboce o gráfico da função f ao longo de I.

(b) Determine a linearização L da função no ponto a.

(c) Trace os gráficos de f e L juntos em um mesmo gráfico.

(d) Trace o erro absoluto $|f(x) - L(x)|$ ao longo de I, determinando seu valor máximo.

(e) A partir do gráfico do item (d), estime o maior $\delta > 0$ que você conseguir que satisfaça

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L(x)| < \epsilon$$

para $\epsilon = 0{,}5$; $0{,}1$, e $0{,}01$. Verifique graficamente se a estimativa de δ continua verdadeira.

79. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x, \quad [-1, 2], \quad a = 1$

80. $f(x) = \dfrac{x-1}{4x^2+1}, \quad \left[-\dfrac{3}{4}, 1\right], \quad a = \dfrac{1}{2}$

81. $f(x) = x^{2/3}(x-2), \quad [-2, 3], \quad a = 2$

82. $f(x) = \sqrt{x} - \operatorname{sen} x, \quad [0, 2\pi], \quad a = 2$

83. $f(x) = x2^x, \quad [0, 2], \quad a = 1$

84. $f(x) = \sqrt{x}\operatorname{sen}^{-1} x, \quad [0, 1], \quad a = \dfrac{1}{2}$

Questões de revisão

1. O que é a derivada de uma função f? Como seu domínio está relacionado com o domínio da função f? Dê exemplos.
2. Que papel a derivada tem na definição de coeficientes angulares, tangentes e taxas de variação?
3. Às vezes, como você pode fazer o gráfico da derivada da função quando tudo o que tem é uma tabela com os valores da função?
4. O que significa uma função ser derivável em um intervalo aberto? E em um intervalo fechado?
5. Como as derivadas estão relacionadas com as derivadas laterais?
6. Descreva geometricamente quando uma função *não* tem derivada em um ponto.
7. O fato de uma função ser derivável em um ponto está relacionado com a continuidade da função nesse ponto? Como?
8. A função salto unitário

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

poderia ser a derivada de outra função em $[-1, 1]$? Explique.

9. Que regras você conhece para calcular derivadas? Cite alguns exemplos.
10. Explique como as três fórmulas

(a) $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (b) $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$

(c) $\dfrac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \dfrac{du_1}{dx} + \dfrac{du_2}{dx} + \cdots + \dfrac{du_n}{dx}$

nos permitem derivar qualquer polinômio.

11. Além das três fórmulas apresentadas no Exercício 10, de que mais precisamos para derivar funções racionais?
12. O que é uma segunda derivada? E uma terceira derivada? Quantas derivadas têm as funções que você conhece? Cite exemplos.
13. Qual é a derivada da função exponencial e^x? Compare o domínio dessa derivada com o domínio da função.
14. Qual é a relação entre taxa de variação instantânea e média? Dê um exemplo.
15. Como as derivadas aparecem no estudo do movimento? O que você pode aprender sobre o movimento de um corpo ao longo de uma reta, examinando as derivadas da função posição do corpo? Dê exemplos.
16. Como as derivadas surgem em economia?
17. Dê exemplos de outras aplicações da derivada.
18. Como os limites $\lim_{h\to 0}(\operatorname{sen} h)/h$ e $\lim_{h\to 0}((\cos h - 1)/h)$ estão relacionados com as derivadas das funções seno e cosseno? Quais são as derivadas dessas funções?

19. Agora que você conhece as derivadas de sen x e cos x, como encontraria as derivadas de tg x, cotg x, sec x e cosec x? Quais *são* as derivadas dessas funções?

20. Em quais pontos as seis funções trigonométricas básicas são contínuas? Como você sabe?

21. Qual é a regra para calcular a derivada de duas funções deriváveis compostas? Como uma derivada desse tipo é calculada? Dê exemplos.

22. Qual é a fórmula para o coeficiente angular dy/dx de uma curva parametrizada $x = f(t)$, $y = g(t)$? Quando a fórmula se aplica? Quando você espera poder encontrar também d^2y/dx^2? Dê exemplos.

23. Se u é uma função derivável de x, como você determinaria $(d/dx)(u^n)$ se n fosse um inteiro? E se fosse um número racional? Dê exemplos.

24. O que é derivação implícita? Quando ela é necessária? Dê exemplos.

25. Qual é a derivada da função logaritmo natural ln x? Compare o domínio dessa derivada com o domínio da função.

26. Qual é a derivada da função exponencial a^x, $a > 0$ e $a \neq 1$? Qual é o significado geométrico do limite de $(a^h - 1)/h$ quando $h \to 0$? Qual é esse limite quando a é o número e?

27. Qual é a derivada de $\log_a x$? Há alguma restrição para a?

28. O que é derivação logarítmica? Exemplifique.

29. Como você poderia escrever qualquer potência real de x como uma potência de e? Há restrições para x? Como isso leva à regra para derivar potências reais arbitrárias?

30. Qual é a única maneira de expressar o número especial e como um limite? Cite um valor numérico aproximado de e que seja correto para sete casas decimais.

31. Quais são as derivadas de funções trigonométricas inversas? Compare os domínios das derivadas com os domínios das funções.

32. Quando surgem problemas de taxas relacionadas? Dê exemplos.

33. Delineie uma estratégia para resolver problemas de taxas relacionadas. Ilustre com um exemplo.

34. O que é a linearização $L(x)$ de uma função $f(x)$ no ponto $x = a$? O que é necessário que f apresente em a para que a linearização exista? Como as linearizações são usadas? Exemplifique.

35. Se o valor de x se desloca de a para um valor próximo de $a + dx$, como estimamos a variação correspondente no valor da função derivável $f(x)$? Como estimamos a variação relativa? E a percentual? Exemplifique.

Exercícios práticos

Derivadas de funções

Encontre as derivadas das funções nos exercícios 1–64.

1. $y = x^5 - 0{,}125x^2 + 0{,}25x$
2. $y = 3 - 0{,}7x^3 + 0{,}3x^7$
3. $y = x^3 - 3(x^2 + \pi^2)$
4. $y = x^7 + \sqrt{7}x - \dfrac{1}{\pi + 1}$
5. $y = (x + 1)^2(x^2 + 2x)$
6. $y = (2x - 5)(4 - x)^{-1}$
7. $y = (\theta^2 + \sec\theta + 1)^3$
8. $y = \left(-1 - \dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{2} - \dfrac{\theta^2}{4}\right)^2$
9. $s = \dfrac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}$
10. $s = \dfrac{1}{\sqrt{t} - 1}$
11. $y = 2\operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x$
12. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{2}{\operatorname{sen} x}$
13. $s = \cos^4(1 - 2t)$
14. $s = \operatorname{cotg}^3\left(\dfrac{2}{t}\right)$
15. $s = (\sec t + \operatorname{tg} t)^5$
16. $s = \operatorname{cosec}^5(1 - t + 3t^2)$
17. $r = \sqrt{2\theta \operatorname{sen}\theta}$
18. $r = 2\theta\sqrt{\cos\theta}$
19. $r = \operatorname{sen}\sqrt{2\theta}$
20. $r = \operatorname{sen}\left(\theta + \sqrt{\theta + 1}\right)$
21. $y = \dfrac{1}{2}x^2 \operatorname{cosec}\dfrac{2}{x}$
22. $y = 2\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}$
23. $y = x^{-1/2}\sec(2x)^2$
24. $y = \sqrt{x}\operatorname{cosec}(x + 1)^3$
25. $y = 5\operatorname{cotg} x^2$
26. $y = x^2 \operatorname{cotg} 5x$
27. $y = x^2 \operatorname{sen}^2(2x^2)$
28. $y = x^{-2}\operatorname{sen}^2(x^3)$
29. $s = \left(\dfrac{4t}{t + 1}\right)^{-2}$
30. $s = \dfrac{-1}{15(15t - 1)^3}$
31. $y = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{1 + x}\right)^2$
32. $y = \left(\dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}\right)^2$
33. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x}{x^2}}$
34. $y = 4x\sqrt{x + \sqrt{x}}$
35. $r = \left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - 1}\right)^2$
36. $r = \left(\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}\right)^2$
37. $y = (2x + 1)\sqrt{2x + 1}$
38. $y = 20(3x - 4)^{1/4}(3x - 4)^{-1/5}$
39. $y = \dfrac{3}{(5x^2 + \operatorname{sen} 2x)^{3/2}}$
40. $y = (3 + \cos^3 3x)^{-1/3}$
41. $y = 10e^{-x/5}$
42. $y = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x}$
43. $y = \dfrac{1}{4}xe^{4x} - \dfrac{1}{16}e^{4x}$
44. $y = x^2e^{-2/x}$
45. $y = \ln(\operatorname{sen}^2\theta)$
46. $y = \ln(\sec^2\theta)$

47. $y = \log_2(x^2/2)$
48. $y = \log_5(3x - 7)$
49. $y = 8^{-t}$
50. $y = 9^{2t}$
51. $y = 5x^{3,6}$
52. $y = \sqrt{2}x^{-\sqrt{2}}$
53. $y = (x + 2)^{x+2}$
54. $y = 2(\ln x)^{x/2}$
55. $y = \text{sen}^{-1}\sqrt{1 - u^2}, \quad 0 < u < 1$
56. $y = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right), \quad v > 1$
57. $y = \ln \cos^{-1} x$
58. $y = z\cos^{-1} z - \sqrt{1 - z^2}$
59. $y = t\,\text{tg}^{-1} t - \frac{1}{2}\ln t$
60. $y = (1 + t^2)\,\text{cotg}^{-1} 2t$
61. $y = z\sec^{-1} z - \sqrt{z^2 - 1}, \quad z > 1$
62. $y = 2\sqrt{x - 1}\,\sec^{-1}\sqrt{x}$
63. $y = \text{cosec}^{-1}(\sec\theta), \quad 0 < \theta < \pi/2$
64. $y = (1 + x^2)e^{\text{tg}^{-1}x}$

Derivação implícita

Nos exercícios 65–78, determine dy/dx por meio da derivação implícita.

65. $xy + 2x + 3y = 1$
66. $x^2 + xy + y^2 - 5x = 2$
67. $x^3 + 4xy - 3y^{4/3} = 2x$
68. $5x^{4/5} + 10y^{6/5} = 15$
69. $\sqrt{xy} = 1$
70. $x^2y^2 = 1$
71. $y^2 = \frac{x}{x + 1}$
72. $y^2 = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$
73. $e^{x+2y} = 1$
74. $y^2 = 2e^{-1/x}$
75. $\ln(x/y) = 1$
76. $x\,\text{sen}^{-1} y = 1 + x^2$
77. $ye^{\text{tg}^{-1}x} = 2$
78. $x^y = \sqrt{2}$

Nos exercícios 79 e 80, determine dp/dq.

79. $p^3 + 4pq - 3q^2 = 2$
80. $q = (5p^2 + 2p)^{-3/2}$

Nos exercícios 81 e 82, determine dr/ds.

81. $r\cos 2s + \text{sen}^2 s = \pi$
82. $2rs - r - s + s^2 = -3$
83. Determine d^2y/dx^2 por derivação implícita:
    (a) $x^3 + y^3 = 1$
    (b) $y^2 = 1 - \frac{2}{x}$
84. (a) Derivando $x^2 - y^2 = 1$ implicitamente, mostre que $dy/dx = x/y$.
    (b) Depois mostre que $d^2y/dx^2 = -1/y^3$

Valores numéricos de derivadas

85. Suponha que as funções $f(x)$ e $g(x)$ e suas primeiras derivadas tenham os valores a seguir em $x = 0$ e $x = 1$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	−3	1/2
1	3	5	1/2	−4

Encontre os valores das primeiras derivadas das combinações a seguir nos valores dados de x.

(a) $6f(x) - g(x), \quad x = 1$
(b) $f(x)g^2(x), \quad x = 0$
(c) $\frac{f(x)}{g(x)+1}, \quad x = 1$
(d) $f(g(x)), \quad x = 0$
(e) $g(f(x)), \quad x = 0$
(f) $(x + f(x))^{3/2}, \quad x = 1$
(g) $f(x + g(x)), \quad x = 0$

86. Suponha que a função $f(x)$ e sua primeira derivada tenham os valores a seguir em $x = 0$ e $x = 1$.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	9	−2
1	−3	1/5

Encontre as primeiras derivadas das combinações a seguir nos valores dados de x.

(a) $\sqrt{x}\,f(x), \quad x = 1$
(b) $\sqrt{f(x)}, \quad x = 0$
(c) $f(\sqrt{x}), \quad x = 1$
(d) $f(1 - 5\,\text{tg}\,x), \quad x = 0$
(e) $\frac{f(x)}{2 + \cos x}, \quad x = 0$
(f) $10\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) f^2(x), \quad x = 1$

87. Encontre o valor de dy/dt em $t = 0$, se $y = 3\,\text{sen}\,2x$ e $x = t^2 + \pi$.
88. Encontre o valor de ds/du em $u = 2$, se $s = t^2 + 5t$ e $t = (u^2 + 2u)^{1/3}$.
89. Encontre o valor de dw/ds em $s = 0$, se $w = \text{sen}\left(e^{\sqrt{r}}\right)$ e $r = 3\,\text{sen}\,(s + \pi/6)$.
90. Encontre o valor de dr/dt em $t = 0$, se $r = (\theta^2 + 7)^{1/3}$ e $\theta^2e^t + \theta = 1$.
91. Se $y^3 + y = 2\cos x$, encontre o valor d^2y/dx^2 no ponto $(0, 1)$.
92. Se $x^{1/3} + y^{1/3} = 4$, encontre d^2y/dx^2 no ponto $(8, 8)$.

Definição de derivada

Nos exercícios 93 e 94, encontre a derivada usando a definição.

93. $f(t) = \frac{1}{2t + 1}$
94. $g(x) = 2x^2 + 1$
95. (a) Faça o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0 \\ -x^2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

(b) f é contínua em $x = 0$?

(c) f é derivável em $x = 0$?

Justifique suas respostas.

96. (a) Faça o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0 \\ \operatorname{tg} x, & 0 \le x \le \pi/4 \end{cases}$$

(b) f é contínua em $x = 0$?

(c) f é derivável em $x = 0$?

Justifique suas respostas.

97. (a) Faça o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

(b) f é contínua em $x = 1$?

(c) f é derivável em $x = 1$?

Justifique suas respostas.

98. Para qual valor ou valores da constante m, se houver, a função

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} 2x, & x \le 0 \\ mx, & x > 0 \end{cases}$$

(a) é contínua em $x = 0$?

(b) é derivável em $x = 0$?

Justifique suas respostas.

Coeficientes angulares, tangentes e normais

99. Tangentes com coeficientes angulares especificados Há algum ponto na curva $y = (x/2) + 1/(2x - 4)$ onde o coeficiente angular seja $-3/2$? Se houver, encontre-o.

100. Tangentes com coeficientes angulares especificados Há algum ponto na curva $y = x - e^{-x}$ onde o coeficiente angular seja 2? Se houver, encontre-o.

101. Tangentes horizontais Determine os pontos na curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ onde a tangente é paralela ao eixo x.

102. Pontos de interseção de tangentes Encontre os pontos de interseção dos eixos x e y com a reta que é tangente à curva $y = x^3$ no ponto $(-2, -8)$.

103. Tangentes perpendiculares ou paralelas a retas Encontre os pontos à curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ onde a tangente é

(a) perpendicular à reta $y = 1 - (x/24)$

(b) paralela à reta $y = \sqrt{2} - 12x$.

104. Interseção de tangentes Mostre que as tangentes à curva $y = (\pi \operatorname{sen} x)/x$ em $x = \pi$ e $x = -\pi$ se enterseptam, formando ângulos retos.

105. Normais paralelas a uma reta Encontre os pontos na curva $y = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ nos quais a normal é paralela à reta $y = -x/2$. Esboce a curva e as normais juntas, identificando cada uma com sua respectiva equação.

106. Retas tangentes e normais Encontre equações para a tangente e a normal à curva $y = 1 + \cos x$ no ponto $(\pi/2, 1)$. Esboce a curva, a tangente e a normal juntas, identificando cada uma com sua respectiva equação.

107. Parábola tangente A parábola $y = x^2 + C$ deve ser tangente à reta $y = x$. Encontre C.

108. Coeficiente angular da tangente Mostre que a tangente à curva $y = x^3$ em qualquer ponto (a, a^3) intercepta a curva novamente em um ponto em que o coeficiente angular é quatro vezes o coeficiente angular em (a, a^3).

109. Curva tangente Para qual valor de c a curva $y = c/(x + 1)$ é tangente à reta nos pontos $(0, 3)$ e $(5, -2)$?

110. Normal a um círculo Mostre que a reta normal a qualquer ponto do círculo $x^2 + y^2 = a^2$ passa pela origem.

Tangentes e normais de curvas definidas implicitamente

Nos exercícios 111–116, encontre as equações para as retas que são tangentes e normais à curva no ponto dado.

111. $x^2 + 2y^2 = 9$, $(1, 2)$

112. $e^x + y^2 = 2$, $(0, 1)$

113. $xy + 2x - 5y = 2$, $(3, 2)$

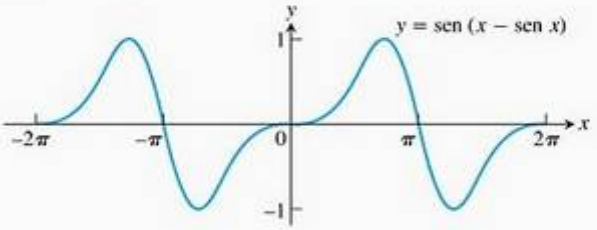
114. $(y - x)^2 = 2x + 4$, $(6, 2)$

115. $x + \sqrt{xy} = 6$, $(4, 1)$

116. $x^{3/2} + 2y^{3/2} = 17$, $(1, 4)$

117. Encontre o coeficiente angular da curva $x^3y^3 + y^2 = x + y$ nos pontos $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

118. O gráfico apresentado sugere que a curva $y = \operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)$ tem tangentes horizontais no eixo x. Isso ocorre? Justifique sua resposta.



Tangentes às curvas parametrizadas

Nos exercícios 119 e 120, encontre uma equação para a reta no plano xy que tangencia a curva no ponto correspondente ao valor dado de t. Determine também o valor de d^2y/dx^2 nesse ponto.

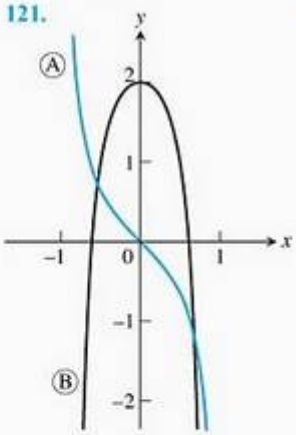
119. $x = (1/2)\,\text{tg}, \quad y = (1/2)\sec t, \quad t = \pi/3$

120. $x = 1 + 1/t^2, \quad y = 1 - 3/t, \quad t = 2$

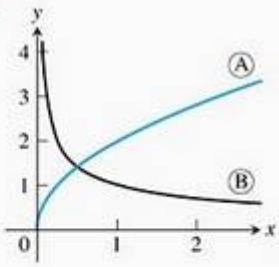
Analisando gráficos

Nos exercícios 121 e 122, cada uma das figuras mostra dois gráficos, o de uma função $y = f(x)$ e de sua derivada $f'(x)$. Identifique cada um. Como você sabe?

121.



122.

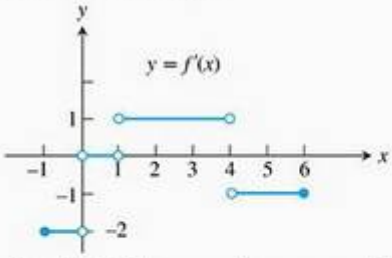


123. Use as informações a seguir para fazer o gráfico da função $y = f(x)$ para $-1 \le x \le 6$.

i. O gráfico de f é formado por segmentos de reta unidos pelas extremidades.

ii. O gráfico tem início no ponto $(-1, 2)$.

iii. A derivada de f, onde é definida, corresponde à função escada mostrada aqui.

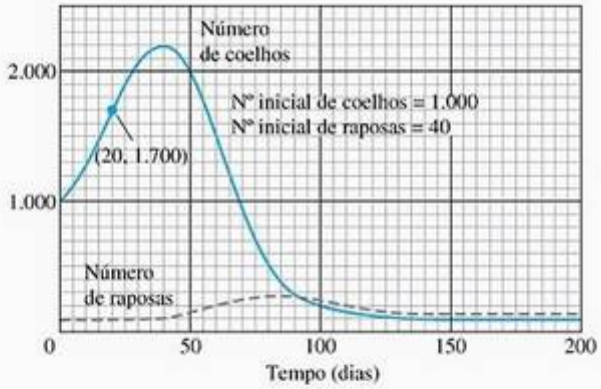


124. Repita o Exercício 123, supondo que o gráfico comece em $(-1, 0)$ em vez de $(-1, 2)$.

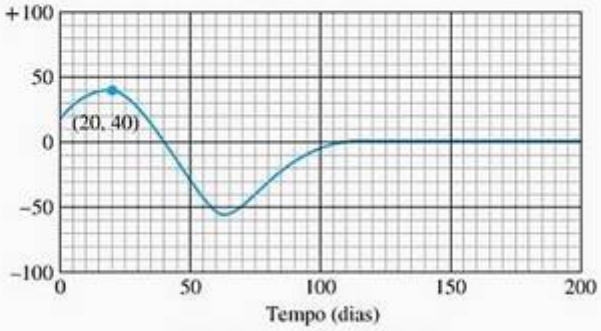
Os exercícios 125 e 126 estão relacionados com os gráficos da Figura 3.63 (coluna da direita). Os do item **(a)** mostram o número de coelhos e de raposas em uma pequena população ártica, traçados em função do tempo durante 200 dias. Inicialmente o número de coelhos cresceu devido à sua reprodução. Mas as raposas caçam os coelhos e, como o número de raposas cresceu, o nível de coelhos estagnou e depois caiu. A Figura 3.63b mostra o gráfico da derivada da população de coelhos, construído com o registro dos coeficientes angulares.

125. (a) Qual é o valor da derivada da população de coelhos, na Figura 3.63, quando o número de coelhos é máximo? E mínimo?

(b) Qual é o tamanho da população de coelhos na Figura 3.63, quando sua derivada é máxima? E mínima (valor negativo)?



(a)



Derivada da população de coelhos

(b)

FIGURA 3.63 Coelhos e raposas da cadeia alimentar predador-presa no ártico.

126. Em que unidades os coeficientes angulares das curvas das populações de coelhos e raposas deveriam ser medidos?

Limites trigonométricos

127. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{2x^2 - x}$

128. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x - \text{tg}\, 7x}{2x}$

129. $\displaystyle\lim_{r\to 0} \frac{\text{sen}\, r}{\text{tg}\, 2r}$

130. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}\,(\text{sen}\,\theta)}{\theta}$

131. $\displaystyle\lim_{\theta\to(\pi/2)^-} \frac{4\,\text{tg}^2\theta + \text{tg}\,\theta + 1}{\text{tg}^2\theta + 5}$

132. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0^+} \frac{1 - 2\,\text{cotg}^2\theta}{5\,\text{cotg}^2\theta - 7\,\text{cotg}\,\theta - 8}$

133. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\,\text{sen}\, x}{2 - 2\cos x}$

134. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2}$

Mostre como estender as funções dos exercícios 135 e 136 para que sejam contínuas na origem.

135. $g(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}$ **136.** $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}$

Derivação logarítmica

Nos exercícios 137–142, use a derivação logarítmica para determinar a derivada de y em relação à variável apropriada.

137. $y = \dfrac{2(x^2+1)}{\sqrt{\cos 2x}}$ **138.** $y = \sqrt[10]{\dfrac{3x+4}{2x-4}}$

139. $y = \left(\dfrac{(t+1)(t-1)}{(t-2)(t+3)}\right)^5, \quad t > 2$

140. $y = \dfrac{2u2^u}{\sqrt{u^2+1}}$

141. $y = (\operatorname{sen}\theta)^{\sqrt{\theta}}$ **142.** $y = (\ln x)^{1/(\ln x)}$

Taxas relacionadas

143. Cilindro circular reto A área total da superfície S de um cilindro circular reto está relacionada com o raio da base r e a altura h pela equação $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

(a) Como dS/dt está relacionada com dr/dt, se h é constante?

(b) Como dS/dt está relacionada com dh/dt, se r é constante?

(c) Como dS/dt está relacionada com dr/dt e dh/dt, se nem r nem h são constantes?

(d) Como dr/dt está relacionada com dh/dt, se S é constante?

144. Cone circular reto A área da superfície lateral S de um cone circular reto está relacionada com o raio da base r e a altura h pela equação $S = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$.

(a) Como dS/dt está relacionada com dr/dt, se h é constante?

(b) Como dS/dt está relacionada com dh/dt, se r é constante?

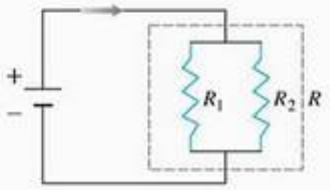
(c) Como dS/dt está relacionada com dr/dt, e dh/dt, se nem r nem h são constantes?

145. Variação na área de um círculo O raio de um círculo varia a uma taxa de $-2/\pi$ m/s. A que taxa a área do círculo varia, quando $r = 10$ m?

146. Variação nas arestas de um cubo O volume de um cubo aumenta a uma taxa de 1.200 cm³/min no instante em que suas arestas têm 20 cm de comprimento. A que taxa os comprimentos das arestas variam nesse momento?

147. Resistências conectadas em paralelo Se duas resistências com R_1 e R_2 ohms estão conectadas em paralelo em um circuito elétrico, resultando em uma resistência com R ohms, o valor de R será dado pela equação

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



Se R_1 diminui a uma taxa de 1 ohm/s e R_2 aumenta a uma taxa de 0,5 ohm/s, a que taxa R varia quando $R_1 = 75$ ohms e $R_2 = 50$ ohms?

148. Impedância de um circuito em série A impedância Z (ohms) de um circuito em série está relacionada com a resistência R (ohms) e a reatância X (ohms) pela equação $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$. Se R aumenta a 3 ohms/s e X diminui a 2 ohms/s, a que taxa Z varia quando $R = 10$ ohms e $X = 20$ ohms?

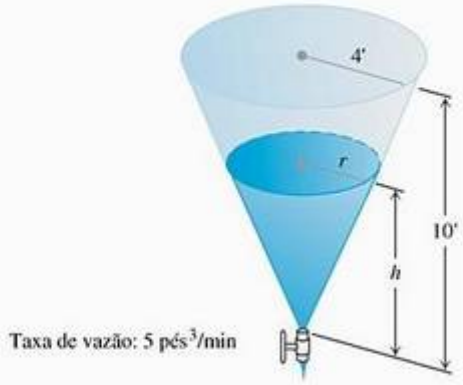
149. Velocidade de uma partícula em movimento As coordenadas de uma partícula que se desloca no plano xy são funções deriváveis do tempo t, com $dx/dt = 10$ m/s e $dy/dt = 5$ m/s. A que velocidade a partícula se afasta da origem ao passar pelo ponto $(3, -4)$?

150. Movimento de uma partícula Uma partícula desloca-se ao longo da curva $y = x^{3/2}$ no primeiro quadrante, de modo que sua distância em relação à origem aumenta a uma taxa de 11 unidades por segundo. Determine dx/dt, quando $x = 3$.

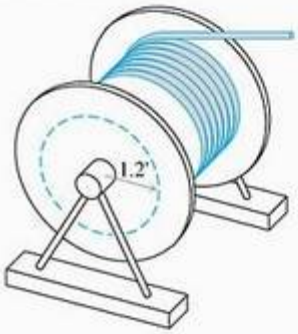
151. Drenando um tanque A água escoa do tanque cônico apresentado na figura a seguir a uma vazão de 5 pés³/min.

(a) Qual a relação entre as variáveis h e r da figura?

(b) A que taxa o nível da água diminui, quando $h = 6$ pés?



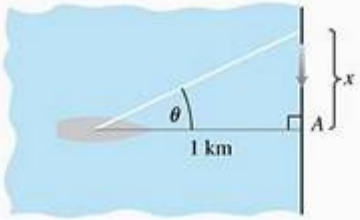
152. Carretel para cabos Um cabo de televisão é puxado de um grande carretel para ser colocado nos postes telefônicos da rua. Ele é desenrolado do carretel, onde está disposto em camadas de raio constante (veja a figura a seguir), e o caminhão que o puxa desloca-se a uma velocidade constante de 6 pés/s (pouco mais de 4 mi/h). Use a equação $s = r\theta$ para determinar a que taxa (em radianos por segundo) o carretel gira, quando a camada de raio 1,2 pé está sendo desenrolada.



153. Movimento do raio de luz de um farol A figura mostra um barco a 1 km de distância da praia, varrendo a costa com um farolete. Este gira a uma taxa constante de $d\theta/dt = -0{,}6$ rad/s.

(a) A que taxa o ponto iluminado se desloca na costa quando a luz atinge o ponto A?

(b) Quantas voltas por minuto equivalem a 0,6 rad/s?



154. Movimento ao longo dos eixos cartesianos Os pontos A e B deslocam-se respectivamente ao longo dos eixos x e y, de modo que a distância r (em metros) ao longo da perpendicular, da origem à reta AB, é constante. A que taxa OA varia quando $OB = 2r$ e B se desloca em direção a O a uma taxa de $0{,}3r$ m/s? OA está aumentando ou diminuindo?

Linearização

155. Determine as linearizações de

(a) $\operatorname{tg} x$ quando $x = -\pi/4$ (b) $\sec x$ quando $x = -\pi/4$.

Trace juntas as curvas e as linearizações.

156. Podemos obter uma aproximação linear útil da função $f(x) = 1/(1 + \operatorname{tg} x)$ em $x = 0$ combinando as aproximações

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tg} x \approx x$$

obtendo

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg} x} \approx 1 - x$$

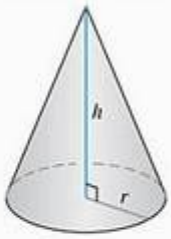
Demonstre que esse resultado é a aproximação linear padrão de $1/(1 + \operatorname{tg} x)$ em $x = 0$.

157. Determine a linearização de $f(x) = \sqrt{1+x} + \operatorname{sen} x - 0{,}5$ quando $x = 0$.

158. Determine a linearização de $f(x) = 2/(1 - x) + \sqrt{1+x} - 3{,}1$ quando $x = 0$.

Diferenciais para estimativas de variação

159. Área de superfície de um cone Escreva uma fórmula que estime a variação que ocorre na área da superfície lateral de um cone circular reto quando a altura varia de h_0 a $h_0 + dh$ e o raio não se altera.



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$
(Área da superfície lateral)

160. Controlando o erro

(a) Aproximadamente com que precisão se deve medir a aresta de um cubo para se estar razoavelmente seguro de calcular sua área da superfície dentro de uma margem de erro de 2%?

(b) Suponha que a aresta seja medida com a precisão necessária do item (a). Aproximadamente com que precisão se pode calcular o volume do cubo a partir da medida da aresta? Para descobrir, estime o erro percentual no cálculo do volume que poderia resultar do uso da medida da aresta.

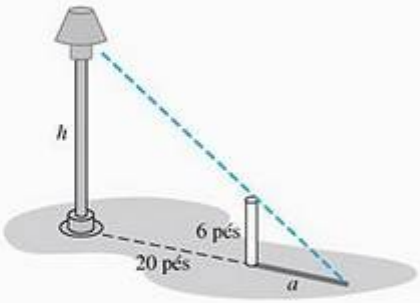
161. Erro composto Determinou-se que a circunferência do equador de uma esfera é 10 cm, com um possível erro de 0,4 cm. Essa medida é então usada para se calcular o raio. Este é depois usado para se calcular a área da superfície e o volume da esfera. Estime os erros percentuais nos valores calculados de

(a) raio.

(b) área da superfície.

(c) volume.

162. Determinando a altura Para determinar a altura de um poste para iluminação (veja a figura ao lado), você coloca em pé um mastro de 6 pés a 20 pés do poste e mede o comprimento a da sombra, que é 15 pés, com erro de mais ou menos uma polegada. Calcule a altura do poste usando $a = 15$ pés e estime o erro possível no resultado.



Exercícios adicionais

1. Uma equação como $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$ é chamada **identidade** porque vale para qualquer valor de θ. Uma equação como $\text{sen}\,\theta = 0{,}5$ não é uma identidade porque vale somente para valores selecionados de θ, e não todos. Se você derivar os dois membros de uma identidade trigonométrica em θ em relação a θ, terá como resultado uma nova equação que também é uma identidade.

   Derive as equações a seguir para mostrar que a equação resultante vale para qualquer valor de θ.

   (a) $\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

   (b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta$

2. Se a identidade $\text{sen}\,(x + a) = \text{sen}\,x\cos a + \cos x\,\text{sen}\,a$ for derivada em relação a x, a equação resultante será também uma identidade? Esse princípio se aplica à equação $x^2 - 2x - 8 = 0$? Explique.

3. (a) Encontre os valores das constantes a, b e c que farão

   $$f(x) = \cos x \qquad \text{e} \qquad g(x) = a + bx + cx^2$$

   satisfazer as condições

   $$f(0) = g(0), \qquad f'(0) = g'(0) \qquad \text{e} \qquad f''(0) = g''(0)$$

   (b) Encontre os valores para b e c que farão

   $$f(x) = \text{sen}\,(x + a) \qquad \text{e} \qquad g(x) = b\,\text{sen}\,x + c\cos x$$

   satisfazer as condições

   $$f(0) = g(0) \qquad \text{e} \qquad f'(0) = g'(0).$$

   (c) O que acontece com a terceira e a quarta derivada de f e g nos itens (a) e (b) para os valores determinados de a, b e c?

4. **Soluções para equações diferenciais**

   (a) Mostre que $y = \text{sen}\,x$, $y = \cos x$ e $y = a\cos x + b\,\text{sen}\,x$ (a e b constantes) satisfazem a equação

   $$y'' + y = 0$$

   (b) Como você modificaria a equação do item (a) para que ela satisfizesse a equação

   $$y'' + 4y = 0?$$

   Generalize o resultado.

5. **Um círculo osculador** Encontre os valores de h, k e a que fazem o círculo $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ ser tangente à parábola $y = x^2 + 1$ no ponto $(1, 2)$ e as segundas derivadas d^2y/dx^2 terem o mesmo valor para as duas curvas naquele ponto. Círculos como esse, tangentes à curva e com a segunda derivada igual à da curva no ponto de tangência, são chamados *círculos osculadores* (do latim *oscular*i, que significa "beijar"). Eles serão vistos novamente no Capítulo 13, Volume II.

6. **Rendimento marginal** Um ônibus transporta 60 pessoas. O número x de pessoas por viagem que tomam o ônibus está relacionado com o preço cobrado (p dólares) pela lei $p = [3 - (x/40)]^2$. Escreva uma expressão para o rendimento total $r(x)$ recebido por viagem pela companhia de ônibus. Qual é o número de pessoas por viagem que torna o rendimento marginal dr/dx nulo? Qual é o preço correspondente? (Esse preço é aquele que maximiza o rendimento, portanto a companhia deveria repensar sua política de preços.)

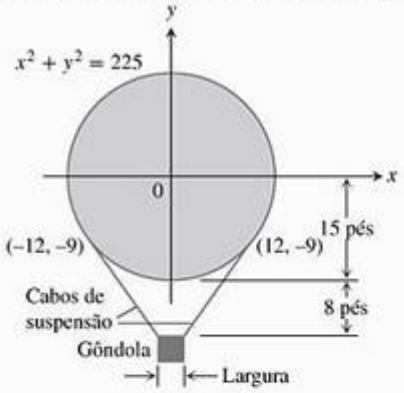
7. **Produção industrial**

   (a) Economistas freqüentemente usam o termo "taxa de crescimento" em termos relativos e não absolutos. Por exemplo, seja $u = f(t)$ no instante t o número de pessoas na linha de produção em dada indústria. (Tratamos essa função como se fosse derivável, mesmo sendo uma função escada de valores inteiros.)

   Seja $v = g(t)$ a produção média por pessoa no instante t. Portanto, a produção total é $y = uv$. Se a força de trabalho estiver crescendo a uma taxa de 4% ao ano ($du/dt = 0{,}04u$), e a produção por operário, a uma taxa de 5% ao ano ($dv/dt = 0{,}05v$), encontre a taxa de crescimento da produção total, y.

(b) Suponha que a força de trabalho do item (a) diminua a uma taxa de 2% ao ano, enquanto a produção por pessoa aumente 3% ao ano. A produção total está aumentando ou diminuindo? A que taxa?

8. **Projetando uma gôndola** O projetista de um balão esférico de ar quente com 30 pés de diâmetro quer suspender uma gôndola (que está 8 pés abaixo da parte inferior do balão) com cabos tangentes à superfície do balão, como mostra a figura a seguir. Podem-se ver dois cabos saindo das laterais superiores da gôndola e chegando aos pontos de tangência (–12, –9) e (12, –9). Qual deve ser a largura da gôndola?



FORA DE ESCALA

9. **De pára-quedas em Pisa** A fotografia mostra Mike McCarthy saltando de pára-quedas do topo da torre de Pisa em 5 de agosto de 1988. Faça um esboço para mostrar a forma do gráfico de sua velocidade durante a queda.

O londrino Mike McCarthy saltou da torre de Pisa e abriu o pára-quedas no que ele chamou de recorde mundial em salto de baixa altitude — 179 pés — com pára-quedas. (*Fonte: Boston Globe*, 6 ago. 1988.)

10. **Movimento de uma partícula** A posição de uma partícula no instante $t \geq 0$ que se desloca ao longo de uma reta coordenada é

$$s = 10 \cos (t + \pi/4)$$

(a) Qual é a posição inicial da partícula ($t = 0$)?

(b) Quais são os pontos mais distantes da origem, à direita e à esquerda, alcançados pela partícula?

(c) Calcule a velocidade e a aceleração da partícula nos pontos mencionados no item (b).

(d) Quando a partícula atinge a origem pela primeira vez? Quais são sua velocidade, o módulo de sua velocidade e a aceleração nesse momento?

11. **Atirando um clipe para papéis** Na Terra, você pode facilmente atirar um clipe a 64 pés de altura usando um elástico. Em t segundos, depois do disparo, o clipe estará $s = 64t - 16t^2$ pés acima de sua mão.

(a) Quanto tempo o clipe leva para atingir a altura máxima? A que velocidade ele sai de sua mão?

(b) Na Lua, a mesma aceleração permite lançar o clipe a uma altura de $s = 64t - 2{,}6t^2$ pés em t s. Quanto tempo o clipe levará para alcançar sua altura máxima e qual altura é essa?

12. **Velocidades de duas partículas** No instante t segundos, as posições de duas partículas em uma reta coordenada são dadas por $s_1 = 3t^3 - 12t^2 + 18t + 5$ m e $s_2 = -t^3 + 9t^2 - 12t$ m. Quando as partículas terão a mesma velocidade?

13. **Velocidade de uma partícula** Uma partícula de massa constante m desloca-se ao longo do eixo x. Sua velocidade v e a posição x satisfazem a equação

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}k(x_0^2 - x^2)$$

onde k, v_0 e x_0 são constantes. Mostre que se $v \neq 0$,

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

14. **Velocidades média e instantânea**

(a) Mostre que, se a posição x de um ponto em movimento é dada por uma função quadrática do tempo t, $x = At^2 + Bt + C$, então sua velocidade média em qualquer intervalo $[t_1, t_2]$ é igual à velocidade instantânea no ponto médio do intervalo de tempo.

(b) Qual é o significado geométrico do resultado do item (a)?

15. Encontre todos os valores das constantes m e b para os quais a função

$$y = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & x < \pi \\ mx + b, & x \geq \pi \end{cases}$$

é

(a) contínua em $x = \pi$.

(b) derivável em $x = \pi$.

16. A função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

tem derivada em $x = 0$? Explique.

17. (a) Para quais valores de a e b a função

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

é derivável para qualquer valor de x?

(b) Discuta a geometria do gráfico resultante de f.

18. (a) Para quais valores de a e b a função

$$g(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b, & x > -1 \end{cases}$$

é derivável para qualquer valor de x?

(b) Discuta a geometria do gráfico resultante de g.

19. **Funções ímpares deriváveis** Há algo especial na derivada de uma função ímpar derivável de x? Justifique sua resposta.

20. **Funções pares deriváveis** Há algo especial na derivada de uma função par derivável de x? Justifique sua resposta.

21. Suponha que as funções f e g sejam definidas em um intervalo aberto contendo o ponto x_0, que f seja derivável em x_0, que $f(x_0) = 0$ e que g seja contínua em x_0. Mostre que o produto fg é derivável em x_0. Esse processo mostra, por exemplo, que, embora $|x|$ não seja derivável em $x = 0$, o produto $x\,|x|$ é derivável em $x = 0$.

22. (*Continuação do Exercício 21.*) Use o resultado do Exercício 21 para mostrar que as funções a seguir são deriváveis em $x = 0$.

(a) $|x| \operatorname{sen} x$ (b) $x^{2/3} \operatorname{sen} x$ (c) $\sqrt[3]{x}(1 - \cos x$

(d) $h(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

23. A derivada de

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$? E a derivada de $k(x) = xh(x)$? Justifique suas respostas.

24. Suponha que uma função f satisfaça as seguintes condições para qualquer valor real de x e y:

i. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

ii. $f(x) = 1 + xg(x)$, onde $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$

Mostre que a derivada $f'(x)$ existe em qualquer valor de x e que $f'(x) = f(x)$.

25. **A regra do produto generalizada** Use a indução matemática para provar que, se $y = u_1 u_2 \cdots u_n$ é um produto finito de funções deriváveis, então y é derivável em seu domínio comum e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du_1}{dx} u_2 \cdots u_n + u_1 \frac{du_2}{dx} \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_{n-1} \frac{du_n}{dx}.$$

26. **Regra de Leibniz para derivadas de ordem superior de produtos** A regra de Leibniz para derivadas de ordem superior de produtos de funções deriváveis diz que

(a) $$\frac{d^2(uv)}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} v + 2 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + u \frac{d^2v}{dx^2}$$

(b) $$\frac{d^3(uv)}{dx^3} = \frac{d^3u}{dx^3} v + 3 \frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx} + 3 \frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + u \frac{d^3v}{dx^3}$$

(c) $$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = \frac{d^nu}{dx^n} v + n \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}\frac{d^kv}{dx^k} + \cdots + u \frac{d^nv}{dx^n}$$

As equações nos itens (a) e (b) são casos especiais da equação da item (c). Derive a equação do item (c) por indução matemática, usando

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \frac{m!}{k!(m-k)!} + \frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!}.$$

27. **O período do pêndulo de um relógio** O período T do pêndulo de um relógio (o tempo de uma oscilação completa, ida e volta) é dado pela fórmula $T^2 = 4\pi^2 L/g$, onde T é medido em segundos, $g = 32{,}2$ pés/s^2 e L é o comprimento do pêndulo, medido em pés. Determine, aproximadamente,

(a) o comprimento do pêndulo de um relógio cujo período é T = 1 s.

(b) a variação dT em T se o pêndulo do item (a) for alongado em 0,01 pé.

(c) quanto o relógio adianta ou atrasa por dia, como resultado da variação dT determinada no item (b).

28. **Derretimento de um cubo de gelo** Suponha que um cubo de gelo mantenha a forma cúbica enquanto derrete.

Se chamarmos o comprimento da aresta de s, seu volume será $V = s^3$ e a área da superfície, $6s^2$. Vamos supor que V e s sejam funções deriváveis do tempo t e que o volume do cubo diminua a uma taxa proporcional à sua área da superfície. (A última suposição parece razoável se lembrarmos que o derretimento ocorre na superfície: mudando a área da superfície, muda-se a quantidade de gelo exposta ao derretimento.) Em termos matemáticos,

$$\frac{dV}{dt} = -k(6s^2), \qquad k > 0.$$

O sinal negativo indica que o volume está diminuindo. Vamos supor que o fator de proporcionalidade k seja constante. (Provavelmente depende de vários fatores, como temperatura e umidade relativa do ar, presença ou ausência de luz solar etc.) Vamos supor um conjunto específico de condições nas quais o cubo perde 1/4 de seu volume durante a primeira hora, e que o volume é V_0 quando $t = 0$. Quanto tempo vai levar para o cubo de gelo derreter?

Exercícios avançados

1. Determine constantes reais a e b de modo que a função

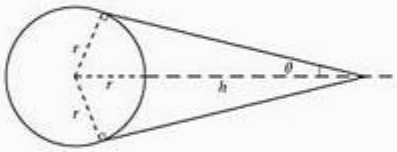
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}, & \text{se } -2 < x < 0 \\ ax + b, & \text{se } 0 \le x < 2 \end{cases}$$

seja derivável em $x = 0$.

2. A equação $\operatorname{sen}\left(\pi \dfrac{x^2 + y^2}{2}\right) \cdot \cos(\pi xy) = 0$ define y implicitamente como uma função derivável de x em uma vizinhança de $x = 1$, $y = 1$. Qual é a inclinação da reta tangente ao gráfico dessa função no ponto $x = 1$, $y = 1$?

As funções hiperbólicas, cosseno hiperbólico e seno hiperbólico, são definidas por $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ e serão mais estudadas no Capítulo 7.

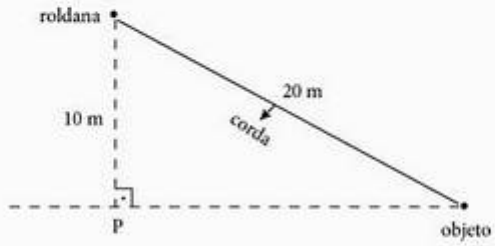
3. (a) Mostre que $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$ e que $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$.
   (b) Mostre que $a \operatorname{senh} x + b \cosh x$ satisfaz a equação diferencial $y'' - y = 0$. Que solução dessa equação satisfaz $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$? E $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$?
4. O seno hiperbólico tem uma inversa derivável nos reais, a função arco-seno hiperbólico, denotada por $\operatorname{senh}^{-1} x$, e o cosseno hiperbólico tem uma inversa derivável quando restrita aos reais estritamente positivos, a função arco-cosseno hiperbólico, denotada por $\cosh^{-1} x$. Mostre que $(\operatorname{senh}^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ e que $(\cosh^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$
5. Um cabo está preso a um círculo de raio r, conforme mostra a figura.



   (a) Mostre que $h = r(\operatorname{cossec} \theta - 1)$
   (b) Se $r = 1$, qual é a taxa de variação de h com relação a θ, quando $\theta = \dfrac{\pi}{6}$?

Nos exercícios 6–8, decida se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

6. Se f for uma função derivável par, então f' será ímpar e se f for uma função derivável ímpar, f' será par.
7. Se f for um polinômio de grau n, então sua derivada de ordem $n + 1$ será identicamente nula.
8. A derivada de ordem n de um polinômio de grau n nunca será uma função constante.
9. Uma função é periódica, de período T, se $f(x + T) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja f uma função periódica derivável, de período T.
   (a) A função f' é periódica? Justifique sua resposta.
   (b) Seja $g(x) = f(x/2)$. A função g' é periódica? De que período?
10. Mostre que a equação da reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ em um ponto (x_0, y_0) da elipse é $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$.
11. Determine a de modo que os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $(x - a)^2 + y^2 = 1$ se interceptem ortogonalmente (isto é, suas retas tangentes sejam perpendiculares nos pontos de interseção). Encontre também os pontos de interseção e as retas tangentes nesses pontos.
12. Um objeto pesado está sendo arrastado por uma corda presa a uma roldana a 10 metros do solo. Um motor puxa a corda com velocidade constante de 0,5 m/s. Qual a velocidade do objeto quando o comprimento da corda entre a roldana e o objeto for 20 m? O que ocorre com a velocidade do objeto quando ele se aproximar de P?



Projetos de aplicação de tecnologia

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Convergência de coeficientes angulares das secantes para a função derivada.

Você vai visualizar a secante entre pontos sucessivos em uma curva e observar o que ocorre quando a distância entre eles se torna pequena. A função, os pontos de amostra e as secantes são representados em um único gráfico, enquanto um segundo gráfico compara os coeficientes angulares das secantes com a função derivada.

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Derivadas, coeficientes angulares, tangentes e animação de gráficos.

Partes I–III. Você vai visualizar a derivada em um ponto, a linearização de uma função e a derivada de uma função. Também aprenderá a representar a função e as tangentes selecionadas no mesmo gráfico.

Parte IV (Representação de muitas tangentes)

Parte V (Animação de gráficos) As partes IV e V do módulo podem ser usadas para animar a tangente à medida que o observador se move ao longo do gráfico de uma função.

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Convergência de coeficientes angulares das secantes para a função derivada.

Você vai visualizar as derivadas laterais à esquerda e à direita.

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Movimento ao longo de uma reta: Posição → Velocidade → Aceleração

Observe impressionantes visualizações animadas das relações de derivação entre as funções de posição, velocidade e aceleração. As figuras do texto podem ser animadas.

4 Aplicações das derivadas

RESUMO Neste capítulo, estudaremos algumas das mais importantes aplicações das derivadas. Aprenderemos como usá-las para calcular valores extremos de funções, determinar e analisar o formato de gráficos, calcular limites de frações cujos numeradores e denominadores tendem a zero ou a infinito e determinar numericamente em que ponto uma função é igual a zero. Também examinaremos o processo de recuperação de uma função a partir de sua derivada. A chave para muitos desses procedimentos é o teorema do valor médio, cujos corolários fornecem o caminho para o cálculo integral, assunto do Capítulo 5.

4.1 Extremos de funções

Esta seção mostra como localizar e identificar valores extremos de uma função contínua a partir de sua derivada. Uma vez que tenhamos conseguido fazer isso, poderemos resolver uma série de *problemas de otimização*, nos quais encontramos a maneira ótima (a melhor maneira) de fazer algo em dada situação.

Definição Máximo absoluto, mínimo absoluto

Seja f uma função de domínio D. Então f tem um valor **máximo absoluto** em D em um ponto c se

$$f(x) \leq f(c) \qquad \text{para qualquer } x \text{ em } D.$$

e um valor **mínimo absoluto** em D no ponto c se

$$f(x) \geq f(c) \qquad \text{para qualquer } x \text{ em } D.$$

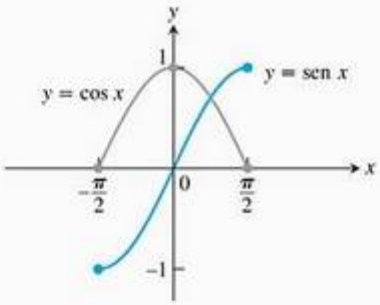


FIGURA 4.1 Extremos absolutos para as funções seno e cosseno no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Esses valores podem depender do domínio de uma função.

Máximos e mínimos absolutos são chamados **extremos** absolutos, também denominados de extremos **globais**, para diferenciar dos *extremos locais*, definidos a seguir.

Por exemplo, no intervalo fechado $[-\pi/2, \pi/2]$, a função $f(x) = \cos x$ assume o valor máximo 1 (uma vez) e o valor mínimo 0 (duas vezes). No mesmo intervalo, a função $g(x) = \text{sen } x$ assume o valor máximo 1 e o valor mínimo −1 (Figura 4.1).

Funções definidas pela mesma regra podem ter extremos diferentes, dependendo do domínio.

EXEMPLO 1 Explorando extremos absolutos

Os extremos absolutos das funções a seguir podem ser vistos na Figura 4.2.

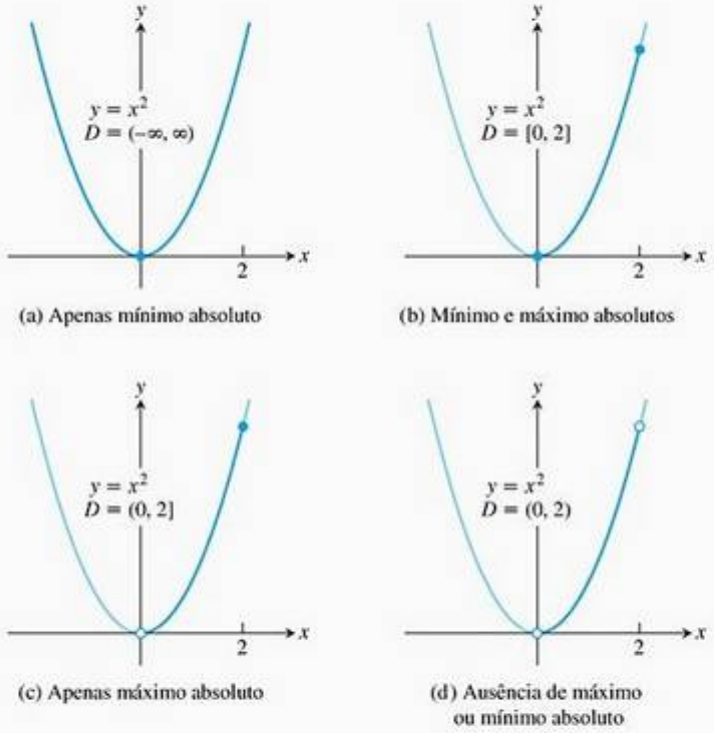


FIGURA 4.2 Os gráficos do Exemplo 1.

Função	Domínio D	Extremos absolutos em D
(a) $y = x^2$	$(-\infty,\infty)$	Ausência de máximo absoluto. Mínimo absoluto 0 quando $x = 0$.
(b) $y = x^2$	$[0,2]$	Máximo absoluto 4 quando $x = 2$. Mínimo absoluto 0 quando $x = 0$.
(c) $y = x^2$	$(0,2]$	Máximo absoluto 4 quando $x = 2$. Ausência de mínimo absoluto.
(d) $y = x^2$	$(0,2)$	Ausência de extremos absolutos.

Companion Website

Biografia histórica

Daniel Bernoulli (1700-1782)

Segundo o teorema a seguir, uma função que seja contínua em qualquer ponto de um intervalo fechado $[a, b]$ apresenta um mínimo e um máximo absoluto nesse intervalo. Ao representar graficamente uma função, devemos sempre procurar esses valores.

Teorema 1 O teorema do valor extremo
Se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume tanto um valor máximo M como um valor mínimo m em $[a, b]$. Ou seja, há números x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$ e $m \le f(x) \le M$ para qualquer outro valor de x em $[a, b]$ (Figura 4.3).

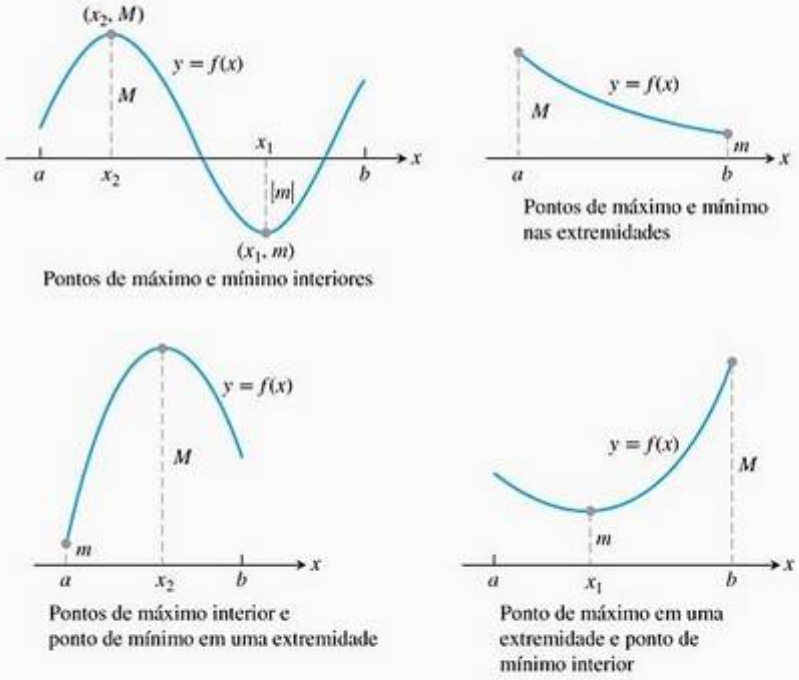


FIGURA 4.3 Algumas possibilidades para pontos de máximo e mínimo de uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$.

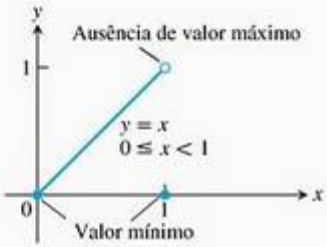


FIGURA 4.4 Até mesmo um único ponto de descontinuidade pode impedir que uma função tenha um valor máximo ou mínimo em dado intervalo. A função

$$y = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

é contínua em todo ponto do intervalo $[0, 1]$, exceto em $x = 1$, e seu gráfico no intervalo fechado $[0, 1]$ não tem um ponto mais alto.

A prova do teorema do valor extremo exige um conhecimento profundo do sistema de números reais (veja o Apêndice A.4), portanto não será apresentada aqui. A Figura 4.3 ilustra possíveis localizações dos extremos absolutos de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$. Como comentamos no caso da função $y = \cos x$, é possível que um mínimo absoluto (ou máximo absoluto) ocorra em dois ou mais pontos do intervalo.

Os requisitos do Teorema 1, de que o intervalo seja fechado e finito e a função seja contínua, são componentes básicos. Sem eles, as conclusões do teorema não são válidas. O Exemplo 1 mostra que um valor extremo absoluto pode não existir se o intervalo não for ao mesmo tempo fechado e finito. Já a Figura 4.4 mostra que o requisito da continuidade também não pode ser esquecido.

Extremos locais (relativos)

A Figura 4.5 mostra um gráfico com cinco pontos nos quais a função tem valores extremos em seu domínio $[a, b]$. O mínimo absoluto da função ocorre em a, embora em e o valor da função seja o menor que em qualquer ponto *próximo*. A curva sobe para a esquerda e desce para a direita próximo a c, tornando $f(c)$ um máximo local. A função atinge seu máximo absoluto em d.

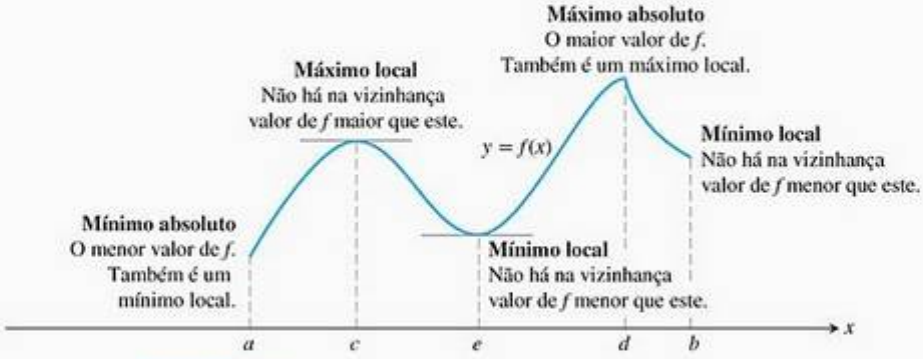


FIGURA 4.5 Como classificar os máximos e mínimos

Definição Máximo local, mínimo local

Uma função f tem um valor **máximo local** em um ponto interior c de seu domínio se

$$f(x) \leq f(c) \qquad \text{para qualquer } x \text{ em um intervalo aberto que contenha } c.$$

Uma função f tem um valor **mínimo local** em um ponto interior c de seu domínio se

$$f(x) \geq f(c) \qquad \text{para qualquer } x \text{ em um intervalo aberto que contenha } c.$$

Podemos ampliar essa definição de extremos locais para extremidades de intervalos definindo que f possui um valor **máximo local** ou **mínimo local** *em uma extremidade* c se a desigualdade apropriada é válida para qualquer x em um intervalo semi-aberto que contenha c. Na Figura 4.5, a função f tem máximos locais em c, d e mínimos locais em a, e, b. Extremos locais também são chamados **extremos relativos**.

Um máximo absoluto também é um máximo local. Sendo o maior valor de todos, é também o maior valor em sua vizinhança imediata. Assim, *uma lista contendo todos os máximos locais incluirá automaticamente o máximo absoluto, se houver.* De modo análogo, uma lista *contendo todos os mínimos locais incluirá automaticamente o mínimo absoluto, se houver.*

Determinando extremos

O teorema a seguir explica por que normalmente precisamos investigar apenas alguns valores para determinar o extremo de uma função.

Teorema 2 **Primeiro teorema da derivada para valores de extremos locais**

Se f possui um valor máximo ou mínimo local em um ponto c interior de seu domínio e se f' é definida em c, então

$$f'(c) = 0$$

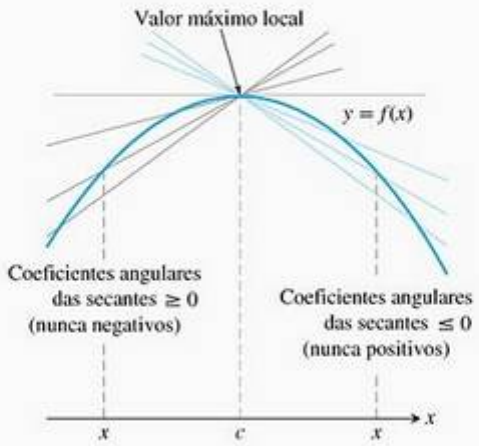


FIGURA 4.6 Uma curva com um máximo local. O coeficiente angular em c é simultaneamente o limite de números não positivos e não negativos e, portanto, é zero.

PROVA Para demonstrar que $f'(c)$ é zero em um extremo local, primeiro temos de provar que $f'(c)$ não pode ser positiva e depois que $f'(c)$ não pode ser negativa. O único número que não é nem positivo nem negativo é zero, que então é o valor que $f'(c)$ deve apresentar.

Para começar, suponha que f tenha um valor máximo local quando $x = c$ (Figura 4.6), de modo que $f(x) - f(c) \leq 0$, para qualquer x próximo de c. Como c é um ponto interior do domínio de f, $f'(c)$ é definida pelo limite bilateral

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Isso significa que ambos os limites, à direita e à esquerda, existirão quando $x = c$ e serão iguais a $f'(c)$. Quando examinamos esses limites separadamente, temos que

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \qquad \text{Pois } (x - c) > 0 \text{ e } f(x) \leq f(c) \qquad (1)$$

De maneira semelhante,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \qquad \text{Pois } (x - c) < 0 \text{ e } f(x) \leq f(c) \qquad (2)$$

Juntas, as equações (1) e (2) implicam que $f'(c) = 0$.

Isso prova o teorema para valores máximos locais. Para prová-lo para valores mínimos locais, usamos apenas $f(x) \geq f(c)$, o que inverte as desigualdades nas equações (1) e (2).

O Teorema 2 diz que a primeira derivada de uma função é sempre zero em um ponto interior onde a função tenha um valor extremo local e a derivada seja definida. Assim, os únicos locais onde uma função f pode ter valores extremos (locais ou globais) são

1. pontos interiores onde $f' = 0$,
2. pontos interiores onde f' não existe,
3. extremidades do domínio de f.

A definição a seguir nos ajudará a resumir essas informações.

Definição Ponto crítico
Um ponto interior do domínio de uma função f onde f' é zero ou indefinida é um **ponto crítico** de f.

Assim, os únicos pontos do domínio em que uma função pode assumir valores extremos são os pontos críticos e as extremidades.

Tome cuidado para não interpretar erroneamente o Teorema 2, pois sua recíproca não é verdadeira. Uma função derivável pode ter um ponto crítico em $x = c$ sem apresentar um valor extremo local nesse ponto. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ apresenta um ponto crítico na origem e valor zero nesse ponto, mas é positiva à direita da origem e negativa à esquerda. Logo, ela não pode ter um valor extremo local na origem. Em vez disso, tem nela um *ponto de inflexão*. Essa idéia será definida e discutida adiante, na Seção 4.4.

Na maioria das buscas por valores extremos, é necessário determinar os extremos absolutos de uma função contínua em um intervalo fechado e finito. O Teorema 1 garante que esses valores existem, e o Teorema 2 nos diz que eles só são assumidos em pontos críticos e extremidades. Muitas vezes, podemos simplesmente listar esses pontos e calcular os valores correspondentes da função, encontrando assim os valores maior e menor e sua localização.

Como determinar os extremos absolutos de uma função contínua f em um intervalo fechado e finito

1. Calcule f em todos os pontos críticos e extremidades.
2. Tome o maior e o menor dentre os valores obtidos.

EXEMPLO 2 Encontrando extremos absolutos

Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = x^2$ no intervalo $[-2, 1]$.

SOLUÇÃO A função é derivável em todo o seu domínio, portanto o único ponto crítico é onde $f'(x) = 2x = 0$, ou seja, em $x = 0$. Precisamos verificar os valores da função em $x = 0$ e nas extremidades $x = -2$ e $x = 1$:

Valor no ponto crítico:	$f(0) = 0$
Valores nas extremidades:	$f(-2) = 4$
	$f(1) = 1$

A função apresenta um valor máximo absoluto de 4 em $x = -2$ e um mínimo absoluto de 0 em $x = 0$.

EXEMPLO 3 Encontrando os extremos absolutos em um intervalo fechado

Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = 10x(2 - \ln x)$ no intervalo $[1, e^2]$.

SOLUÇÃO A Figura 4.7 sugere que f tem seu valor máximo absoluto próximo de $x = 3$ e que, quando $x = e^2$, seu valor mínimo absoluto é 0.

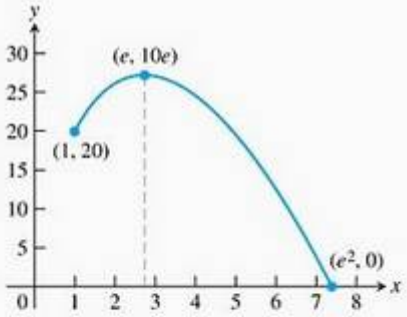


FIGURA 4.7 Os valores extremos de $f(x) = 10x(2 - \ln x)$ em $[1, e^2]$ ocorrem quando $x = e$ e $x = e^2$ (Exemplo 3).

Calculamos a função nos pontos críticos e nas extremidades e, dentre os valores obtidos, tomamos o maior e o menor.

A primeira derivada é

$$f'(x) = 10(2 - \ln x) - 10x\left(\frac{1}{x}\right) = 10(1 - \ln x)$$

O único ponto crítico no domínio $[1, e^2]$ é o ponto $x = e$, onde $\ln x = 1$. Os valores de f nesse único ponto crítico e nas extremidades são

Valor no ponto crítico:	$f(e) = 10e$
Valores nas extremidades:	$f(1) = 10(2 - \ln 1) = 20$
	$f(e^2) = 10e^2(2 - 2\ln e) = 0$

A partir dessa lista, podemos ver que o máximo absoluto dessa função é $10e \approx 2{,}72$, que ocorre no ponto crítico interior $x = e$. O mínimo absoluto é 0 e ocorre na extremidade direita, quando $x = e^2$.

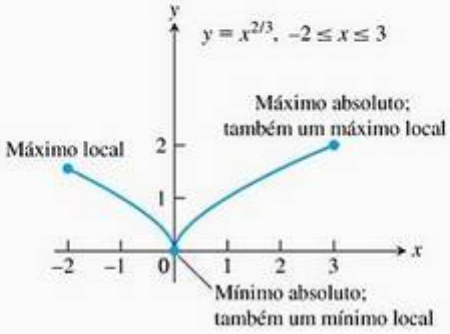


FIGURA 4.8 Os valores extremos de $f(x) = x^{2/3}$ no intervalo $[-2, 3]$ ocorrem quando $x = 0$ e $x = 3$ (Exemplo 4).

EXEMPLO 4 Encontrando os extremos absolutos em um intervalo fechado

Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = x^{2/3}$ no intervalo $[-2, 3]$.

SOLUÇÃO Calculamos a função nos pontos críticos e nas extremidades e, dentre os valores obtidos, tomamos o maior e o menor.

A primeira derivada

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

não tem zero, mas é indefinida no ponto interior $x = 0$. Os valores de f nesse ponto crítico e nas extremidades são

$$\begin{aligned} &\text{Valor no ponto crítico:} && f(0) = 0 \\ &\text{Valores nas extremidades:} && f(-2) = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4} \\ & && f(3) = (3)^{2/3} = \sqrt[3]{9} \end{aligned}$$

A partir dessa lista, podemos ver que o máximo absoluto dessa função é $\sqrt[3]{9} \approx 2{,}08$, que ocorre na extremidade direita $x = 3$. O mínimo absoluto é 0 e ocorre no ponto interior $x = 0$ (Figura 4.8).

Embora os extremos de uma função possam ocorrer apenas em pontos críticos e extremidades, nem todo ponto crítico ou extremidade indica a presença de um valor extremo. A Figura 4.9 ilustra isso para pontos interiores.

Encerramos esta seção com um exemplo que ilustra como os conceitos que acabamos de estudar podem ser usados para resolver um problema de otimização do mundo real.

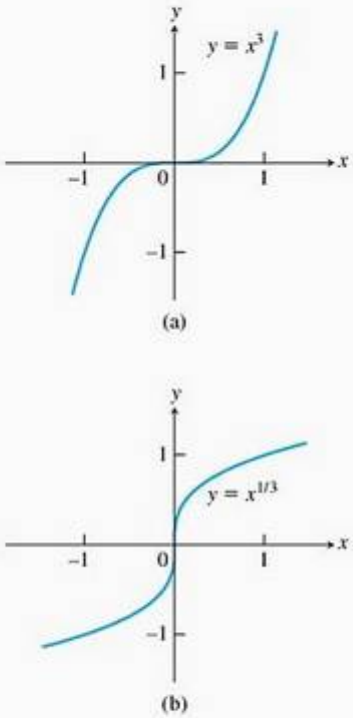


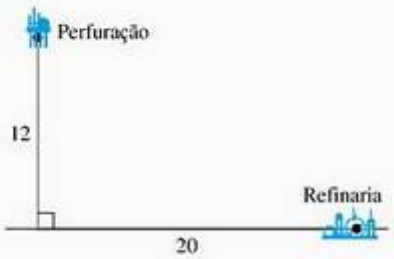
FIGURA 4.9 Pontos críticos sem valores extremos. (a) $y' = 3x^2$ é 0 quando $x = 0$, mas $y = x^3$ não possui extremo nesse ponto. (b) $y' = (1/3)\,x^{-2/3}$ não é definida quando $x = 0$, mas $y = x^{1/3}$ não possui extremo nesse ponto.

EXEMPLO 5 Bombeando petróleo de uma perfuração para uma refinaria

Uma perfuração a 12 mi da costa será conectada a uma refinaria costeira, 20 mi abaixo da linha da perfuração. Os dutos subaquáticos custam \$ 500.000 por milha e os terrestres, \$ 300.000 por milha. Qual é a combinação dos dois tipos de dutos que vai fornecer a conexão menos dispendiosa?

SOLUÇÃO Tentaremos algumas possibilidades para sentir o problema.

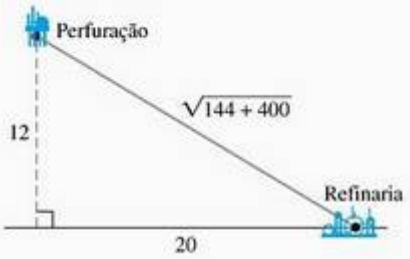
(a) *A menor quantidade de dutos subaquáticos*



Os dutos subaquáticos são mais dispendiosos, portanto devem ser usados o mínimo possível. Podemos estender a tubulação rumo à costa (12 mi) e usar dutos terrestres para as 20 mi até a refinaria.

$$\begin{aligned}\text{Custos em dólares} &= 12(500.000) + 20(300.000)\\ &= 12.000.000\end{aligned}$$

(b) *Apenas dutos subaquáticos (caminho mais curto)*

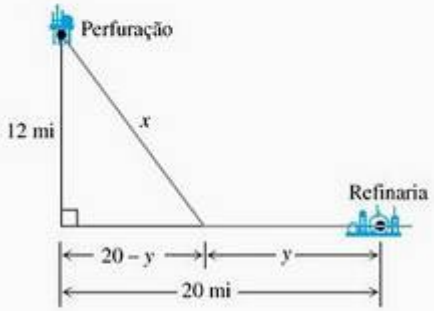


Utilizando apenas dutos subaquáticos para ligar a perfuração à refinaria.

$$\begin{aligned}\text{Custo em dólares} &= \sqrt{544}\,(500.000)\\ &\approx 11.661.900\end{aligned}$$

Essa operação é menos dispendiosa que a operação **(a)**.

(c) *Algo intermediário*



Agora, introduzimos como variáveis o comprimento x da tubulação subaquática e o comprimento y da tubulação terrestre. O ângulo reto oposto à perfuração é a chave para expressarmos a relação entre x e y. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos

$$x^2 = 12^2 + (20 - y)^2$$

$$x = \sqrt{144 + (20 - y)^2} \qquad (3)$$

Só a raiz positiva tem significado nesse modelo.

O custo da tubulação em dólares é

$$c = 500.000x + 300.000y$$

Para expressarmos c em função de uma única variável, podemos substituir x usando a Equação (3):

$$c(y) = 500.000\sqrt{144 + (20 - y)^2} + 300.000y$$

Nosso objetivo agora é determinar o valor mínimo de $c(y)$ no intervalo $0 \le y \le 20$. De acordo com a regra da cadeia, a primeira derivada de $c(y)$ em relação a y é:

$$c'(y) = 500.000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(20 - y)(-1)}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 300.000$$
$$= -500.000 \frac{20 - y}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 300.000$$

Fazendo $c' = 0$, temos

$$500.000\,(20 - y) = 300.000\sqrt{144 + (20 - y)^2}$$
$$\frac{5}{3}\left(20 - y\right) = \sqrt{144 + (20 - y)^2}$$
$$\frac{25}{9}\left(20 - y\right)^2 = 144 + (20 - y)^2$$
$$\frac{16}{9}\left(20 - y\right)^2 = 144$$
$$(20 - y) = \pm\frac{3}{4} \cdot 12 = \pm 9$$
$$y = 20 \pm 9$$
$$y = 11 \quad \text{ou} \quad y = 29$$

Apenas $y = 11$ fica no intervalo de interesse. Os valores de c em seus pontos críticos e nas extremidades são:

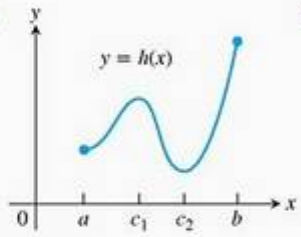
$$c(11) = 10.800.000$$
$$c(0) = 11.661.900$$
$$c(20) = 12.000.000$$

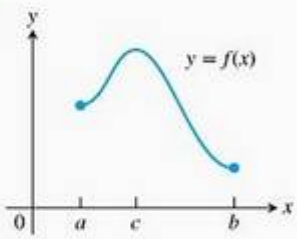
O sistema menos dispendioso custa \$ 10.800.000 e é obtido instalando-se a tubulação subaquática até o ponto em terra a 11 mi da refinaria.

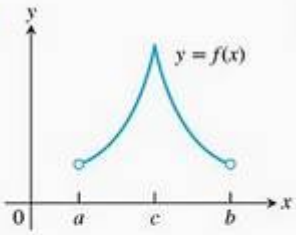
Exercícios 4.1

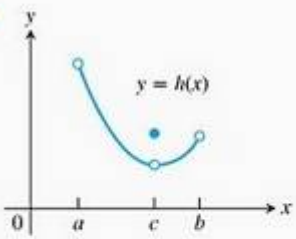
Determinando extremos em gráficos

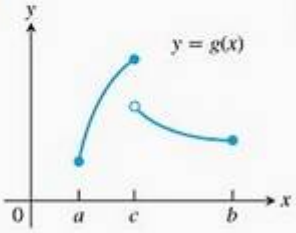
Nos exercícios 1–6, determine a partir do gráfico se a função possui algum valor extremo absoluto em $[a, b]$. A seguir, justifique sua resposta com base no Teorema 1.

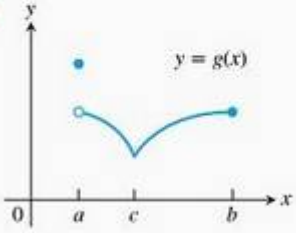
1.


2.


3.


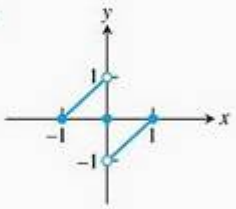
4.


5.


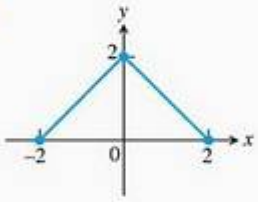
6.


Nos exercícios 7–10, determine os valores extremos e onde eles ocorrem.

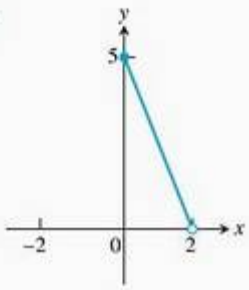
7.



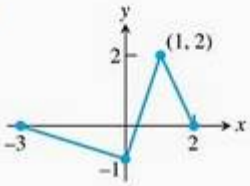
8.



9.



10.



Nos exercícios 11–14, associe a tabela com o gráfico correspondente.

11.

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	5

12.

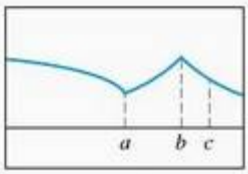
x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	−5

13.

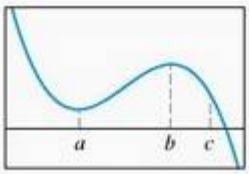
x	$f'(x)$
a	não existe
b	0
c	−2

14.

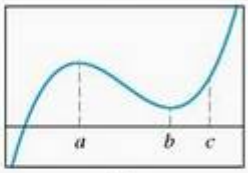
x	$f'(x)$
a	não existe
b	não existe
c	−1,7



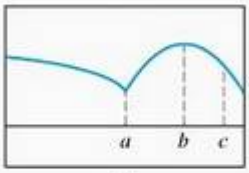
(a)



(b)



(c)



(d)

Extremos absolutos em intervalos fechados e finitos

Nos exercícios 15–34, determine os valores mínimo e máximo absolutos para cada função no intervalo dado. Em seguida, esboce o gráfico da função, identifique os pontos no gráfico onde os valores extremos ocorrem e inclua suas coordenadas.

15. $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \le x \le 3$

16. $f(x) = -x - 4, \quad -4 \le x \le 1$

17. $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \le x \le 2$

18. $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \le x \le 1$

19. $F(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad 0{,}5 \le x \le 2$

20. $F(x) = -\frac{1}{x}, \quad -2 \le x \le -1$

21. $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \le x \le 8$

22. $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 1$

23. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \le x \le 1$

24. $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \le x \le 0$

25. $f(\theta) = \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$

26. $f(\theta) = \operatorname{tg} \theta, \quad -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

27. $g(x) = \operatorname{cosec} x, \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$

28. $g(x) = \sec x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{6}$

29. $f(t) = 2 - |t|, \quad -1 \le t \le 3$

30. $f(t) = |t - 5|, \quad 4 \le t \le 7$

31. $g(x) = xe^{-x}, \quad -1 \le x \le 1$

32. $h(x) = \ln(x + 1), \quad 0 \le x \le 3$

33. $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x, \quad 0{,}5 \le x \le 4$

34. $g(x) = e^{-x^2}, \quad -2 \le x \le 1$

Nos exercícios 35–38, determine os valores mínimo e máximo absolutos da função e informe onde ela os assume.

35. $f(x) = x^{4/3}, \quad -1 \le x \le 8$

36. $f(x) = x^{5/3}, \quad -1 \le x \le 8$

37. $g(\theta) = \theta^{3/5}, \quad -32 \le \theta \le 1$

38. $h(\theta) = 3\theta^{2/3}, \quad -27 \le \theta \le 8$

Determinando valores extremos

Nos exercícios 39–54, determine os valores extremos das funções e identifique onde eles ocorrem.

39. $y = 2x^2 - 8x + 9$

40. $y = x^3 - 2x + 4$

41. $y = x^3 + x^2 - 8x + 5$

42. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

43. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

44. $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

45. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$

46. $y = \sqrt{3 + 2x - x^2}$

47. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

48. $y = \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}$

49. $y = e^x + e^{-x}$

50. $y = e^x - e^{-x}$

51. $y = x \ln x$

52. $y = x^2 \ln x$

53. $y = \cos^{-1}(x^2)$

54. $y = \operatorname{sen}^{-1}(e^x)$

Extremos locais e pontos críticos

Nos exercícios 55–62, encontre a derivada em cada ponto crítico e determine os extremos locais.

55. $y = x^{2/3}(x + 2)$

56. $y = x^{2/3}(x^2 - 4)$

57. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

58. $y = x^2\sqrt{3 - x}$

59. $y = \begin{cases} 4 - 2x, & x \le 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$

60. $y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \ge 0 \end{cases}$

61. $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \le 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$

62. $y = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}, & x \le 1 \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1 \end{cases}$

Nos exercícios 63 e 64, justifique suas respostas.

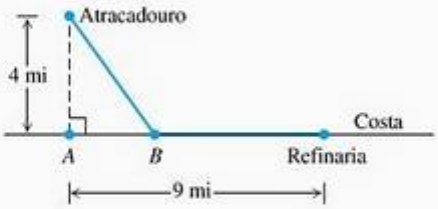
63. Seja $f(x) = (x - 2)^{2/3}$
   (a) $f'(2)$ existe?
   (b) Demonstre que o único extremo local ocorre quando $x = 2$.
   (c) O resultado do item (b) contradiz o teorema do valor extremo?
   (d) Repita os itens (a) e (b) para $f(x) = (x - a)^{2/3}$, substituindo 2 por a.

64. Seja $f(x) = |x^3 - 9x|$.
   (a) $f'(0)$ existe?
   (b) $f'(3)$ existe?
   (c) $f'(-3)$ existe?
   (d) Calcule todos os extremos de f.

Aplicações de otimização

Sempre que você estiver maximizando ou minimizando uma função com uma única variável, é imprescindível traçar a curva ao longo do domínio adequado para o problema. O gráfico fornecerá informações preciosas antes mesmo de você iniciar os cálculos e oferecerá um contexto visual para o entendimento da resposta.

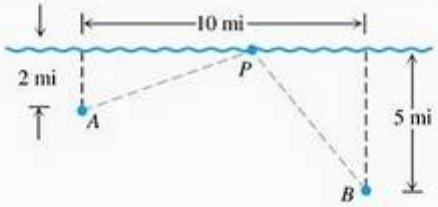
65. **Construindo uma tubulação** Superpetroleiros descarregam petróleo em atracadouros a 4 mi da costa. A refinaria mais próxima está 9 mi a leste do ponto da costa mais próximo do atracadouro. Uma tubulação precisa ser construída para conectar a refinaria ao atracadouro. Os dutos subaquáticos custam \$ 300.000 por milha e os terrestres, \$ 200.000 por milha.



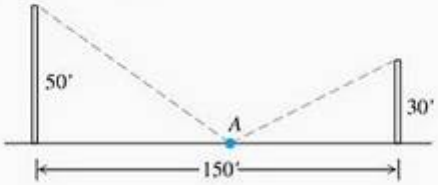
   (a) Localize o ponto B para minimizar os custos da construção.
   (b) O custo da tubulação subaquática deve aumentar, enquanto o custo da tubulação terrestre deve permanecer constante. A que preço é mais econômico construir um duto subaquático que vá direto ao ponto A?

66. **Modernizando uma rodovia** É necessário construir uma rodovia para ligar as cidades A e B. Há uma antiga estrada que pode ser melhorada 50 mi ao sul da reta que liga as duas cidades. O custo da modernização é de \$ 300.000 por milha, enquanto a construção de uma nova rodovia custa \$ 500.000 por milha. Determine a combinação da modernização e da nova construção que permite minimizar o custo da conexão entre as duas cidades. Defina claramente a localização da estrada proposta.

67. **Localização de uma estação bombeadora** Duas cidades estão localizadas no lado sul de um rio. Uma estação bombeadora de água será instalada para servir às duas cidades. A tubulação seguirá as retas que ligam cada cidade à estação. Defina o ponto onde a estação bombeadora deve ser instalada para minimizar o custo da tubulação.



68. **Comprimento de um cabo-guia** Duas torres têm respectivamente 50 e 30 pés de altura, e estão separadas por uma distância de 150 pés. Um cabo-guia deve ser estendido do ponto A até o topo de cada torre.



(a) Localize o ponto A de modo que o comprimento total do cabo seja mínimo.

(b) Mostre que o comprimento total do cabo usado é mínimo sempre que os ângulos em A são iguais, independentemente da altura das torres.

69. A função

$$V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x), \qquad 0 < x < 5,$$

define o volume de uma caixa.

(a) Determine os valores extremos de V.

(b) Interprete os valores encontrados no item (a) em função do volume da caixa.

70. A função

$$P(x) = 2x + \frac{200}{x}, \qquad 0 < x < \infty,$$

define o perímetro de um retângulo cujos lados medem x e $100/x$.

(a) Determine todos os extremos de P.

(b) Interprete as respostas do item (a) em termos do perímetro do retângulo.

71. **Área de um triângulo retângulo** Qual é a maior área possível de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 5 cm?

72. **Área de um campo de atletismo** Será construído um campo de atletismo retangular, com x unidades de comprimento, tendo nas extremidades duas áreas semicirculares com raio r. O campo terá em volta uma pista para corrida com 400 m de extensão.

(a) Expresse a área da porção retangular do campo só em função de x ou só em função de r (a escolha é sua).

(b) Quais valores de x e de r dão à porção retangular a maior área possível?

73. **Altura máxima de um corpo que se desloca verticalmente** A altura de um corpo que se desloca verticalmente é dada por

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0, \qquad g > 0$$

com s em metros e t em segundos. Determine a altura máxima do corpo.

74. **Pico de corrente alternada** Suponha que em dado instante t (em segundos) a corrente i (em ampères) de um circuito seja $i = 2\cos t + 2\,\text{sen}\, t$. Qual é o valor da corrente de pico para esse circuito (a maior magnitude)?

Teoria e exemplos

75. **Um mínimo sem derivadas** A função $f(x) = |x|$ tem valor mínimo absoluto quando $x = 0$, mesmo que f não seja derivável em $x = 0$. Isso é consistente com o Teorema 2? Justifique sua resposta.

76. **Funções pares** Se uma função par $f(x)$ possui um valor máximo local em $x = c$, pode-se dizer algo quando $x = -c$? Justifique sua resposta.

77. **Funções ímpares** Se uma função ímpar $g(x)$ possui um valor máximo local quando $x = c$, o que se pode dizer quando $x = -c$? Justifique sua resposta.

78. Sabemos como determinar os valores máximos de uma função contínua $f(x)$ por meio do estudo de seus valores em pontos críticos e nas extremidades. Mas e se *não houver* pontos críticos nem extremidades? O que acontece nesse caso? Uma função desse tipo pode existir? Justifique sua resposta.

79. **Funções cúbicas** Considere a seguinte função cúbica:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

(a) Demonstre que f pode ter 0, 1 ou 2 pontos críticos. Utilize exemplos e gráficos para justificar sua resposta.

(b) Quantos valores extremos locais f pode ter?

80. **Funções sem valores extremos em extremidades**

T (a) Trace o gráfico de função

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}\,\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Explique por que $f(0) = 0$ não é um extremo local de f.

(b) Construa uma função que não apresente valor extremo em uma extremidade do domínio.

T Faça o gráfico das funções dos exercícios 81–84. A seguir, determine e localize os valores extremos da função no intervalo.

81. $f(x) = |x - 2| + |x + 3|, \quad -5 \le x \le 5$

82. $g(x) = |x - 1| - |x - 5|, \quad -2 \le x \le 7$

83. $h(x) = |x + 2| - |x - 3|, \quad -\infty < x < \infty$

84. $k(x) = |x + 1| + |x - 3|, \quad -\infty < x < \infty$

USANDO O COMPUTADOR

Nos exercícios 85–92, você vai utilizar um SAC para ajudá-lo a determinar os extremos absolutos das funções nos intervalos fechados especificados. Siga os passos indicados.

(a) Trace a função no intervalo para analisar seu comportamento geral.

(b) Determine os pontos interiores onde $f' = 0$. (Em alguns exercícios, talvez você precise usar cálculo

numérico para obter uma solução aproximada.) Experimente traçar f' também.

(c) Determine os pontos interiores onde f' não existe.

(d) Calcule a função em todos os pontos encontrados nos itens (b) e (c) e também nas extremidades do intervalo.

(e) Determine e localize os extremos absolutos das funções no intervalo especificado.

85. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4x + 2, \quad [-20/25, 64/25]$

86. $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad [-3/4, 3]$

87. $f(x) = x^{2/3}(3 - x), \quad [-2, 2]$

88. $f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad [-1, 10/3]$

89. $f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

90. $f(x) = x^{3/4} - \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$

91. $f(x) = \pi x^2 e^{-3x/2}, \quad [0, 5]$

92. $f(x) = \ln(2x + x \operatorname{sen} x), \quad [1, 15]$

4.2 Teorema do valor médio

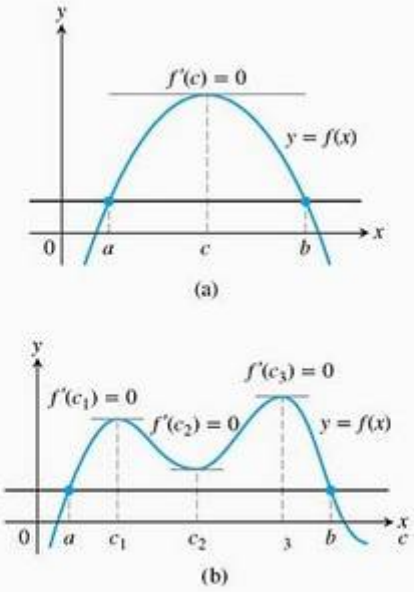


FIGURA 4.10 O teorema de Rolle diz que uma curva derivável tem ao menos uma tangente horizontal entre dois pontos quaisquer onde a curva cruza uma reta horizontal. Ela pode ter apenas uma tangente (a) ou mais de uma (b).

Companion Website

Biografia histórica

Michel Rolle (1652-1719)

Sabemos que funções constantes têm derivadas iguais a zero, mas poderia existir uma função complicada, com muitos termos, cujas derivadas pudessem todas ser canceladas e dar zero? Qual é a relação entre duas funções que têm derivadas idênticas no mesmo intervalo? O que estamos realmente perguntando aqui é quais funções podem ter um *tipo* particular de derivada. A resposta a essas e muitas outras questões que estudamos neste capítulo está no teorema do valor médio. Para chegar a esse teorema precisamos primeiro do teorema de Rolle.

Teorema de Rolle

Ao traçar o gráfico de uma função, encontramos fortes evidências geométricas de que, entre dois pontos quaisquer onde uma função derivável cruza uma reta horizontal, há pelo menos um ponto na curva onde a tangente é horizontal (Figura 4.10). Mais precisamente, temos o seguinte teorema:

Teorema 3 O teorema de Rolle

Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em todos os pontos do intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em todos os pontos de seu interior (a, b). Se

$$f(a) = f(b)$$

então há pelo menos um número c em (a, b) no qual

$$f'(c) = 0$$

PROVA Sendo contínua, f tem máximos e mínimos absolutos em $[a, b]$. Isso pode ocorrer apenas

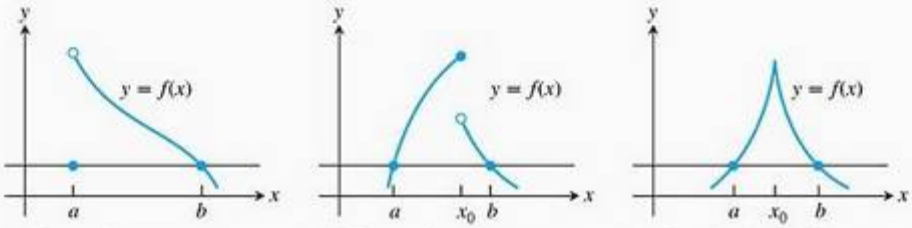
1. em pontos interiores onde f' é zero,
2. em pontos interiores onde f' não existe,
3. nas extremidades do domínio da função, nesse caso a e b.

Pela hipótese, f tem derivada em cada ponto interior de $[a, b]$. Isso exclui a possibilidade (2) e nos deixa com os pontos interiores onde $f' = 0$, além das duas extremidades a e b.

Se o máximo ou o mínimo ocorrem num ponto c entre a e b, então, $f'(c) = 0$ de acordo com o Teorema 2 (Seção 4.1), encontramos um ponto para o teorema de Rolle.

Se tanto o máximo como o mínimo absolutos estão nas extremidades, então, como $f(a) = f(b)$, f deve necessariamente ser uma função constante com $f(x) = f(a) = f(b)$ para qualquer $x \in [a, b]$. Assim, $f'(x) = 0$ e o ponto c podem ser tomado em qualquer lugar no interior (a, b).

As hipóteses do Teorema 3 são essenciais. Caso elas não sejam verdadeiras em um único ponto, o gráfico pode não apresentar uma tangente horizontal (Figura 4.11).



(a) Descontínua em uma extremidade de $[a, b]$

(b) Descontínua em um ponto interior de $[a, b]$

(c) Contínua em $[a, b]$, mas não derivável em um ponto interior

FIGURA 4.11 Se as hipóteses do teorema de Rolle não se cumprem, pode acontecer de não haver tangente horizontal.

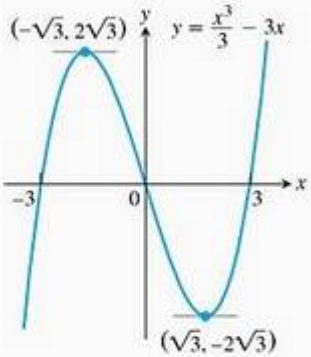


FIGURA 4.12 Conforme previsto pelo teorema de Rolle, essa curva apresenta tangentes horizontais entre os pontos onde ela cruza o eixo x (Exemplo 1).

EXEMPLO 1 Tangentes horizontais de um polinômio cúbico

A função polinomial

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

representada na Figura 4.12 é contínua em qualquer ponto de $[-3, 3]$ e derivável em qualquer ponto de $(-3, 3)$. Uma vez que $f(-3) = f(3) = 0$, o teorema de Rolle diz que f' será obrigatoriamente igual a zero pelo menos uma vez no intervalo aberto entre $a = -3$ e $b = 3$. Na verdade, $f'(x) = x^2 - 3$ é igual a zero duas vezes nesse intervalo, a primeira em $x = -\sqrt{3}$ e a segunda em $x = \sqrt{3}$.

EXEMPLO 2 Solução de uma equação $f(x) = 0$

Mostre que a equação

$$x^3 + 3x + 1 = 0$$

tem exatamente uma única solução real.

SOLUÇÃO Seja

$$y = f(x) = x^3 + 3x + 1$$

Então a derivada

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

nunca é igual a zero (porque é sempre positiva). Agora, se houvesse exatamente dois pontos $x = a$ e $x = b$ onde $f(x)$ fosse igual a zero, o teorema de Rolle garantiria a existência de um ponto $x = c$ entre eles onde f' seria igual

a zero. Portanto, f não tem mais de um zero. Tem, na realidade, um único zero, pois o teorema do valor intermediário nos diz que o gráfico de $y = f(x)$ cruza o eixo x em algum lugar entre $x = -1$ (onde $y = -3$) e $x = 0$ (onde $y = 1$). (Veja a Figura 4.13.)

A principal utilidade do teorema de Rolle é provar o teorema do valor médio.

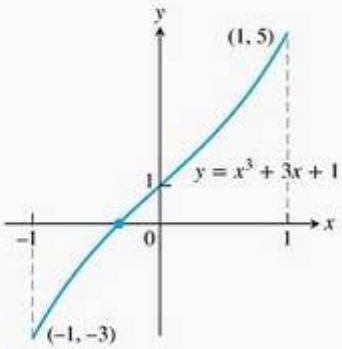


FIGURA 4.13 O único zero real do polinômio $y = x^3 + 3x + 1$ é aquele mostrado aqui, no ponto em que a curva cruza o eixo x entre −1 e 0 (Exemplo 2).

Teorema do valor médio

O teorema do valor médio, estabelecido por Joseph-Louis Lagrange, é uma versão inclinada do teorema de Rolle (Figura 4.14). Existe um ponto onde a tangente é paralela à corda AB.

Teorema 4 **O teorema do valor médio**
Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Então há pelo menos um ponto c em (a, b) em que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{1}$$

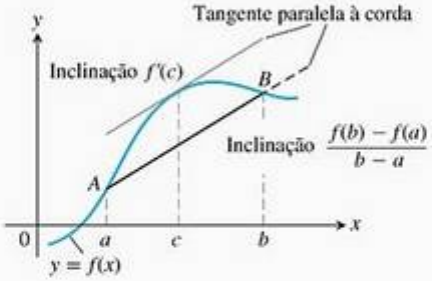


FIGURA 4.14 Geometricamente, o teorema do valor médio diz que, em algum lugar entre A e B, a curva apresenta pelo menos uma tangente paralela à corda AB.

PROVA Traçamos o gráfico de f como uma curva no plano cartesiano e uma reta através dos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ (veja a Figura 4.15). Essa reta é o gráfico da função

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{2}$$

(equação ponto/coeficiente angular). A diferença na vertical entre os gráficos de f e g em x é

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \end{aligned} \tag{3}$$

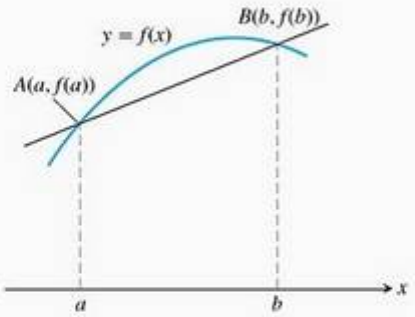


FIGURA 4.15 O gráfico de f e a corda AB no intervalo $[a, b]$.

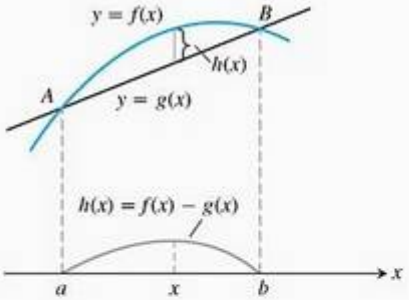


FIGURA 4.16 A corda AB é o gráfico da função $g(x)$. A função $h(x) = f(x) - g(x)$ fornece a distância na vertical entre os gráficos de f e g em x.

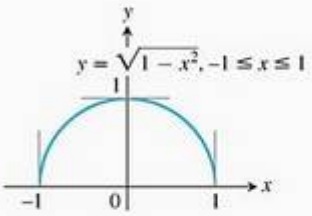


FIGURA 4.17 A função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ satisfaz a hipótese (e a conclusão) do teorema do valor médio em $[-1, 1]$, embora f não seja derivável em −1 e 1.

A Figura 4.16 apresenta simultaneamente os gráficos de f, g e h.

A função h satisfaz a hipótese do teorema de Rolle em $[a, b]$. Ela é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), pois f e g são. Além disso, $h(a) = h(b) = 0$, pois os gráficos de f e g passam por A e B. Portanto, $h' = 0$ em algum ponto $c \in (a, b)$. Esse é o ponto que desejamos para a Equação (1).

Para verificar a Equação (1), derivamos os dois lados da Equação (3) em relação a x e fazemos que $x = c$:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{Derivada em ambos os lados da Equação (3)...}$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{... com } x = c$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad h'(c) = 0$$

$$f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{Rearranjo}$$

que é o que queríamos provar.

A hipótese do teorema do valor médio não exige que f seja derivável em a ou b. A continuidade em a e b é suficiente (Figura 4.17).

Companion Website

Biografia histórica

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

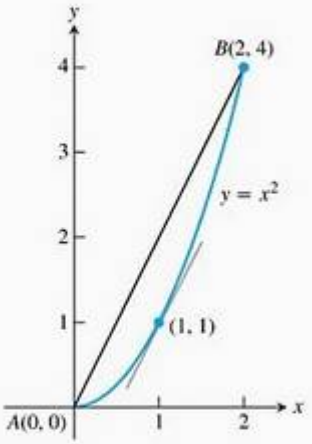


FIGURA 4.18 Como descobrimos no Exemplo 3, é em $c = 1$ que a tangente é paralela à corda.

EXEMPLO 3

A função $f(x) = x^2$ (Figura 4.18) é contínua para $0 \le x \le 2$ e derivável para $0 < x < 2$. Como $f(0) = 0$ e $f(2) = 4$, o teorema do valor médio diz que, em algum ponto c no intervalo, a derivada $f'(x) = 2x$ deve ter o valor $(4 - 0)/(2 - 0) = 2$. Nesse caso (excepcional), podemos identificar c resolvendo a equação $2c = 2$ para obter $c = 1$.

Uma interpretação física

Pense no número $(f(b) - f(a))/(b - a)$ como a variação média de f em $[a, b]$ e em $f'(c)$ como uma variação instantânea. O teorema do valor médio diz que, em algum ponto interior, a variação instantânea deve ser igual à variação média ao longo de todo o intervalo.

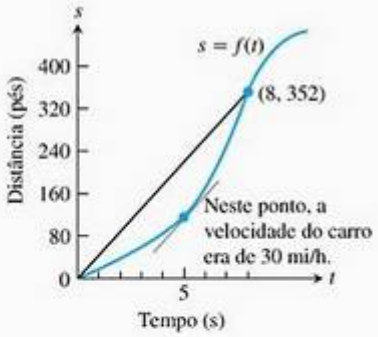


FIGURA 4.19 Distância contra o tempo decorrido para o carro no Exemplo 4.

EXEMPLO 4

Se um carro, acelerando a partir do repouso, leva 8 segundos para percorrer 352 pés, sua velocidade média no intervalo de 8 s é 352/8 = 44 pés/s. Segundo o teorema do valor médio, em algum momento durante a aceleração o velocímetro deve marcar exatamente 30 mi/h (44 pés/s) (Figura 4.19).

Conseqüências matemáticas

No início desta seção, perguntamos que tipo de função teria uma derivada nula ao longo de todo um intervalo dado. O primeiro corolário do teorema do valor médio nos dá a resposta.

Corolário 1 **Funções com derivadas nulas são constantes**
Se $f'(x) = 0$ em todos os pontos de um intervalo aberto (a, b), então $f(x) = C$ para qualquer $x \in (a, b)$, onde C é uma constante.

PROVA Queremos demonstrar que f tem valor constante no intervalo (a, b). Fazemos isso mostrando que, se x_1 e x_2 são dois pontos quaisquer em (a, b), então $f(x_1) = f(x_2)$. Numerando x_1 e x_2 da esquerda para a direita, teremos $x_1 < x_2$. Assim f satisfaz a hipótese do teorema do valor médio no intervalo $[x_1, x_2]$: é derivável em qualquer ponto de $[x_1, x_2]$ e, portanto, contínua em qualquer ponto também. Dessa forma,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

em algum ponto c entre x_1 e x_2. Como $f' = 0$ ao longo de (a, b), essa equação se traduz em:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0, \qquad f(x_2) - f(x_1) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(x_1) = f(x_2).$$

No início desta seção, também perguntamos sobre a relação entre duas funções que tenham derivadas idênticas ao longo de um intervalo. O próximo corolário nos diz que seus valores no intervalo guardam uma diferença constante entre si.

Corolário 2 **Funções com a mesma função derivada diferem por uma constante**
Se $f'(x) = g'(x)$ em cada ponto x de um intervalo aberto (a, b), então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para qualquer $x \in (a, b)$. Ou seja, $f - g$ é uma constante em (a, b).

PROVA Em cada ponto $x \in (a, b)$, a derivada da função diferença $h = f - g$ é

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Assim, $h(x) = C$ em (a, b) de acordo com o Corolário 1. Isto é, $f(x) - g(x) = C$ em (a, b), então $f(x) = g(x) + C$.

Os corolários 1 e 2 também se aplicam quando o intervalo aberto (a, b) não é finito. Isto é, permanecem verdadeiros se o intervalo for (a, ∞), $(-\infty, b)$ ou $(-\infty, \infty)$.

O Corolário 2 terá papel importante na Seção 4.8, quando discutiremos antiderivadas. Ele nos diz, por exemplo, que se a derivada de $f(x) = x^2$ em $(-\infty, \infty)$ é $2x$, qualquer outra função com derivada $2x$ em $(-\infty, \infty)$ deve ser igual a $x^2 + C$ para algum valor de C (Figura 4.20).

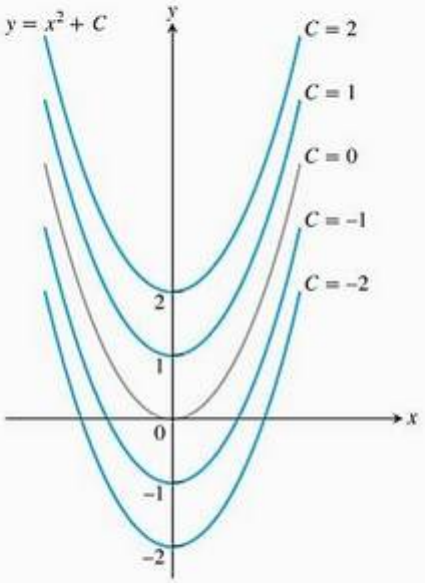


FIGURA 4.20 Do ponto de vista geométrico, o Corolário 2 do teorema do valor médio diz que os gráficos das funções com derivadas idênticas em um intervalo podem diferir apenas por um deslocamento vertical. Os gráficos das funções com derivada $2x$ são as parábolas $y = x^2 + C$, apresentadas aqui para alguns valores escolhidos de C.

EXEMPLO 5

Determine a função $f(x)$ cuja derivada é sen x e cujo gráfico passa pelo ponto $(0, 2)$.

SOLUÇÃO Como $f(x)$ possui a mesma derivada que $g(x) = -\cos x$, sabemos que $f(x) = -\cos x + C$ para algum valor de C. O valor de C pode

ser determinado a partir da condição $f(0) = 2$ (o gráfico passa por $(0, 2)$):

$$f(0) = -\cos(0) + C = 2, \qquad \text{então } C = 3$$

A função é $f(x) = -\cos x + 3$.

Provas das regras dos logaritmos

As propriedades algébricas dos logaritmos foram apresentadas na Seção 1.6. Podemos provar cada uma delas aplicando o Corolário 2 do teorema do valor médio. Os passos das provas são similares àqueles seguidos para resolver problemas que envolviam logaritmos.

PROVE QUE $\ln bx = \ln b + \ln x$ O argumento começa com a observação de que $\ln bx$ e $\ln x$ possuem a mesma derivada:

$$\frac{d}{dx}\ln(bx) = \frac{b}{bx} = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\ln x.$$

Então, de acordo com o Corolário 2 do teorema do valor médio, as funções devem diferir por uma constante, o que significa que

$$\ln bx = \ln x + C$$

para algum C.

Como essa última equação é válida para qualquer valor positivo de x, então deve valer para $x = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \ln(b \cdot 1) &= \ln 1 + C \\ \ln b &= 0 + C \qquad \ln 1 = 0 \\ C &= \ln b \end{aligned}$$

Por substituição, concluímos

$$\ln bx = \ln b + \ln x$$

PROVE QUE $\ln x^r = r \ln x$ Utilizamos mais uma vez o argumento da mesma derivada. Para qualquer valor positivo de x,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln x^r &= \frac{1}{x^r}\frac{d}{dx}(x^r) \qquad \text{Regra da cadeia.} \\ &= \frac{1}{x^r} r x^{r-1} \qquad \text{Equação (8), da Seção 3.7.} \\ &= r \cdot \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}(r \ln x) \end{aligned}$$

Uma vez que $\ln x^r$ e $r \ln x$ possuem a mesma derivada,

$$\ln x^r = r \ln x + C$$

para alguma constante C. Tornando x igual a 1, identificamos C como zero, como queríamos demonstrar.

No Exercício 65, temos de provar a regra do quociente para logaritmos,

$$\ln\left(\frac{b}{x}\right) = \ln b - \ln x$$

A regra da recíproca, $\ln(1/x) = -\ln x$, é um caso especial da regra do quociente, que obtemos tomando $b = 1$ e observando que $\ln 1 = 0$.

Leis dos expoentes

As leis dos expoentes para a função exponencial natural e^x são conseqüência das propriedades algébricas de $\ln x$. Sua origem está na relação inversa entre essas funções.

Leis dos expoentes para e^x

Para todos os números x, x_1 e x_2, a função exponencial natural e^x obedece às seguintes leis:

1. $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$
2. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
3. $\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1 - x_2}$
4. $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$

PROVA DA LEI 1 Seja

$$y_1 = e^{x_1} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{x_2} \tag{4}$$

Então

$$\begin{aligned} x_1 &= \ln y_1 \quad \text{e} \quad x_2 = \ln y_2 && \text{Calcule os logaritmos de ambos os lados das equações (4).} \\ x_1 + x_2 &= \ln y_1 + \ln y_2 \\ &= \ln y_1 y_2 && \text{Regra do produto para logaritmos.} \\ e^{x_1 + x_2} &= e^{\ln y_1 y_2} && \text{Faça a exponenciação.} \\ &= y_1 y_2 && e^{\ln u} = u \\ &= e^{x_1} e^{x_2} \end{aligned}$$

A prova da Lei 4 é análoga. As leis 2 e 3 derivam da Lei 1 (exercícios 67 e 68).

EXEMPLO 6 Aplicando as leis dos expoentes

(a) $e^{x + \ln 2} = e^x \cdot e^{\ln 2} = 2e^x$ Lei 1

(b) $e^{-\ln x} = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$ Lei 2

(c) $\dfrac{e^{2x}}{e} = e^{2x-1}$ Lei 3

(d) $(e^3)^x = e^{3x} = (e^x)^3$ Lei 4

Determinando a velocidade e a posição a partir da aceleração

Eis como determinar a velocidade $v(t)$ e a posição $s(t)$ de um corpo em queda livre a partir do repouso, sofrendo uma aceleração de 9,8 m/s^2.

Sabemos que $v(t)$ é uma função cuja derivada é 9,8. Sabemos também que a derivada de $g(t) = 9{,}8t$ é 9,8. De acordo com o Corolário 2,

$$v(t) = 9{,}8t + C$$

para alguma constante C. Como o corpo cai partindo do repouso, $v(0) = 0$. Logo:

$$9{,}8(0) + C = 0 \qquad \text{e} \qquad C = 0$$

A função velocidade será $v(t) = 9{,}8t$. E quanto à função posição $s(t)$?

Sabemos que $s(t)$ é uma função cuja derivada é $9{,}8t$. Sabemos também que a derivada de $f(t) = 4{,}9t^2$ é $9{,}8t$. De acordo com o Corolário 2,

$$s(t) = 4{,}9t^2 + C$$

para alguma constante C. Se a altura inicial é $s(0) = h$, positiva para baixo a partir da posição de repouso, então

$$4{,}9(0)^2 + C = h \qquad \text{e} \qquad C = h$$

A função posição será $s(t) = 4{,}9t^2 + h$.

A possibilidade de encontrar funções a partir de suas taxas de variação é uma das ferramentas de cálculo mais poderosas. Conforme veremos, ela está na base dos desdobramentos matemáticos do Capítulo 5.

Exercícios 4.2

Determinando c no teorema do valor médio

Determine o valor ou os valores de c que satisfazem a equação

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

que consta da conclusão do teorema do valor médio, para as funções e intervalos dos exercícios 1–4.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad [0, 1]$
2. $f(x) = x^{2/3}, \quad [0, 1]$
3. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x, \quad [-1, 1]$
4. $f(x) = \ln(x - 1), \quad [2, 4]$

Verificando e usando hipóteses

Nos exercícios 5–8, quais das funções satisfazem as hipóteses do teorema do valor médio no intervalo dado? Quais não as satisfazem? Justifique sua resposta.

5. $f(x) = x^{2/3}, \quad [-1, 8]$
6. $f(x) = x^{4/5}, \quad [0, 1]$
7. $f(x) = \sqrt{x(1 - x)}, \quad [0, 1]$
8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
9. A função
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$
é zero quando $x = 0$ e $x = 1$ e derivável em $(0, 1)$, mas sua derivada em $(0, 1)$ nunca é zero. Explique por quê. O teorema de Rolle não diz que a derivada deveria ser zero em algum lugar em $(0, 1)$? Justifique sua resposta.
10. Para que valores de a, m e b a função
$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$
satisfaz a hipótese do teorema do valor médio no intervalo $[0, 2]$?

Raízes (zeros)

11. (a) Trace as raízes de cada polinômio em uma reta, juntamente com as raízes de sua primeira derivada.
    i. $y = x^2 - 4$
    ii. $y = x^2 + 8x + 15$
    iii. $y = x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$
    iv. $y = x^3 - 33x^2 + 216x = x(x - 9)(x - 24)$

    (b) Use o teorema de Rolle para provar que entre duas raízes quaisquer de $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ existe uma raiz de
$$nx^{n-1} + (n - 1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$$
12. Suponha que f'' seja contínua em $[a, b]$ e que f tenha três raízes no intervalo. Mostre que f'' tem pelo menos uma raiz em (a, b). Generalize esse resultado.
13. Demonstre que, se $f'' > 0$ ao longo de todo um intervalo $[a, b]$, então f' tem no máximo uma raiz em $[a, b]$. E se, em vez disso, $f'' < 0$ ao longo de todo o intervalo $[a, b]$?

14. Demonstre que um polinômio cúbico pode ter no máximo três raízes reais.

Mostre que as funções dos exercícios 15–22 têm exatamente uma raiz no intervalo dado.

15. $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad [-2, -1]$

16. $f(x) = x^3 + \frac{4}{x^2} + 7, \quad (-\infty, 0)$

17. $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4, \quad (0, \infty)$

18. $g(t) = \frac{1}{1-t} + \sqrt{1+t} - 3{,}1, \quad (-1, 1)$

19. $r(\theta) = \theta + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{3}\right) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

20. $r(\theta) = 2\theta - \cos^2\theta + \sqrt{2}, \quad (-\infty, \infty)$

21. $r(\theta) = \sec\theta - \frac{1}{\theta^3} + 5, \quad (0, \pi/2)$

22. $r(\theta) = \operatorname{tg}\theta - \operatorname{cotg}\theta - \theta, \quad (0, \pi/2)$

Determinando funções a partir de derivadas

23. Suponha que $f(-1) = 3$ e que $f'(x) = 0$ para qualquer x. Obrigatoriamente, $f(x) = 3$ para qualquer x? Justifique sua resposta.

24. Suponha que $f(0) = 5$ e que $f'(x) = 2$ para qualquer x. Obrigatoriamente, $f(x) = 2x + 5$ para qualquer x? Justifique sua resposta.

25. Suponha que $f'(x) = 2x$ para qualquer x. Determine $f(2)$ se
(a) $f(0) = 0$ (b) $f(1) = 0$ (c) $f(-2) = 3$

26. O que podemos dizer sobre funções cujas derivadas são constantes? Justifique sua resposta.

Nos exercícios 27–32, encontre todas as possíveis funções com as derivadas dadas.

27. (a) $y' = x$ (b) $y' = x^2$ (c) $y' = x^3$

28. (a) $y' = 2x$ (b) $y' = 2x - 1$ (c) $y' = 3x^2 + 2x - 1$

29. (a) $y' = -\frac{1}{x}$ (b) $y' = 1 - \frac{1}{x}$ (c) $y' = 5 + \frac{1}{x}$

30. (a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (b) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (c) $y' = 4x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

31. (a) $y' = \operatorname{sen} 2t$ (b) $y' = \cos\frac{t}{2}$ (c) $y' = \operatorname{sen} 2t + \cos\frac{t}{2}$

32. (a) $y' = \sec^2\theta$ (b) $y' = \sqrt{\theta}$ (c) $y' = \sqrt{\theta} - \sec^2\theta$

Nos exercícios 33–36, encontre a função com a derivada dada cuja curva passa pelo ponto P.

33. $f'(x) = 2x - 1, \quad P(0, 0)$

34. $g'(x) = \frac{1}{x} + 2x, \quad P(1, -1)$

35. $f'(x) = e^{2x}, \quad P\left(0, \frac{3}{2}\right)$

36. $r'(t) = \sec t \operatorname{tg} t - 1, \quad P(0, 0)$

Determinando a posição a partir da velocidade

Os exercícios 37–40 fornecem a velocidade $v = ds/dt$ e a posição inicial de um corpo que se desloca ao longo de uma reta coordenada. Determine a posição do corpo no instante t.

37. $v = 9{,}8t + 5, \quad s(0) = 10$

38. $v = 32t - 2, \quad s(0{,}5) = 4$

39. $v = \operatorname{sen} \pi t, \quad s(0) = 0$

40. $v = \frac{1}{t+2}, \quad t > -2, \quad s(-1) = \frac{1}{2}$

Determinando a posição a partir da aceleração

Os exercícios 41–44 fornecem a aceleração $a = d^2s/dt^2$ e a velocidade e posição iniciais de um corpo que se desloca ao longo de uma reta coordenada. Determine a posição do corpo no instante t.

41. $a = e^t, \quad v(0) = 20, \quad s(0) = 5$

42. $a = 9{,}8, \quad v(0) = -3, \quad s(0) = 0$

43. $a = -4 \operatorname{sen} 2t \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$

44. $a = \frac{9}{\pi^2}\cos\frac{3t}{\pi}, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = -1$

Aplicações

45. **Variação de temperatura** Passaram-se 14 s desde que um termômetro de mercúrio foi retirado do congelador (−19 °C) e colocado em água fervente (100 °C). Demonstre que em algum lugar no trajeto a coluna de mercúrio estava subindo a uma taxa de 8,5 °C/s.

46. Um caminhoneiro percorreu 159 mi em 2 h, em uma estrada cujo limite de velocidade é 65 mi/h, e foi multado por excesso de velocidade. Por quê?

47. Relatos antigos contam que um trirreme (antigo navio de guerra grego ou romano) com 170 remos certa vez percorreu uma distância de 184 milhas náuticas em 24 h. Explique por que, em algum momento durante esse percurso, a velocidade do trirreme excedeu 7,5 nós (milhas náuticas por hora).

48. Um atleta percorreu as 26,2 milhas da Maratona de Nova York em 2,2 h. Demonstre que pelo menos em duas ocasiões o maratonista estava correndo a exatas 11 mi/h.

49. Mostre que, em algum momento durante uma viagem de automóvel de duas horas, o velocímetro marcava o valor equivalente à velocidade média da viagem.

50. Queda livre na Lua Na Lua, a aceleração da gravidade é de 1,6 m/s^2. Se uma rocha cai em uma fenda, qual é a sua velocidade, imediatamente antes de atingir o solo, 30 s depois?

Teoria e exemplos

51. A média geométrica de a e b A *média geométrica* de dois números positivos a e b é o número $\sqrt{ab}$. Demonstre que o valor de c na conclusão do teorema do valor médio para $f(x) = 1/x$ em um intervalo de números positivos $[a, b]$ é $c = \sqrt{ab}$.

52. A média aritmética de a e b A *média aritmética* de dois números a e b é o número $(a + b)/2$. Demonstre que o valor de c na conclusão do teorema do valor médio para $f(x) = x^2$ em qualquer intervalo $[a, b]$ é $c = (a + b)/2$.

53. Esboce o gráfico da função

T
$$f(x) = \text{sen } x \text{ sen } (x + 2) - \text{sen}^2 (x + 1)$$

Descreva o traçado do gráfico. Por que a função se comporta assim? Justifique sua resposta.

54. Teorema de Rolle

(a) Construa um polinômio $f(x)$ que tenha raízes quando $x = -2, -1, 0, 1$ e 2.

(b) Esboce o gráfico de f e o de sua derivada f' juntos. Como isso que você vê está relacionado com o teorema de Rolle?

(c) A função $g(x) = \text{sen } x$ e sua derivada g' ilustram o mesmo fenômeno?

55. Soluções únicas Suponha que f seja contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), que $f(a)$ e $f(b)$ possuam sinais contrários e que $f' \neq 0$ entre a e b. Demonstre que $f(x) = 0$ apenas uma vez entre a e b.

56. Tangentes paralelas Suponha que f e g sejam deriváveis em $[a, b]$ e que $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$. Demonstre que há pelo menos um ponto entre a e b onde as tangentes às curvas de f e g são paralelas ou são a mesma reta. Esboce um gráfico.

57. Se os gráficos de duas funções deriváveis $f(x)$ e $g(x)$ começam no mesmo ponto do plano cartesiano e as funções apresentam a mesma taxa de variação em todos os pontos, os gráficos são necessariamente idênticos? Justifique sua resposta.

58. Demonstre que para quaisquer números a e b a desigualdade $|\text{sen } b - \text{sen } a| \leq |b - a|$ é verdadeira.

59. Suponha que f seja derivável em $a \leq x \leq b$ e que $f(b) < f(a)$. Demonstre que f' é negativa em algum ponto entre a e b.

60. Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$. Que condições você acrescentaria a f para garantir que

$$\min f' \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \max f'$$

onde f' min e f' max se referem respectivamente aos valores mínimo e máximo de f' em $[a, b]$? Justifique sua resposta.

61. Use as desigualdades do Exercício 60 para estimar $f(0, 1)$

T se $f'(x) = 1/(1 + x^4 \cos x)$ para $0 \leq x \leq 0{,}1$ e $f(0) = 1$.

62. Use as desigualdades do Exercício 60 para estimar $f(0, 1)$

T se $f'(x) = 1/(1 - x^4)$ para $0 \leq x \leq 0{,}1$ e $f(0) = 2$.

63. Seja f derivável em qualquer valor de x e suponha que $f(1) = 1$, que $f' < 0$ em $(-\infty, 1)$ e que $f' > 0$ em $(1, \infty)$.

(a) Mostre que $f(x) \geq 1$ para qualquer x.

(b) Necessariamente, $f'(1) = 0$? Explique.

64. Seja $f(x) = px^2 + qx + r$ uma função quadrática definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Mostre que existe exatamente um ponto c em (a, b) no qual f satisfaz a conclusão do teorema do valor médio.

65. Assim como fizemos para provar as regras do produto e da potenciação para logaritmos, use o argumento da mesma derivada para provar a propriedade da regra do quociente.

66. Use o argumento da mesma derivada para provar as identidades

(a) $\text{tg}^{-1} x + \text{cotg}^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

(b) $\sec^{-1} x + \text{cosec}^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

67. Começando com a equação $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$, deduzida no texto, mostre que $e^{-x} = 1/e^x$ para qualquer número real x. Depois mostre que $e^{x_1}/e^{x_2} = e^{x_1 - x_2}$ para quaisquer números x_1 e x_2.

68. Mostre que $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$ para quaisquer números x_1 e x_2.

4.3 Funções monotônicas e o teste da primeira derivada

Ao esboçar o gráfico de uma função derivável, convém saber onde ela cresce (sobe da esquerda para a direita) ou decresce (cai da esquerda para a direita) ao longo de um intervalo. Esta seção define precisamente o que significa

uma função ser crescente ou decrescente ao longo de um intervalo, além de oferecer um teste para determinar onde ela cresce ou decresce. Mostraremos também como testar os pontos críticos de uma função a fim de detectar valores extremos locais.

Funções crescentes e decrescentes

Que tipos de função possuem derivadas positivas ou negativas? A resposta, segundo o terceiro corolário do teorema do valor médio, é a seguinte: as únicas funções com derivadas positivas são as crescentes, e as únicas funções com derivadas negativas são as decrescentes.

Definições **Função crescente, função decrescente**
Seja f uma função definida em um intervalo I e sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer em I.

1. Se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$, dizemos que f é **crescente** em I.
2. Se $f(x_2) < f(x_1)$ sempre que $x_1 < x_2$, dizemos que f é **decrescente** em I.

Uma função que é crescente ou decrescente em I é chamada **monotônica** em I.

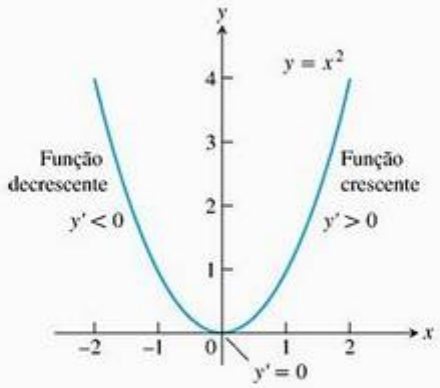


FIGURA 4.21 A função $f(x) = x^2$ é monotônica nos intervalos $(-\infty, 0]$ e $[0, \infty)$, mas não em $(-\infty, \infty)$.

É importante notar que as definições de funções crescentes e decrescentes precisam ser satisfeitas para *qualquer* par de pontos x_1 e x_2 em I no qual $x_1 < x_2$. Como a desigualdade que está comparando os valores da função é $<$ e não $\leq$, alguns autores afirmam que f é *estritamente* crescente ou decrescente em I. O intervalo I pode ser finito ou infinito.

A função $f(x) = x^2$ decresce no intervalo $(-\infty, 0]$ e cresce em $[0, \infty)$, como pode ser visto no seu gráfico (Figura 4.21). A função f é monotônica em $(-\infty, 0]$ e $[0, \infty)$, mas não em $(-\infty, \infty)$. Observe que no intervalo $(-\infty, 0)$ as tangentes apresentam coeficientes angulares negativos, de modo que a primeira derivada é sempre negativa aí; já em $(0, \infty)$ as tangentes apresentam coeficientes angulares positivos e a primeira derivada é positiva. O resultado a seguir confirma essas observações.

Corolário 3 **Teste da primeira derivada para funções monotônicas**
Suponha que f seja contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).

Se $f'(x) > 0$ em qualquer ponto $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$.

Se $f'(x) < 0$ em qualquer ponto $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

PROVA Sejam x_1 e x_2 dois pontos em $[a, b]$, sendo $x_1 < x_2$. O teorema do valor médio aplicado a f em $[x_1, x_2]$ diz que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

para algum c entre x_1 e x_2. O sinal do lado direito dessa equação é o mesmo de $f'(c)$, pois $x_2 - x_1$ é positivo. Portanto, se f' for positiva em (a, b), então $f(x_2) > f(x_1)$, e, se f' for negativa em (a, b), então $f(x_2) < f(x_1)$.

Eis como se aplica o teste da primeira derivada para determinar onde uma função é crescente ou decrescente. Se $a < b$ são dois pontos críticos de uma função f, e se f' existe, mas não é nula no intervalo (a, b), então f' precisa ser positiva ou negativa em (a, b) (Teorema 2 da Seção 3.1). Uma maneira de

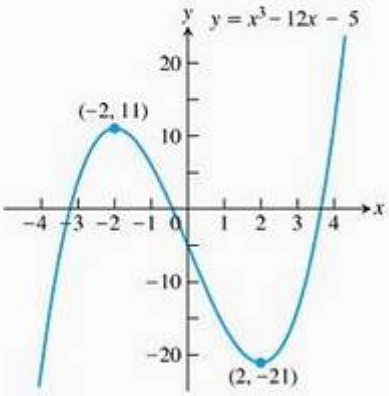


FIGURA 4.22 A função $f(x) = x^3 - 12x - 5$ é monotônica em três intervalos diferentes (Exemplo 1).

determinar o sinal de f' no intervalo é simplesmente calcular f' para um valor qualquer de x em (a, b). Depois se aplica o Corolário 3.

EXEMPLO 1 Usando o teste da primeira derivada para funções monotônicas

Determine os pontos críticos de $f(x) = x^3 - 12x - 5$ e identifique os intervalos onde f é crescente e decrescente.

SOLUÇÃO A função f é contínua e derivável em qualquer ponto. A primeira derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) \\ &= 3(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

é zero em $x = -2$ e $x = 2$. Esses pontos críticos subdividem o domínio de f nos intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ e $(2, \infty)$ nos quais f' é ou positiva ou negativa. Determinamos o sinal de f' calculando f em um ponto conveniente em cada subintervalo. O comportamento de f é determinado, então, aplicando-se o Corolário 3 a cada subintervalo. Os resultados são resumidos na tabela a seguir, e o gráfico de f é dado na Figura 4.22.

Intervalos	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor calculado de f'	$f'(-3) = 15$	$f'(0) = -12$	$f'(3) = 15$
Sinal de f'	+	−	+
Comportamento de f	crescente	decrescente	crescente

O Corolário 3 vale para intervalos finitos ou infinitos e, no Exemplo 1, usamos esse fato em nossa análise.

Saber onde uma função é crescente ou decrescente também nos diz como testar a natureza dos valores extremos locais.

Companion Website
Biografia histórica
Edmund Halley (1656-1742)

O teste da primeira derivada para extremos locais

Na Figura 4.23, nos pontos onde f possui valor mínimo, $f' < 0$ imediatamente à esquerda e $f' > 0$ imediatamente à direita. (Se o ponto é extremo, só há um lado a considerar.) Assim, a curva está descendo à esquerda do valor mínimo e subindo à sua direita. De maneira similar, nos pontos onde f possui valor máximo, $f' > 0$ imediatamente à esquerda e $f' < 0$ imediatamente à direita. Portanto, a curva está subindo à esquerda do valor máximo e descendo à sua direita. Em suma, em um ponto extremo local, o sinal de $f'(x)$ muda.

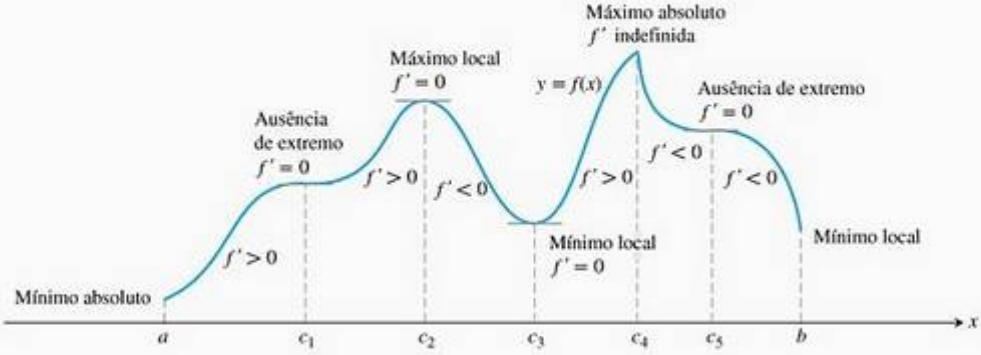


FIGURA 4.23 A primeira derivada de uma função nos diz como a curva sobe ou desce.

Essas observações nos levam a um teste que detecta a presença e a natureza de valores extremos locais em funções deriváveis.

O teste da primeira derivada para extremos locais

Suponha que c seja um ponto crítico de uma função contínua f, e que f seja derivável em qualquer ponto de certo intervalo que contenha c, exceto possivelmente no próprio ponto c. Movendo-se ao longo de c, da esquerda para a direita,

1. se f' muda de negativa para positiva em c, então f possui um mínimo local em c;
2. se f' muda de positiva para negativa em c, então f possui um máximo local em c;
3. se f' não muda de sinal em c (ou seja, f' é positiva ou negativa em ambos os lados de c), então c não é um extremo local de f.

O teste para extremos locais nas extremidades do intervalo é semelhante, mas só há um lado a considerar.

PROVA Parte (1). Como o sinal de f' muda de negativo para positivo em c, existem dois números a e b tais que $f' < 0$ em (a, c) e $f' > 0$ em (c, b). Se $x \in (a, c)$, então $f(c) < f(x)$, pois $f' < 0$ implica que f está caindo em $[a, c]$. Se $x \in (c, b)$, então $f(c) < f(x)$, pois $f' > 0$ implica que f está subindo em $[c, b]$. Portanto, $f(x) \geq f(c)$ para qualquer $x \in (a, b)$. Por definição, f possui um mínimo local em c.

As partes (2) e (3) são provadas de modo análogo.

EXEMPLO 2 Utilizando o teste da primeira derivada para extremos locais

Determine os pontos críticos de

$$f(x) = (x^2 - 3)\, e^x$$

Identifique os intervalos onde f é crescente e decrescente. Determine os extremos locais e absolutos da função.

SOLUÇÃO A função f é contínua e derivável para qualquer número real, então os pontos críticos ocorrem só nas raízes de f'.

Usando a regra do produto, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - 3) \cdot \frac{d}{dx} e^x + \frac{d}{dx}(x^2 - 3) \cdot e^x \\ &= (x^2 - 3) \cdot e^x + (2x) \cdot e^x \\ &= (x^2 + 2x - 3)e^x \end{aligned}$$

Como e^x nunca é zero, a primeira derivada será zero se e somente se

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ (x + 3)(x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

As raízes $x = -3$ e $x = 1$ dividem o eixo x em intervalos, a saber:

Intervalos	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$1 < x$
Sinal de f'	+	−	+
Comportamento de f	crescente	decrescente	crescente

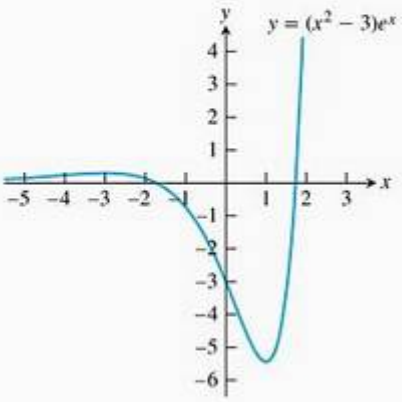


FIGURA 4.24 Gráfico de $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ (Exemplo 2).

A partir da tabela podemos ver que há um máximo local (aproximadamente 0,299) para $x = -3$ e um mínimo local (aproximadamente −5,437) para $x = 1$. O valor mínimo local também é o mínimo absoluto, pois $f(x) > 0$ para $|x| > \sqrt{3}$. Não há máximo absoluto. A função é crescente em $(-\infty, -3)$ e $(1, \infty)$ e decrescente em $(-3, 1)$. A Figura 4.24 mostra seu gráfico.

EXEMPLO 3 Usando o teste da primeira derivada para extremos locais

Determine os pontos críticos de

$$f(x) = x^{1/3}(x - 4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

Identifique os intervalos nos quais f é crescente e decrescente. Determine os valores extremos absolutos e locais da função.

SOLUÇÃO A função f é contínua em qualquer x, já que é o produto de duas funções contínuas, $x^{1/3}$ e $(x - 4)$. A primeira derivada

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{4/3} - 4x^{1/3}\right) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3}$$

$$= \frac{4}{3}x^{-2/3}\left(x - 1\right) = \frac{4(x - 1)}{3x^{2/3}}$$

é nula em $x = 1$ e indefinida em $x = 0$. Não há extremidades no domínio, portanto os pontos críticos $x = 0$ e $x = 1$ são os únicos lugares onde f pode apresentar um valor extremo.

Os pontos críticos dividem o eixo x em intervalos onde f' é ou positiva ou negativa. O padrão de sinal de f' revela o comportamento de f nos pontos críticos e entre eles. Podemos exibir essas informações em uma tabela como a seguinte:

Intervalos	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Sinal de f'	−	−	+
Comportamento de f	decrescente	decrescente	crescente

O Corolário 3 do teorema do valor médio nos diz que f decresce em $(-\infty, 0)$, decresce em $(0, 1)$ e cresce em $(1, \infty)$. O teste da primeira derivada para extremos locais nos diz que f não apresenta um valor extremo em $x = 0$ (f' não muda de sinal) e que f apresenta um mínimo local em $x = 1$ (f' muda de negativo para o positivo).

O valor do mínimo local é $f(1) = 1^{1/3}(1 - 4) = -3$. Também é o valor do mínimo absoluto, pois os valores da função caem vindo da esquerda e sobem indo para a direita. A Figura 4.25 mostra esse valor em relação ao gráfico da função.

Observe que $\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty$, portanto o gráfico de f apresenta uma tangente vertical na origem.

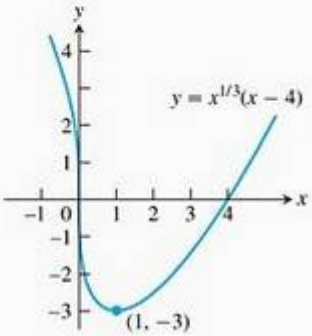


FIGURA 4.25 A função $f(x) = x^{1/3}(x - 4)$ decresce quando $x < 1$ e cresce quando $x > 1$ (Exemplo 3).

Exercícios 4.3

Analisando f desde que f' seja dada

Responda às seguintes perguntas sobre as funções cujas derivadas são dadas nos exercícios 1–8.

(a) Quais são os pontos críticos de f?

(b) Em quais intervalos f é crescente ou decrescente?

(c) Em quais pontos, se houver, f assume valores máximos e mínimos locais?

1. $f'(x) = x(x - 1)$
2. $f'(x) = (x - 1)(x + 2)$
3. $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)$
4. $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$
5. $f'(x) = (x - 1)e^{-x}$
6. $f'(x) = (x - 7)(x + 1)(x + 5)$
7. $f'(x) = x^{-1/3}(x + 2)$
8. $f'(x) = x^{-1/2}(x - 3)$

Extremos de funções dadas

Nos exercícios 9–32:

(a) Encontre os intervalos onde a função é crescente e decrescente.

(b) Em seguida, identifique os valores extremos locais da função, se houver, informando onde ela os assume.

(c) Alguns desses valores extremos são absolutos? Quais?

(d) Fundamente suas conclusões com uma calculadora ou software gráfico. T

9. $g(t) = -t^2 - 3t + 3$
10. $g(t) = -3t^2 + 9t + 5$
11. $h(x) = -x^3 + 2x^2$
12. $h(x) = 2x^3 - 18x$
13. $f(\theta) = 3\theta^2 - 4\theta^3$
14. $f(\theta) = 6\theta - \theta^3$
15. $f(r) = 3r^3 + 16r$
16. $h(r) = (r + 7)^3$
17. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$
18. $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$
19. $H(t) = \frac{3}{2}t^4 - t^6$
20. $K(t) = 15t^3 - t^5$
21. $g(x) = x\sqrt{8 - x^2}$
22. $g(x) = x^2\sqrt{5 - x}$
23. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}, \quad x \neq 2$
24. $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$
25. $f(x) = x^{1/3}(x + 8)$
26. $g(x) = x^{2/3}(x + 5)$
27. $h(x) = x^{1/3}(x^2 - 4)$
28. $k(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$
29. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$
30. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
31. $f(x) = x \ln x$
32. $f(x) = x^2 \ln x$

Valores extremos em intervalos semiabertos

Nos exercícios 33–40:

(a) Identifique os valores extremos locais da função nos domínios dados e informe onde ela os assume.

(b) Alguns desses valores extremos são absolutos? Quais?

(c) Fundamente suas conclusões com uma calculadora ou software gráfico. T

33. $f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$
34. $f(x) = (x + 1)^2, \quad -\infty < x \leq 0$
35. $g(x) = x^2 - 4x + 4, \quad 1 \leq x < \infty$
36. $g(x) = -x^2 - 6x - 9, \quad -4 \leq x < \infty$
37. $f(t) = 12t - t^3, \quad -3 \leq t < \infty$
38. $f(t) = t^3 - 3t^2, \quad -\infty < t \leq 3$
39. $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$
40. $k(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad -\infty < x \leq 0$

Calculadora ou software gráfico

Nos exercícios 41–44:

(a) Identifique os extremos locais de cada função nos intervalos dados e informe onde ela os assume.

(b) Faça na mesma tela o gráfico da função e sua derivada. Comente o comportamento de f em relação aos sinais e valores de f'. T

41. $f(x) = \frac{x}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$
42. $f(x) = -2 \cos x - \cos^2 x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$
43. $f(x) = \operatorname{cosec}^2 x - 2 \operatorname{cotg} x, \quad 0 < x < \pi$
44. $f(x) = \sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x, \quad \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Teoria e exemplos

Demonstre que as funções dos exercícios 45 e 46 apresentam valores extremos locais nos valores dados de θ; depois, informe qual tipo de extremo local a função apresenta.

45. $h(\theta) = 3 \cos \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$, em $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$
46. $h(\theta) = 5 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$, em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$
47. Esboce o gráfico de uma função derivável $y = f(x)$ que passa pelo ponto $(1, 1)$ se $f'(1) = 0$ e
    (a) $f'(x) > 0$ para $x < 1$ e $f'(x) < 0$ para $x > 1$
    (b) $f'(x) < 0$ para $x < 1$ e $f'(x) > 0$ para $x > 1$
    (c) $f'(x) > 0$ para $x \neq 1$
    (d) $f'(x) < 0$ para $x \neq 1$
48. Esboce o gráfico de uma função derivável $y = f(x)$ que tenha
    (a) um mínimo local em $(1, 1)$ e um máximo local em $(3, 3)$;
    (b) um máximo local em $(1, 1)$ e um mínimo local em $(3, 3)$;
    (c) máximos locais em $(1, 1)$ e $(3, 3)$;
    (d) mínimos locais em $(1, 1)$ e $(3, 3)$.
49. Esboce o gráfico de uma função contínua $y = g(x)$ tal que

(a) $g(2) = 2$, $0 < g' < 1$ para $x < 2$, $g'(x) \to 1^-$ quando $x \to 2^-$, $-1 < g' < 0$ para $x > 2$ e $g'(x) \to -1^+$ quando $x \to 2^+$;

(b) $g(2) = 2$, $g' < 0$ para $x < 2$, $g'(x) \to -\infty$ quando $x \to 2^-$, $g' > 0$ para $x > 2$ e $g'(x) \to \infty$ quando $x \to 2^+$.

50. Esboce o gráfico de uma função contínua $y = h(x)$ tal que

(a) $h(0) = 0$, $-2 \le h(x) \le 2$ para todos os x, $h'(x) \to \infty$ quando $x \to 0^-$, e $h'(x) \to \infty$ quando $x \to 0^+$;

(b) $h(0) = 0$, $-2 \le h(x) \le 0$ para todos os x, $h'(x) \to \infty$ quando $x \to 0^-$, e $h'(x) \to -\infty$ quando $x \to 0^+$.

51. Localize e identifique os valores extremos absolutos de

(a) $\ln(\cos x)$ em $[-\pi/4, \pi/3]$

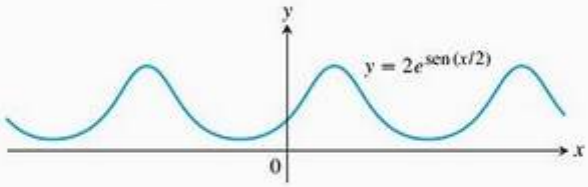
(b) $\cos(\ln x)$ em $[1/2, 2]$

52. (a) Prove que $f(x) = x - \ln x$ é crescente para $x > 1$.

(b) Usando o item (a), demonstre que $\ln x < x$ se $x > 1$.

53. Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = e^x - 2x$ em $[0, 1]$.

54. Onde a função periódica $f(x) = 2e^{\operatorname{sen}(x/2)}$ assume seus valores extremos e que valores são esses?



55. Determine o valor máximo absoluto de $f(x) = x^2 \ln(1/x)$ e indique onde a função assume tal valor.

56. Determine os intervalos nos quais a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, é crescente e decrescente. Descreva o raciocínio que sustenta sua resposta.

57. Quando x se move da esquerda para a direita pelo ponto $c = 2$, a curva de $f(x) = x^3 - 3x + 2$ está subindo ou descendo?

58. (a) Prove que $e^x \ge 1 + x$ se $x \ge 0$.

(b) Use o resultado do item (a) para provar que

$$e^x \ge 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

59. Demonstre que funções crescentes e decrescentes são injetoras. Ou seja, demonstre que, para quaisquer x_1 e x_2 em I, $x_2 \neq x_1$ implica $f(x_2) \neq f(x_1)$.

Use os resultados do Exercício 59 para mostrar que as funções dos exercícios 60–64 apresentam inversas em seus domínios. Determine uma fórmula para df^{-1}/dx usando o Teorema 5 da Seção 3.7.

60. $f(x) = (1/3)x + (5/6)$

61. $f(x) = 27x^3$

62. $f(x) = 1 - 8x^3$

63. $f(x) = (1 - x)^3$

64. $f(x) = x^{5/3}$

4.4 Concavidade e esboço de curvas

Na Seção 4.3, vimos como a primeira derivada nos diz onde uma função é crescente e onde é decrescente. Em um ponto crítico de uma função derivável, o teste da primeira derivada nos diz se existe lá um mínimo ou máximo local, ou se o gráfico simplesmente continua a subir ou a cair.

Nesta seção, veremos como a segunda derivada nos fornece informações sobre o modo como a curva de uma função derivável se inclina ou muda de direção. Essa informação adicional nos permite captar importantes aspectos do comportamento de uma função e seu gráfico; assim podemos, depois, apresentar essas características em um esboço do gráfico.

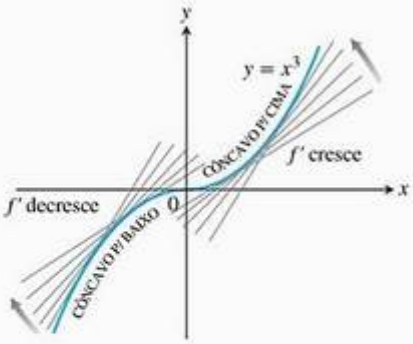


FIGURA 4.26 O gráfico de $f(x) = x^3$ é côncavo para baixo em $(-\infty, 0)$ e côncavo para cima em $(0, \infty)$ (Exemplo 1a).

Concavidade

Como você pode ver na Figura 4.26, a curva $y = x^3$ é crescente conforme x aumenta, mas as porções definidas nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$ se curvam de maneiras distintas. Conforme percorremos a curva na direção da origem, a partir da esquerda, vemos que ela se volta para a nossa direita e fica abaixo de suas tangentes. Os coeficientes angulares das tangentes são decrescentes no intervalo $(-\infty, 0)$. Se continuamos percorrendo a curva para a direita, vemos que ela se volta para a esquerda e fica acima de suas tangentes. Os coeficientes

angulares das tangentes são crescentes no intervalo $(0, \infty)$. Esse comportamento de inclinação e mudança de direção define a *concavidade* da curva.

Definição **Côncavo para cima, côncavo para baixo**

O gráfico de uma função derivável $y = f(x)$ é

(a) **côncavo para cima** em um intervalo aberto I, se f' é crescente em I;

(b) **côncavo para baixo** em um intervalo aberto I, se f' é decrescente em I.

Se uma função $y = f(x)$ possui uma segunda derivada, então podemos aplicar o Corolário 3 do teorema do valor médio para concluir que f' é crescente se $f'' > 0$ em I, e decrescente se $f'' < 0$.

O teste da segunda derivada para concavidade

Seja $y = f(x)$ uma função duplamente derivável em um intervalo I.

1. Se $f'' > 0$ em I, o gráfico de f ao longo de I é côncavo para cima.
2. Se $f'' < 0$ em I, o gráfico de f ao longo de I é côncavo para baixo.

Se $y = f(x)$ é duplamente derivável, usamos as notações f'' e y'' de maneira intercambiável, sempre denotando a segunda derivada.

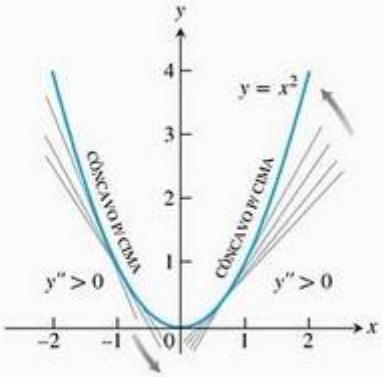


FIGURA 4.27 O gráfico de $f(x) = x^2$ é côncavo para cima em qualquer intervalo (Exemplo 1b).

EXEMPLO 1 Aplicando o teste da concavidade

(a) A curva $y = x^3$ (Figura 4.26) é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$, onde $y'' = 6x < 0$, e côncava para cima em $(0, \infty)$ onde $y'' = 6x > 0$.

(b) A curva $y = x^2$ (Figura 4.27) é côncava para cima em $(-\infty, \infty)$, pois sua segunda derivada $y'' = 2$ é sempre positiva.

EXEMPLO 2 Determinando a concavidade

Determine a concavidade de $y = 3 + \text{sen}\, x$ em $[0, 2\pi]$.

SOLUÇÃO O gráfico de $y = 3 + \text{sen}\, x$ é côncavo para baixo em $(0, \pi)$, onde $y'' = -\text{sen}\, x$ é negativo, e é côncavo para cima em $(\pi, 2\pi)$, onde $y'' = -\text{sen}\, x$ é positivo (Figura 4.28).

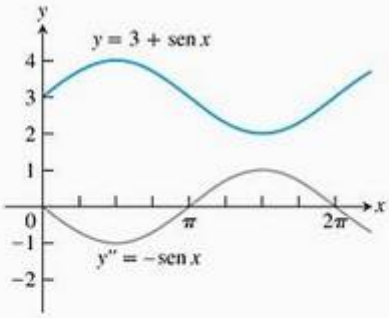


FIGURA 4.28 Usando o gráfico de y'' para determinar a concavidade de y (Exemplo 2).

Pontos de inflexão

A curva $y = 3 + \text{sen}\, x$ do Exemplo 2 muda de concavidade no ponto $(\pi, 3)$. Denominamos $(\pi, 3)$ um *ponto de inflexão* da curva.

Definição **Ponto de inflexão**

Um ponto onde o gráfico de uma função possui uma reta tangente e onde há mudança de concavidade é um **ponto de inflexão**.

Um ponto em uma curva no qual y'' é positiva de um lado e negativa do outro é um ponto de inflexão. Nesse ponto, y'' é zero (pois as derivadas possuem a propriedade do valor intermediário) ou é indefinida. Se y é uma função duplamente derivável, $y'' = 0$ em um ponto de inflexão e y'' possui um máximo ou um mínimo local.

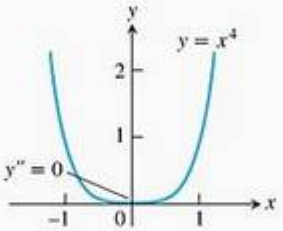


FIGURA 4.29 O gráfico de $y = x^4$ não apresenta ponto de inflexão na origem, embora nesse ponto $y'' = 0$ (Exemplo 3).

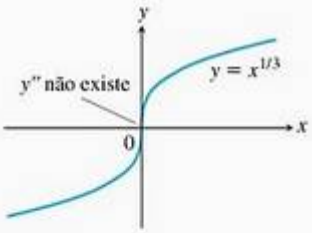


FIGURA 4.30 Um ponto onde não há y'' pode ser um ponto de inflexão (Exemplo 4).

EXEMPLO 3 Pode não existir ponto de inflexão onde $y'' = 0$

A curva $y = x^4$ não possui ponto de inflexão quando $x = 0$ (Figura 4.29). Embora $y'' = 12x^2$ seja zero nesse ponto, não ocorre mudança de sinal.

EXEMPLO 4 Pode existir ponto de inflexão onde y'' não existe

A curva $y = x^{1/3}$ possui ponto de inflexão quando $x = 0$ (Figura 4.30), mas y'' não existe nesse ponto.

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{1/3}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

Podemos ver pelo Exemplo 3 que uma segunda derivada nula nem sempre gera um ponto de inflexão. No Exemplo 4, vimos que um ponto de inflexão também pode ocorrer quando *não há* segunda derivada.

Para estudarmos o movimento de um corpo que se desloca ao longo de uma reta em função do tempo, geralmente queremos saber quando a aceleração do corpo, dada pela segunda derivada, é positiva ou negativa. Os pontos de inflexão no gráfico da função posição do corpo nos revelam onde o sinal da aceleração muda.

EXEMPLO 5 Estudando o deslocamento ao longo de uma reta

Um partícula se desloca ao longo de uma reta horizontal de acordo com a função posição

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5, \qquad t \geq 0$$

Determine a velocidade e a aceleração e descreva o movimento da partícula.

SOLUÇÃO A velocidade é

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22 = 2(t - 1)(3t - 11)$$

e a aceleração é

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t - 7)$$

Quando a função $s(t)$ é crescente, a partícula está se deslocando para a direita; quando $s(t)$ é decrescente, a partícula está se deslocando para a esquerda.

Veja que a primeira derivada ($v = s'$) é zero quando $t = 1$ e $t = 11/3$.

Intervalos	$0 < t < 1$	$1 < t < 11/3$	$11/3 < t$
Sinal de $v = s'$	+	−	+
Comportamento de s	crescente	decrescente	crescente
Movimento da partícula	para a direita	para a esquerda	para a direita

A partícula se desloca para a direita no intervalo de tempo $[0, 1)$ e $(11/3, \infty)$ e para a esquerda em $(1, 11/3)$. Além disso, fica momentaneamente parada (em repouso) em $t = 1$ e $t = 11/3$.

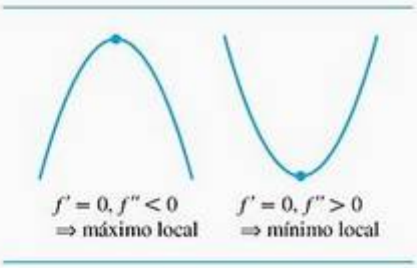
A aceleração $a(t) = s''(t) = 4(3t - 7)$ é zero quando $t = 7/3$.

Intervalos	$0 < t < 7/3$	$7/3 < t$
Sinal de $a = s''$	−	+
Gráfico de s	côncavo para baixo	côncavo para cima

A força de aceleração é direcionada para a esquerda durante o intervalo de tempo $[0, 7/3)$, é momentaneamente zero quando $t = 7/3$ e a partir de então é dirigida para a esquerda.

O teste da segunda derivada para extremos locais

Em vez de procurarmos a mudança de sinal nos pontos críticos de f', às vezes podemos usar o teste a seguir para determinar a presença de extremos locais.



Teorema 5 **O teste da segunda derivada para extremos locais**

Suponha que f'' seja contínua em um intervalo aberto que contenha $x = c$.

1. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f possui um máximo local quando $x = c$.
2. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f possui um mínimo local quando $x = c$.
3. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, então o teste falha. A função f pode ter um máximo local, um mínimo local, ou nenhum dos dois.

PROVA Parte (1). Se $f''(c) < 0$, então $f''(x) < 0$ em algum intervalo aberto I que contenha o ponto c, uma vez que f'' é contínua. Portanto, f' é decrescente em I. Como $f'(c) = 0$, o sinal de f' muda de positivo para negativo em c, de modo que f apresenta um máximo local em c, de acordo com o teste da primeira derivada.

A prova da Parte (2) é análoga.

Para a Parte (3), considere as três funções $y = x^4$, $y = -x^4$ e $y = x^3$. Para cada função, a primeira e a segunda derivadas são nulas em $x = 0$. Apesar disso, nesse ponto, a função $y = x^4$ apresenta um mínimo local, $y = -x^4$ apresenta um máximo local e $y = x^3$ é crescente em qualquer intervalo aberto que contenha $x = 0$ (não apresentando nem um máximo nem um mínimo nesse ponto). Em outras palavras, o teste falha.

Esse teste exige que conheçamos f'' *apenas em* c, e não em um intervalo em torno de c. Isso o torna fácil de aplicar. Essa é a boa notícia. A má notícia é que o teste é inconclusivo quando $f'' = 0$ ou f'' não existe para $x = c$. Quando isso ocorre, deve-se voltar ao teste da primeira derivada para extremos locais.

Juntas, f' e f'' nos dizem o formato do gráfico da função, isto é, onde os pontos críticos se localizam e o que acontece em um ponto crítico, onde a função é crescente e onde é decrescente, e como a curva muda de direção ou se inclina, conforme definido por sua concavidade. Usamos essas informações para esboçar um gráfico da função que capte todos esses seus aspectos-chave.

EXEMPLO 6 Utilizando f' e f'' para esboçar o gráfico de f

Esboce o gráfico da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$

seguindo os passos:

(a) Identifique onde os extremos de f ocorrem.

(b) Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

(c) Determine onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.

(d) Esboce a forma geral do gráfico de f.

(e) Trace alguns pontos específicos, tais como o máximo e o mínimo locais, os pontos de inflexão e as coordenadas das interseções com os eixos x e y. Em seguida, esboce a curva.

SOLUÇÃO f é contínua, pois $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ existe. O domínio de f é $(-\infty, \infty)$, portanto o domínio de f também é $(-\infty, \infty)$. Assim, os pontos críticos de f ocorrem só nas raízes de f'. Uma vez que

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

a primeira derivada é zero quando $x = 0$ e $x = 3$.

Intervalos	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
Sinal de f'	$-$	$-$	$+$
Gráfico de f	decrescente	decrescente	crescente

(a) Usando o teste da primeira derivada para extremos locais e a tabela dada, podemos ver que não há extremo quando $x = 0$ e que há um mínimo local quando $x = 3$.

(b) Usando a tabela anterior, podemos ver que f é decrescente em $(-\infty, 0]$ e $[0, 3]$ e crescente em $[3, \infty)$.

(c) $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$ é zero quando $x = 0$ e $x = 2$

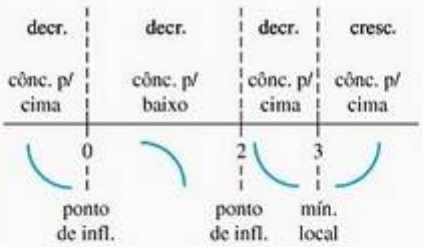
Intervalos	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
Sinal de f'	$+$	$-$	$+$
Gráfico de f	côncavo para cima	côncavo para baixo	côncavo para cima

Podemos ver que f é côncava para cima nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(2, \infty)$ e côncava para baixo em $(0, 2)$.

(d) Resumindo as informações apresentadas nas duas tabelas, obtemos

$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
decrescente	decrescente	decrescente	crescente
côncavo para cima	côncavo para baixo	côncavo para cima	côncavo para cima

A forma geral da curva é



(e) Trace os pontos de interseção da curva com os eixos x e y (se possível) e os pontos onde y' e y'' são iguais a zero. Indique todos os valores extremos locais e pontos de inflexão. Use a forma geral como um guia para esboçar a curva. (Trace pontos adicionais conforme necessário.) A Figura 4.31 apresenta o gráfico de f.

Os passos do Exemplo 6 formam o procedimento para fazer gráficos capazes de captar os aspectos mais importantes de uma função e seu gráfico.

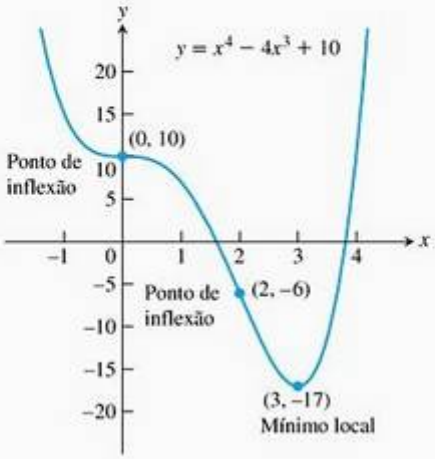


FIGURA 4.31 O gráfico de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ (Exemplo 6).

Estratégia para construir o gráfico de $y = f(x)$

1. Identifique o domínio de f e quaisquer simetrias que a curva possa ter.
2. Determine y' e y''.
3. Determine os pontos críticos de f e identifique o comportamento da função em cada um deles.
4. Determine a subida e a descida da curva.
5. Determine os pontos de inflexão, caso haja algum, e a concavidade da curva.
6. Identifique todas as assíntotas.
7. Trace os pontos mais importantes, tais como os pontos de interseção com os eixos e aqueles encontrados nos passos 3 a 5; em seguida, esboce a curva.

EXEMPLO 7 Usando a estratégia de construção de gráficos

Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$.

SOLUÇÃO

1. O domínio de f é $(-\infty, \infty)$ e não há simetrias em torno de qualquer um dos eixos nem da origem (Seção 1.4).
2. *Determine y' e y''.*

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$$

Intercepto do eixo x em $x = -1$. Intercepto do eixo y $(y = 1)$ em $x = 0$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)\cdot 2(x+1) - (x+1)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Pontos críticos: $x = -1, x = 1$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2 \cdot 2(-2x) - 2(1-x^2)[2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

Depois de alguns cálculos algébricos.

3. *Comportamento nos pontos críticos.* Os pontos críticos ocorrem apenas em $x = \pm 1$, onde $f'(x) = 0$ (passo 2), uma vez que f'' existe em qualquer ponto ao longo do domínio de f. Em $x = -1$, $f''(-1) = 1 > 0$, o que resulta, conforme o teste da segunda derivada, em um mínimo relativo. Em $x = 1$, $f''(1) = -1 < 0$, o que resulta, ainda segundo o teste da segunda derivada, em um máximo relativo. Veremos no passo 6 que esses dois valores também são extremos absolutos.
4. *Subida e descida.* Vemos que, no intervalo $(-\infty, -1)$, a derivada $f'(x) < 0$ e a curva desce. No intervalo $(-1, 1)$, $f'(x) > 0$ e a curva sobe; ela desce em $(1, \infty)$, onde $f'(x) < 0$ de novo.
5. *Pontos de inflexão.* Observe que o denominador da segunda derivada (passo 2) é sempre positivo. A segunda derivada f'' é nula quando $x = -\sqrt{3}$, 0 e $\sqrt{3}$. Ela muda de sinal em cada um desses pontos: é negativa em $(-\infty, -\sqrt{3})$, positiva em $(-\sqrt{3}, 0)$, negativa em $(0, \sqrt{3})$ e positiva de novo em $(\sqrt{3}, \infty)$. Assim, cada ponto é um ponto de inflexão. A curva é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -\sqrt{3})$, côncava para cima em $(-\sqrt{3}, 0)$ e côncava para baixo em $(0, \sqrt{3})$, tornando-se côncava para cima de novo em $(\sqrt{3}, \infty)$.

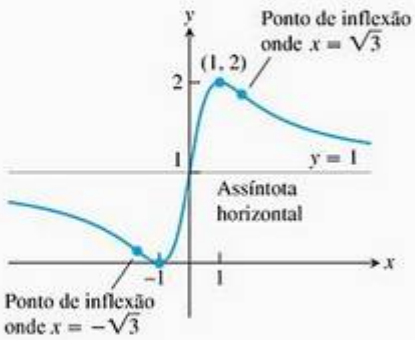


FIGURA 4.32 O gráfico de $y = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$ (Exemplo 7).

6. *Assíntotas.* Expandindo o numerador de $f(x)$ e dividindo tanto o numerador quanto o denominador por x^2, temos

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2} = \frac{x^2+2x+1}{1+x^2} \qquad \text{Expandindo o numerador.}$$

$$= \frac{1+(2/x)+(1/x^2)}{(1/x^2)+1} \qquad \text{Dividindo por } x^2$$

Vemos que $f(x) \to 1^+$, conforme $x \to \infty$ e que $f(x) \to 1^-$, conforme $x \to -\infty$. Assim, a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

Como f desce em $(-\infty, -1)$ e, em seguida, sobe em $(-1, 1)$, sabemos que $f(-1) = 0$ é um mínimo local. Embora f desça em $(1, \infty)$, ela nunca cruza a assíntota horizontal $y = 1$ nesse intervalo (ela se aproxima da assíntota de cima para baixo). Portanto, o gráfico nunca se torna negativo, e $f(-1) = 0$ é um mínimo absoluto também. De modo análogo, $f(1) = 2$ é um máximo absoluto porque o gráfico nunca cruza a assíntota $y = 1$ no intervalo $(-\infty, -1)$, aproximando-se dela de baixo para cima. Conseqüentemente, não existem assíntotas verticais (a imagem de f é $0 \le y \le 2$).

7. O gráfico de f é esboçado na Figura 4.32. Observe como a curva fica côncava para baixo, conforme se aproxima da assíntota horizontal $y = 1$, quando $x \to -\infty$, e côncava para cima ao se aproximar de $y = 1$, quando $x \to \infty$.

EXEMPLO 8 Esboçando um gráfico

Esboce o gráfico de $f(x) = e^{2/x}$

SOLUÇÃO O domínio de f é $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ e não há simetrias nem em torno dos eixos nem da origem. As derivadas de f são

$$f'(x) = e^{2/x}\left(-\frac{2}{x^2}\right) = \frac{-2e^{2/x}}{x^2}$$

e

$$f''(x) = \frac{x^2(2e^{2/x})(-2/x^2) - 2e^{2/x}(2x)}{x^4} = \frac{4e^{2/x}(1+x)}{x^4}$$

Ambas as derivadas existem em qualquer ponto do domínio de f. Além disso, como $e^{2/x}$ e x^2 são ambos positivos para qualquer $x \neq 0$, vemos que $f' < 0$ em qualquer ponto ao longo do domínio, e a curva está sempre subindo. Examinando a segunda derivada, vemos que $f''(x) = 0$ em $x = -1$. Como $e^{2/x} > 0$ e $x^4 > 0$, temos $f'' < 0$ para $x < -1$ e $f'' > 0$ para $x > -1$, $x \neq 0$. Portanto, o ponto $(-1, e^{-2})$ é um ponto de inflexão. A curva é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -1)$ e côncava para cima ao longo de $(-1, 0) \cup (0, \infty)$.

Pelo Exemplo 12 da Seção 2.4, vemos que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$. Quando $x \to 0^+$, vemos que $2/x \to \infty$, portanto $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ e o eixo y é uma assíntota vertical. Além disso, quando $x \to -\infty$, $2/x \to 0^-$, portanto $\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^0 = 1$. Conseqüentemente, $y = 1$ é uma assíntota horizontal. Não há extremos absolutos, já que f nunca assume o valor 0. O gráfico de f é esboçado na Figura 4.33.

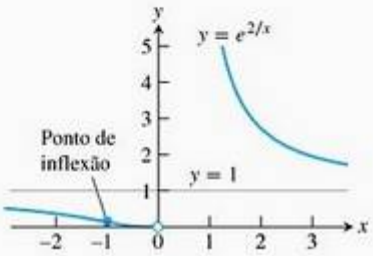
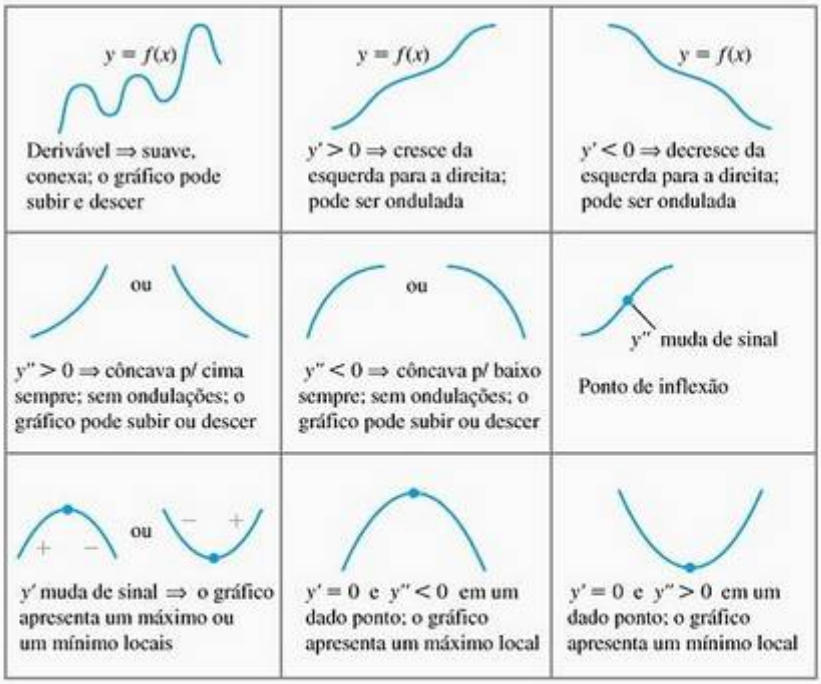


FIGURA 4.33 O gráfico de $y = e^{2/x}$ apresenta um ponto de inflexão em $(-1, e^{-2})$. A reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal e $x = 0$ é uma assíntota vertical (Exemplo 8).

Aprendendo sobre funções a partir das derivadas

Como vimos nos exemplos 6 a 8, podemos saber quase tudo o que precisamos sobre uma função duplamente derivável $y = f(x)$ examinando sua primeira derivada. Podemos saber onde o gráfico da função sobe ou desce e onde esta admite quaisquer extremos locais. Podemos derivar y' para saber como o gráfico se curva quando passa pelos intervalos de subida e de descida. Podemos determinar a forma do gráfico da função. A informação que não conseguimos obter a partir da derivada é como colocar o gráfico no plano cartesiano. Mas, conforme descobrimos na Seção 4.2, a única informação adicional de que necessitamos para situar o gráfico é o valor de f em um ponto. A derivada não nos dá informações sobre as assíntotas, mas podemos obtê-las usando limites (seções 2.4 e 2.5).

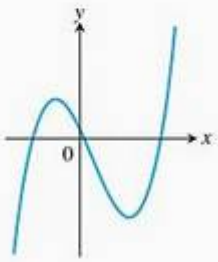


Exercícios 4.4

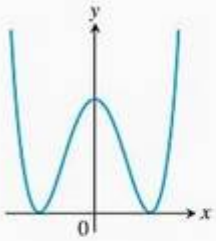
Analisando funções representadas graficamente

Identifique os pontos de inflexão e os mínimos e os máximos locais das funções representadas graficamente nos exercícios 1–8. Identifique os intervalos em que as funções são côncavas para cima e para baixo.

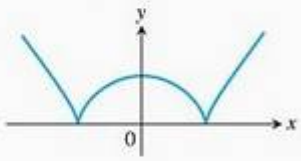
1. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$



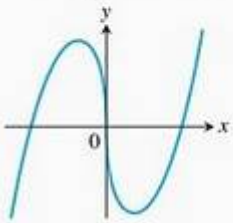
2. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$



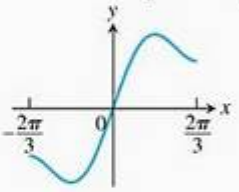
3. $y = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^{2/3}$



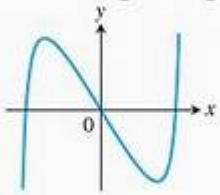
4. $y = \frac{9}{14}x^{1/3}(x^2 - 7)$



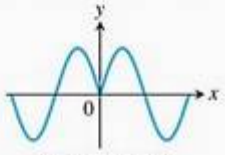
5. $y = x + \operatorname{sen} 2x, -\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$



6. $y = \operatorname{tg} x - 4x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

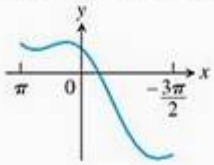


7. $y = \operatorname{sen} |x|, -2\pi \le x \le 2\pi$



FORA DE ESCALA

8. $y = 2\cos x - \sqrt{2}x, -\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$



Fazendo gráficos de equações

Represente graficamente as equações dos exercícios 9–42 seguindo os passos do procedimento para construção de gráficos (página 295). Inclua as coordenadas de quaisquer extremos locais e pontos de inflexão.

9. $y = x^2 - 4x + 3$

10. $y = 6 - 2x - x^2$

11. $y = x^3 - 3x + 3$

12. $y = x(6 - 2x)^2$

13. $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$

14. $y = (x - 2)^3 + 1$

15. $y = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$

16. $y = -x^4 + 6x^2 - 4 = x^2(6 - x^2) - 4$

17. $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$

18. $y = x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2)$

19. $y = x^5 - 5x^4 = x^4(x - 5)$

20. $y = x\left(\frac{x}{2} - 5\right)^4$

21. $y = x + \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

22. $y = x - \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

23. $y = x^{1/5}$

24. $y = x^{2/5}$

25. $y = 2x - 3x^{2/3}$

26. $y = x^{2/3}\left(\frac{5}{2} - x\right)$

27. $y = x\sqrt{8 - x^2}$

28. $y = (2 - x^2)^{3/2}$

29. $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}, \quad x \ne 2$

30. $y = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$

31. $y = |x^2 - 1|$

32. $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

33. $y = xe^{1/x}$

34. $y = \frac{e^x}{x}$

35. $y = \ln(3 - x^2)$

36. $y = x(\ln x)^2$

37. $y = e^x - 2e^{-x} - 3x$

38. $y = xe^{-x}$

39. $y = \ln(\cos x)$

40. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

41. $y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

42. $y = \frac{e^x}{1 + e^x}$

Esboçando a forma geral a partir de y'

Cada um dos exercícios 43–62 fornece a primeira derivada de uma função contínua $y = f(x)$. Determine y'' e, em seguida, esboce a forma geral do gráfico de f seguindo os passos 2–4 do procedimento para construção de gráficos (página 295).

43. $y' = 2 + x - x^2$

44. $y' = x^2 - x - 6$

45. $y' = x(x - 3)^2$

46. $y' = x^2(2 - x)$

47. $y' = x(x^2 - 12)$

48. $y' = (x^2 - 2x)(x - 5)^2$

49. $y' = \sec^2 x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

50. $y' = \operatorname{tg} x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

51. $y' = \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$

52. $y' = \operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$

53. $y' = \operatorname{tg}^2\theta - 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

54. $y' = 1 - \operatorname{cotg}^2\theta, \quad 0 < \theta < \pi$

55. $y' = \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

56. $y' = \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

57. $y' = (x + 1)^{-2/3}$

58. $y' = (x - 2)^{-1/3}$

59. $y' = x^{-2/3}(x - 1)$

60. $y' = x^{-4/5}(x + 1)$

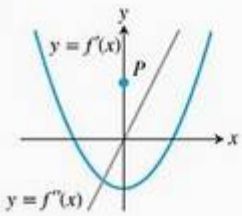
61. $y' = 2|x| = \begin{cases} -2x, & x \le 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$

62. $y' = \begin{cases} -x^2, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

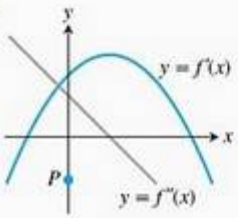
Esboçando y a partir dos gráficos y' e y''

Cada um dos exercícios 63–66 apresenta o gráfico da primeira e da segunda derivada de uma função $y = f(x)$. Copie a figura e adicione a ela o esboço de f, considerando que a curva passa pelo ponto P.

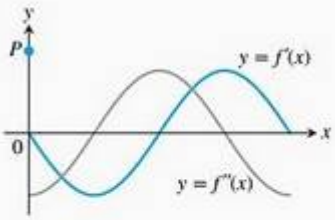
63.



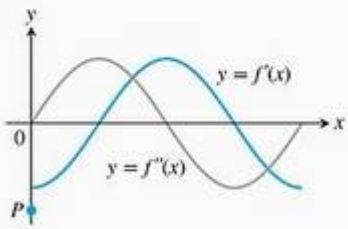
64.



65.

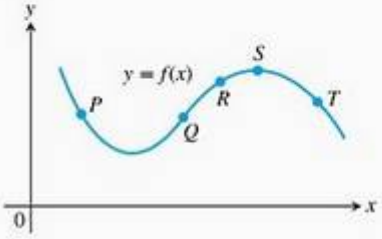


66.



Teoria e exemplos

67. A figura a seguir mostra uma parte do gráfico de uma função duplamente derivável $y = f(x)$. Em cada um dos cinco pontos marcados, classifique y' e y'' como positiva, negativa ou nula.



68. Esboce uma curva contínua $y = f(x)$ que obedeça às propriedades a seguir.

$f(-2) = 8, \quad f'(2) = f'(-2) = 0,$

$f(0) = 4, \quad f'(x) < 0$ para $|x| < 2$

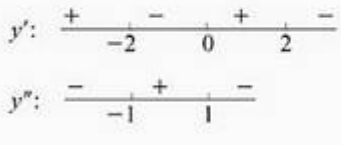
$f(2) = 0, \quad f''(x) < 0$ para $x < 0$

$f'(x) > 0$ para $|x| > 2, \quad f''(x) > 0$ para $x > 0$.

69. Esboce o gráfico da função duplamente derivável $y = f(x)$ a partir das propriedades dadas a seguir. Quando for possível, indique as coordenadas.

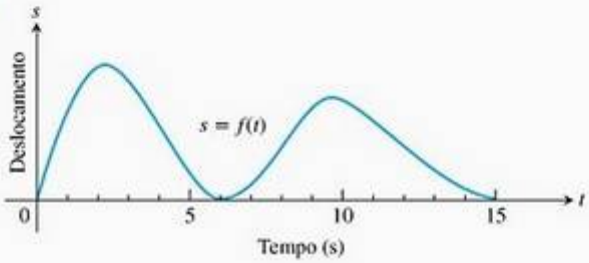
x	y	Derivadas
$x < 2$		$y' < 0, \quad y'' > 0$
2	1	$y' = 0, \quad y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0, \quad y'' > 0$
4	4	$y' > 0, \quad y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0, \quad y'' < 0$
6	7	$y' = 0, \quad y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0, \quad y'' < 0$

70. Esboce o gráfico de uma função duplamente derivável $y = f(x)$ que passe pelos pontos $(-2, 2)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 2)$ e cujas primeiras duas derivadas tenham a seguinte distribuição de sinais:

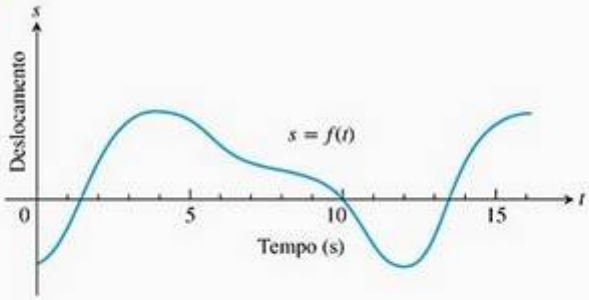


Deslocamento sobre uma reta Nos exercícios 71 e 72, os gráficos mostram a posição $s = f(t)$ de um corpo que se desloca para a frente e para trás sobre uma reta coordenada. **(a)** Quando o corpo está se afastando da origem? E se aproximando dela? Em que instantes, aproximadamente, a partícula apresenta **(b)** velocidade igual a zero? **(c)** aceleração igual a zero? **(d)** Quando a aceleração é positiva? E negativa?

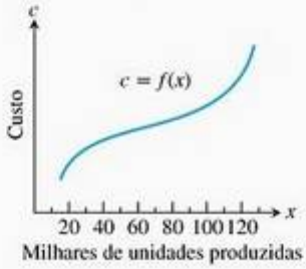
71.



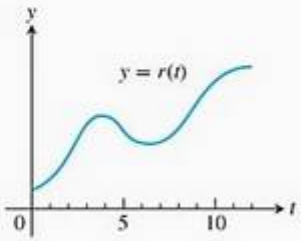
72.



73. Custo marginal O gráfico a seguir mostra o custo hipotético $c = f(x)$ em que se incorre para fabricar x itens. Em aproximadamente qual nível de produção o custo marginal muda de decrescente para crescente?



74. O gráfico a seguir mostra a receita mensal da Widget Corporation nos últimos 12 anos. Durante aproximadamente quais intervalos de tempo a receita marginal foi crescente? E decrescente?



75. Suponha que a derivada da função $y = f(x)$ seja

$$y' = (x - 1)^2(x - 2)$$

Em quais pontos, se houver algum, o gráfico de f apresenta um mínimo local, um máximo local ou um ponto de inflexão? (*Dica*: desenhe o padrão de sinais de y'.)

76. Suponha que a derivada da função $y = f(x)$ seja

$$y' = (x - 1)^2(x - 2)(x - 4)$$

Em quais pontos, se houver algum, o gráfico de f apresenta um mínimo local, um máximo local ou um ponto de inflexão?

77. Para $x > 0$, esboce a curva $y = f(x)$ que tem $f(1) = 0$ e $f'(x) = 1/x$. O que se pode dizer sobre a concavidade dessa curva? Justifique sua resposta.

78. O que se pode dizer sobre o gráfico de uma função $y = f(x)$ que possui uma segunda derivada contínua que nunca é zero? Justifique sua resposta.

79. Se b, c, e d são constantes, para qual valor de b a curva $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ apresentará um ponto de inflexão em $x = 1$? Justifique sua resposta.

80. **Tangentes horizontais** Verdadeiro ou falso? Explique.

(a) O gráfico de qualquer polinômio de grau par (maior expoente par) tem pelo menos uma tangente horizontal.

(b) O gráfico de qualquer polinômio de grau ímpar (maior expoente ímpar) tem pelo menos uma tangente horizontal.

81. **Parábolas**

(a) Determine as coordenadas do vértice da parábola

$$y = ax^2 + bx + c, \; a \neq 0$$

(b) Onde essa parábola é côncava para cima? E côncava para baixo? Justifique sua resposta.

82. É verdade que a concavidade da curva de uma função duplamente derivável $y = f(x)$ muda toda vez que $f''(x) = 0$? Justifique sua resposta.

83. **Curvas quadráticas** O que se pode dizer sobre os pontos de inflexão de uma curva quadrática $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$? Justifique sua resposta.

84. **Curvas cúbicas** O que se pode dizer sobre os pontos de inflexão de uma curva cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$? Justifique sua resposta.

USANDO O COMPUTADOR

Nos exercícios 85–88, determine os pontos de inflexão (se houver) no gráfico da função e também as coordenadas dos pontos no gráfico onde a função possui máximos ou mínimos locais. Depois, esboce o gráfico da função em uma região suficientemente grande para visualizar todos esses pontos. Adicione à sua figura os gráficos da primeira e da segunda derivada da função. Como se relacionam com o gráfico da função os valores onde esses gráficos cruzam o eixo x? De que outras maneiras os gráficos das derivadas se relacionam com o gráfico da função?

85. $y = x^5 - 5x^4 - 240$

86. $y = x^3 - 12x^2$

87. $y = \frac{4}{5}x^5 + 16x^2 - 25$

88. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 20$

89. Esboce o gráfico de $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ juntamente com o de suas primeiras duas derivadas. Comente o comportamento de f em relação aos sinais e valores de f' e f''.

90. Esboce o gráfico de $f(x) = x \cos x$ juntamente com sua segunda derivada para $0 \leq x \leq 2\pi$. Comente o comportamento de f em relação aos sinais e valores de f''.

91. (a) Na mesma tela, trace o gráfico de $f(x) = x^3 + kx$ para $k = 0$ e para valores positivos e negativos próximos a k. Como o valor de k parece influenciar a forma do gráfico?

(b) Determine $f'(x)$. Como você vê, $f'(x)$ é uma função quadrática de x. Determine o discriminante da equação quadrática (o discriminante de $ax^2 + bx + c$ é $b^2 - 4ac$). Para quais valores de k o discriminante é positivo? E nulo? E negativo? Para quais valores de k a função f' tem duas raízes? E uma ou nenhuma raiz? Agora, explique o que o valor de k tem a ver com a forma do gráfico de f.

(c) Experimente com outros valores de k. O que parece acontecer quando $k \to -\infty$? E quando $k \to \infty$?

92. (a) Na mesma tela, trace os gráficos de $f(x) = x^4 + kx^3 + 6x^2$, $-2 \leq x \leq 2$ para $k = -4$, e para valores de k inteiros próximos. Como o valor de k parece influenciar a forma do gráfico?

(b) Determine $f''(x)$. Como você vê, $f''(x)$ é uma função quadrática de x. Qual é o discriminante dessa função quadrática (veja o Exercício 91b)? Para quais valores de k o discriminante é positivo? E nulo? E negativo? Para quais valores de k a função $f''(x)$ tem duas raízes? E uma ou nenhuma raiz? Agora, explique o que o valor de k tem a ver com a forma do gráfico de f.

93. (a) Faça o gráfico de $y = x^{2/3}(x^2 - 2)$ para $-3 \leq x \leq 3$. Em seguida, use procedimentos de cálculo para confirmar o que a tela mostra sobre concavidade, subida e descida da curva. (Dependendo da sua ferramenta gráfica, você pode ter de digitar $x^{2/3}$ como $(x^2)^{1/3}$ para traçar os valores negativos de x no plano de coordenadas.)

(b) A curva apresenta um ponto cuspidal em $x = 0$, ou se trata apenas de um bico com derivadas diferentes à direita e à esquerda?

94. (a) Faça o gráfico de $y = 9x^{2/3}(x - 1)$ para $-0{,}5 \le x \le 1{,}5$. Em seguida, use procedimentos de cálculo para confirmar o que a tela mostra sobre concavidade, subida e descida da curva. Qual tipo de concavidade a curva tem à esquerda da origem? (Dependendo da sua ferramenta gráfica, você pode ter de digitar $x^{2/3}$ como $(x^2)^{1/3}$ para obter os valores negativos de x no plano de coordenadas.)

(b) A curva apresenta um ponto cuspidal em $x = 0$, ou se trata apenas de um bico com derivadas diferentes à direita e à esquerda?

95. A curva $y = x^2 + 3 \operatorname{sen} 2x$ possui uma tangente horizontal próximo de $x = -3$? Justifique sua resposta.

4.5 Problemas de otimização aplicada

Otimizar alguma coisa significa maximizar ou minimizar alguns de seus aspectos. Quais as dimensões de um retângulo com perímetro fixo que lhe dão a máxima área? Qual é a forma mais econômica de uma lata cilíndrica? Qual é a dimensão mais lucrativa para uma linha de produção? O cálculo diferencial é uma poderosa ferramenta para resolver problemas que exigem a maximização ou a minimização de uma função. Nesta seção, resolveremos uma série de problemas de otimização relacionados a negócios, matemática, física e economia.

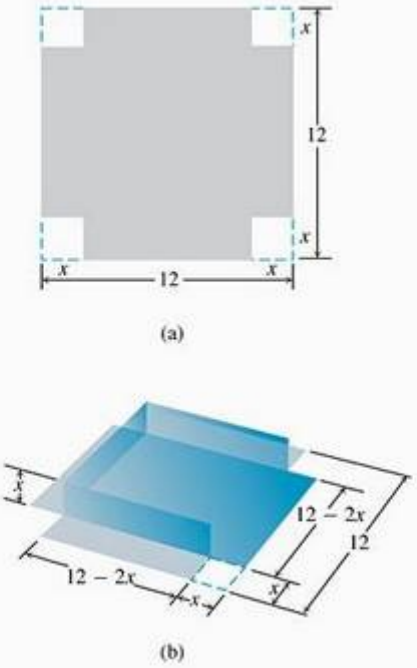


FIGURA 4.34 Uma caixa sem tampa feita recortando-se os cantos de uma chapa quadrada de estanho. Que tamanho dos quadrados das bordas maximiza o volume da caixa (Exemplo 1)?

Exemplos da indústria e do comércio

EXEMPLO 1 Confeccionando uma caixa

Uma caixa sem tampa será feita recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha de estanho medindo 12×12 pol e dobrando-se os lados para cima. Que tamanho os quadrados das bordas devem ter para que a caixa chegue à sua capacidade máxima?

SOLUÇÃO Começaremos com um esquema (Figura 4.34). Nele, os quadrados nos cantos têm x pol de lado. O volume total da caixa é uma função dessa variável:

$$V(x) = x(12 - 2x)^2 = 144x - 48x^2 + 4x^3 \qquad V = hlw$$

Como os lados da folha de estanho medem só 12 pol, $x \le 6$ cm, o domínio de V é o intervalo $0 \le x \le 6$.

Um gráfico de V (Figura 4.35) sugere um valor mínimo de 0 quando $x = 0$ e $x = 6$ e um máximo próximo de $x = 2$. Para descobrirmos mais, examinamos a primeira derivada de V em relação a x:

$$\frac{dV}{dx} = 144 - 96x + 12x^2 = 12(12 - 8x + x^2) = 12(2 - x)(6 - x)$$

Das duas raízes, $x = 2$ e $x = 6$, apenas $x = 2$ está contida no domínio da função, fazendo parte da lista de pontos críticos. Os valores de V nesse único ponto crítico e nas duas extremidades são:

Valor no ponto crítico: $V(2) = 128$

Valores nas extremidades: $V(0) = 0, \quad V(6) = 0$

O volume máximo é 128 pol^3. Os quadrados a serem recortados devem ter 2 pol de lado.

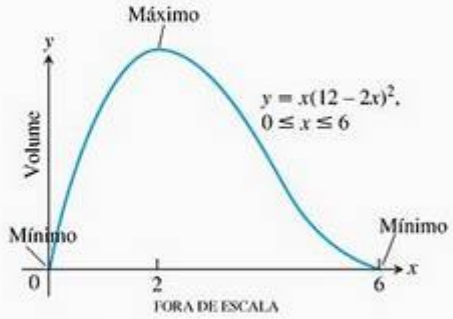


FIGURA 4.35 O volume da caixa da Figura 4.34 traçado em função de x.

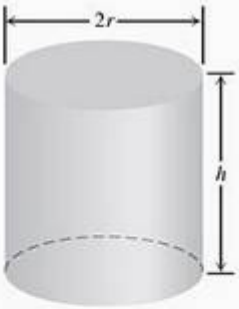


FIGURA 4.36 Esta lata de 1 l pode utilizar menos material para ser produzida quando $h = 2r$ (Exemplo 2).

EXEMPLO 2 Projetando uma lata cilíndrica

Pediram a você que projetasse uma lata de um litro com a forma de um cilindro reto (Figura 4.36). Que dimensões exigirão menos material?

SOLUÇÃO *Volume da lata*: Se r e h forem medidos em centímetros, então o volume da lata, em centímetros cúbicos, será

$$\pi r^2 h = 1.000 \quad \text{1 litro} = 1.000\ \text{cm}^3$$

Área da superfície da lata: $$A = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{bases circulares}} = \underbrace{2\pi rh}_{\text{parede do cilindro}}$$

Como se pode interpretar a expressão 'menos material'? Uma possibilidade é ignorar a espessura do material e o desperdício durante a fabricação. Então, procuramos as dimensões r e h que permitam que a área da superfície total seja a menor possível e, ainda assim, satisfaçam a exigência de que $\pi r^2 h = 1.000$.

Para expressar a área da superfície em função de uma variável, isolamos uma delas em $\pi r^2 h = 1.000$ e a substituímos na fórmula da área da superfície. Isolar h é mais fácil:

$$h = \frac{1.000}{\pi r^2}$$

Assim,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi rh \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1.000}{\pi r^2}\right) \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2.000}{r} \end{aligned}$$

Nosso objetivo é determinar um valor de $r > 0$ que minimize o valor de A. A Figura 4.37 sugere que esse valor existe.

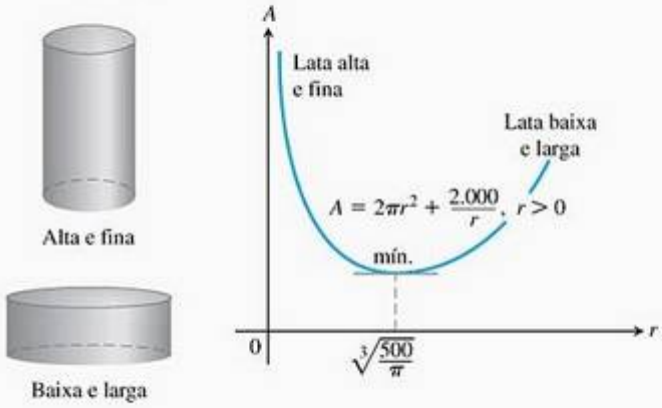


FIGURA 4.37 O gráfico de $A = 2\pi r^2 + 2.000/r$ é côncavo para cima.

Observe no gráfico que, para valores pequenos de r (uma lata alta e fina, como um pedaço de cano), o termo $2.000/r$ predomina e A é grande. Para r grande (uma lata baixa e larga, como uma fôrma para pizza), o termo $2\pi r^2$ predomina e A é grande novamente.

Como A é derivável quando $r > 0$, um intervalo sem extremidades, esta pode apresentar um valor mínimo apenas se a primeira derivada for zero.

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2.000}{r^2}$$

$$0 = 4\pi r - \frac{2.000}{r^2} \qquad \text{Fazendo } dA/dr = 0.$$

$$4\pi r^3 = 2.000 \qquad \text{Multiplicando por } r^2.$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42 \qquad \text{Resolvendo para } r.$$

O que acontece quando $r = \sqrt[3]{500/\pi}$?

A segunda derivada

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4.000}{r^3}$$

é positiva ao longo do domínio de A. Portanto, o gráfico é côncavo para cima e o valor de A quando $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ é um mínimo absoluto.

O valor correspondente de h (após um pouco de álgebra) é

$$h = \frac{1.000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

A fabricação usa menos material quando a lata de 1 l possui a altura igual ao diâmetro, com $r \approx 5{,}42$ cm e $h \approx 10{,}84$ cm.

Resolvendo problemas de otimização aplicada

1. *Leia o problema.* Leia o problema até compreendê-lo. Quais informações são fornecidas? Qual é a quantidade desconhecida a ser otimizada?
2. *Faça um desenho.* Indique todas as partes que possam ser importantes para o problema.
3. *Introduza variáveis.* Represente todas as relações no desenho e no problema como uma equação ou expressão algébrica; identifique a variável desconhecida.
4. *Escreva uma equação para a quantidade desconhecida.* Se possível, expresse a quantidade desconhecida em função de uma única variável, ou em duas equações em duas desconhecidas. Isso pode exigir certa manipulação.
5. *Teste os pontos críticos e as extremidades no domínio da quantidade desconhecida.* Utilize o que você sabe sobre a forma do gráfico de uma função. Use a primeira e a segunda derivadas para identificar e classificar pontos críticos da função.

Exemplos da matemática e da física

EXEMPLO 3 Inscrevendo retângulos

Um retângulo deve ser inscrito em uma semicircunferência de raio 2. Qual é a maior área que o retângulo pode ter e quais são suas dimensões?

SOLUÇÃO Sejam $\left(x, \sqrt{4 - x^2}\right)$ as coordenadas do vértice do retângulo obtidas colocando-se o retângulo e a semicircunferência no plano cartesiano (Figura 4.38). O comprimento, a altura e a área do retângulo podem ser expressos em termos da posição x, no canto inferior direito da figura.

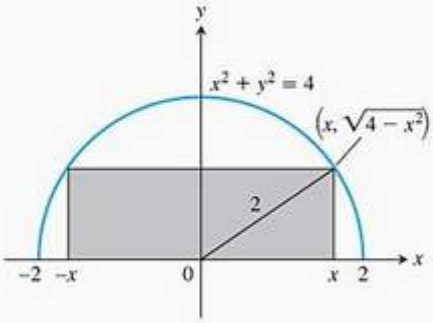


FIGURA 4.38 O retângulo do Exemplo 3 inscrito na semicircunferência.

Companion Website

Biografia histórica

Willebrord Snell van Royen (1580-1626)

Comprimento: $2x$ Altura: $\sqrt{4-x^2}$ Área: $2x \cdot \sqrt{4-x^2}$

Observe que o valor de x deve estar dentro do intervalo $0 \le x \le 2$, onde está o vértice escolhido para o retângulo.

Agora nosso objetivo é determinar o valor máximo absoluto da função

$$A(x) = 2x\sqrt{4-x^2}$$

no domínio $[0, 2]$.

A derivada

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2}$$

não é definida quando $x = 2$ e é igual a zero quando

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} &= 0 \\ -2x^2 + 2(4-x^2) &= 0 \\ 8 - 4x^2 &= 0 \\ x^2 &= 2 \text{ ou } x = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Das duas raízes, $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$, apenas $x = \sqrt{2}$ está no domínio de A e faz parte da lista de pontos críticos. Os valores de A nas extremidades e no único ponto crítico são

Valor no ponto crítico: $A(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4$

Valores nas extremidades: $A(0) = 0, \quad A(2) = 0$

A área máxima que o retângulo pode ter é 4 quando este tem $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2}$ unidades de altura e $2x = 2\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

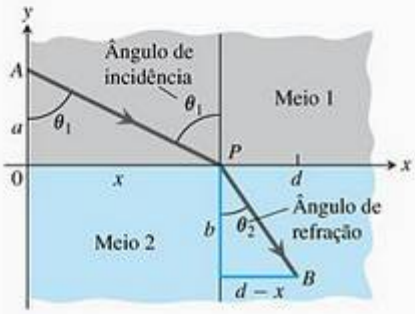


FIGURA 4.39 Um raio de luz sofre refração (é desviado de sua trajetória) quando passa de um meio para outro mais denso (Exemplo 4).

EXEMPLO 4 O princípio de Fermat e a lei de Snell

A velocidade da luz depende do meio que a luz atravessa, tendendo a ser menor em meios mais densos.

No campo da óptica, o princípio de Fermat afirma que a luz sempre se propaga de um ponto para outro por um trajeto que minimiza o tempo de propagação. Determine o caminho que um raio de luz seguirá saindo do ponto A (em um meio onde a velocidade da luz é c_1) até chegar ao ponto B (em outro meio onde a velocidade da luz é c_2).

SOLUÇÃO Como a luz, indo de A para B, fará isso pela rota mais rápida, então buscaremos aquela que minimiza o tempo de percurso. Admitimos que A e B estão no plano cartesiano e que a reta que separa os dois meios é o eixo x (Figura 4.39).

Em um meio uniforme, onde a velocidade da luz permanece constante, o "menor tempo" significa a "menor distância" e, portanto, o raio de luz seguirá uma linha reta. Assim, o caminho de A a B consistirá em um segmento de reta desde A até o ponto P na fronteira, seguido por outro segmento desde P até B. Como a distância é igual à taxa vezes o tempo, temos

$$\text{Tempo} = \frac{\text{distância}}{\text{taxa}}$$

Portanto, o tempo necessário para que a luz viaje de A a P é

$$t_1 = \frac{AP}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1}$$

De P até B, o tempo é

$$t_2 = \frac{PB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}$$

O tempo de A até B é a soma desses dois:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}$$

Essa equação expressa t como uma função derivável de x cujo domínio é $[0, d]$, e o que queremos determinar é o valor mínimo absoluto de t nesse intervalo fechado. Encontramos a derivada

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

Em termos dos ângulos θ_1 e θ_2 da Figura 4.37,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{c_1} - \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{c_2}$$

Se restringimos x ao intervalo $0 \le x \le d$, então t apresenta uma derivada negativa em $x = 0$ e uma derivada positiva em $x = d$. Segundo o teorema do valor intermediário para derivadas (Seção 3.1), existe um ponto $x_0 \in [0, d]$ onde $dt/dx = 0$ (Figura 4.40). Há apenas um ponto nessas condições, pois dt/dx é uma função crescente de x (Exercício 54). Nesse ponto,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{c_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{c_2}$$

Essa equação é a **lei de Snell** ou a **lei da refração**, um princípio importante na teoria da óptica. Tal lei descreve a trajetória do raio de luz.

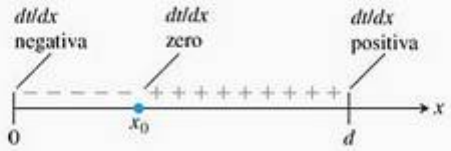


FIGURA 4.40 Padrão de sinais de dt/dx do Exemplo 4.

Exemplos em economia

Nos exemplos a seguir, indicaremos duas situações em que o cálculo dá uma contribuição à economia. A primeira tem a ver com a maximização do lucro; a segunda, com a minimização do custo médio.

Suponha que

$r(x)$ = receita proveniente da venda de x itens.

$c(x)$ = custo da produção de x itens.

$p(x) = r(x) - c(x)$ = lucro sobre a produção e venda de x itens.

A **receita marginal**, o **custo marginal** e o **lucro marginal** provenientes desse nível de produção (x itens) são:

$$\frac{dr}{dx} = \text{receita marginal}$$

$$\frac{dc}{dx} = \text{custo marginal}$$

$$\frac{dp}{dx} = \text{lucro marginal}$$

A primeira observação diz respeito à relação existente entre p e essas derivadas.

Admitimos que $r(x)$ e $c(x)$ são deriváveis para qualquer $x > 0$ e, se $p(x) = r(x) - c(x)$ tem um valor máximo, este ocorre em um nível de produção em que $p'(x) = 0$. Como $p'(x) = r'(x) - c'(x)$, $p'(x) = 0$ implica que

$$r'(x) - c'(x) = 0 \qquad \text{ou} \qquad r'(x) = c'(x)$$

Portanto:

Em um nível de produção que gera lucro máximo, a receita marginal é igual ao custo marginal (Figura 4.41).

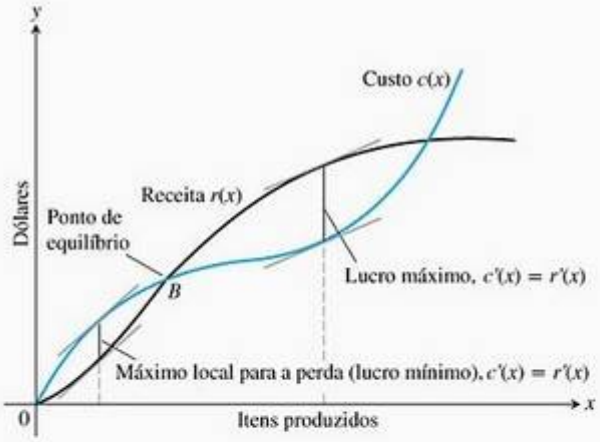


FIGURA 4.41 O gráfico de uma função de custo típica começa côncavo para baixo e depois se torna côncavo para cima, cruzando a curva de receita no ponto de equilíbrio B. À esquerda de B, a empresa opera no prejuízo. À direita, ela opera no lucro, ocorrendo lucro máximo quando $c'(x) = r'(x)$. Mais à direita ainda, o custo excede a receita (talvez devido a uma combinação entre elevação dos custos de mão-de-obra e matéria-prima associados à saturação do mercado) e os níveis de produção tornam-se novamente não lucrativos.

EXEMPLO 5 Maximizando o lucro

Suponha que $r(x) = 9x$ e $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, onde x representa milhares de unidades. Há um nível de produção que maximize o lucro? Se houver, qual é?

SOLUÇÃO Observe que $r'(x) = 9$ e $c'(x) = 3x^2 - 12x + 15$

$$3x^2 - 12x + 15 = 9 \qquad \text{Fazendo } c'(x) = r'(x)$$
$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

As duas soluções da equação quadrática são

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{72}}{6} = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586 \qquad \text{e}$$

$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{72}}{6} = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}414$$

Os níveis de produção possíveis para o lucro máximo são $x \approx 0{,}586$ mil unidades ou $x \approx 3{,}414$ mil unidades. A segunda derivada de $p(x) = r(x) - c(x)$

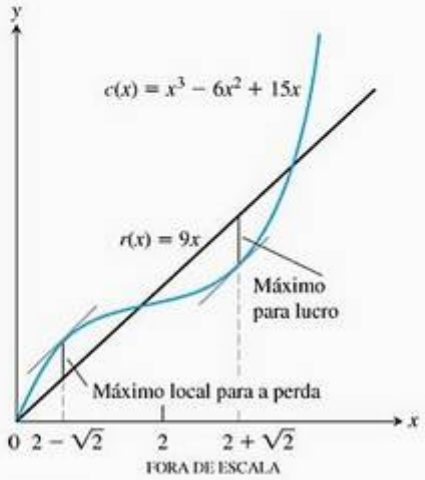


FIGURA 4.42 Curvas de custo e de receita do Exemplo 5.

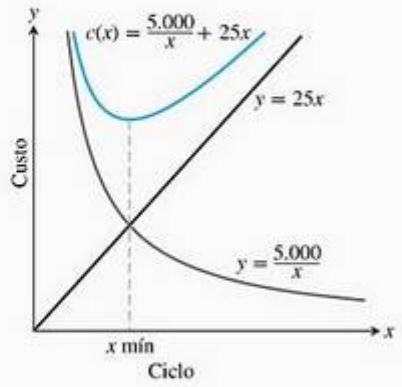


FIGURA 4.43 O custo médio diário $c(x)$ é a soma de uma hipérbole e de uma função linear (Exemplo 6).

é $p''(x) = -c''(x)$, uma vez que $r''(x)$ é zero em toda parte. Assim, $p''(x) = 6(2 - x)$, que é negativa em $x = 2 + \sqrt{2}$ e positiva em $x = 2 - \sqrt{2}$. Segundo o teste da segunda derivada, o lucro máximo ocorre quando $x = 3{,}414$ (onde a receita excede os custos) e a perda máxima ocorre quando $x = 0{,}586$. A Figura 4.42 mostra o gráfico de $r(x)$.

EXEMPLO 6 Minimizando custos

Um fabricante de armários usa mogno reflorestado para produzir cinco peças por dia. Cada entrega de um contêiner de madeira custa \$ 5.000, enquanto sua estocagem custa \$ 10 por dia, por unidade armazenada (uma unidade é a quantidade de matéria-prima necessária para produzir uma peça). Quanta matéria-prima deve ser encomendada de cada vez e com que freqüência, de modo a minimizar o custo médio diário nos ciclos de produção entre as entregas?

SOLUÇÃO Caso ele peça para entregar a matéria-prima a cada x dias, então deverá pedir $5x$ unidades para ter material suficiente para aquele ciclo de entrega. A quantidade *média* em estoque é aproximadamente a metade da quantidade entregue, ou seja, $5x/2$. Assim, o custo de entrega e de estocagem para cada ciclo é de aproximadamente

Custo por ciclo = Custo de entrega + Custo de estocagem

$$\text{Custo por ciclo} = \underbrace{5.000}_{\text{custo de entrega}} + \underbrace{\left(\frac{5x}{2}\right)}_{\text{quantidade média em estoque}} \cdot \underbrace{x}_{\text{número de dias em estoque}} \cdot \underbrace{10}_{\text{custo de estocagem por dia}}$$

Computamos o *custo médio diário* $c(x)$ dividindo o custo por ciclo pelo número x de dias que o ciclo possui (veja a Figura 4.43).

$$c(x) = \frac{5.000}{x} + 25x, \qquad x > 0$$

Conforme $x \to 0$ e $x \to \infty$, o custo médio diário aumenta. Então esperamos que haja um mínimo, mas onde? Nosso objetivo é determinar o número x de dias, entre as entregas, que permite o custo mínimo absoluto.

Determinamos os pontos críticos identificando onde a derivada é zero:

$$c'(x) = -\frac{5.000}{x^2} + 25 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{200} \approx \pm 14{,}14$$

Dos dois pontos críticos, apenas está dentro do domínio de $c(x)$. O valor do ponto crítico do custo médio diário é

$$c\left(\sqrt{200}\right) = \frac{5.000}{\sqrt{200}} + 25\sqrt{200} = 500\sqrt{2} \approx \$\ 707{,}11$$

Notamos que $c(x)$ está definida no intervalo aberto $(0, \infty)$ com $c''(x) = 10.000/x^3 > 0$. Portanto, um valor mínimo absoluto em $x = \sqrt{200} \approx 14{,}14$ dias.

O fabricante de armários deve programar a entrega de $5(14) = 70$ unidades de mogno a cada 14 dias.

Nos exemplos 5 e 6, deixamos o número de itens x ser qualquer número real positivo. Na verdade, em geral só faz sentido que x seja um inteiro positivo (ou zero). Mas, se tivermos de arredondar nossas respostas, devemos arredondar para cima ou para baixo?

EXEMPLO 7 Sensibilidade do custo mínimo

Devemos arredondar para mais ou para menos o número de dias entre as entregas para a melhor solução do Exemplo 6?

SOLUÇÃO O custo médio diário aumentará cerca de \$ 0,03 se arredondarmos os 14,14 dias para 14 dias:

$$c(14) = \frac{5.000}{14} + 25(14) = \$\ 707{,}14$$

e

$$c(14) - c(14{,}14) = \$\ 707{,}14 - \$\ 707{,}11 = \$\ 0{,}03$$

Por outro lado, $c(15) = \$\ 708{,}33$ e, se arredondássemos para mais, nosso custo aumentaria em \$ 708,33 – \$ 707,11 = \$ 1,22. Portanto, é melhor arredondar x para menos, 14 dias.

Exercícios 4.5

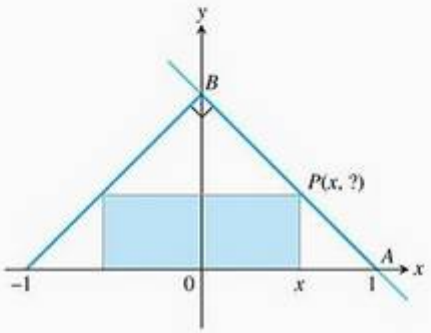
Sempre que estiver maximizando ou minimizando uma função com uma variável, enfatizamos que você deve esboçar o gráfico dessa função no domínio apropriado ao problema que está sendo resolvido. O gráfico vai situá-lo antes de você iniciar os cálculos, além de propiciar o contexto visual para compreender sua resposta.

Aplicações em geometria

1. **Minimizando o perímetro** Qual é o menor perímetro possível para um retângulo cuja área é 16 pol^2 e quais são suas dimensões?

2. Demonstre que, entre todos os retângulos com perímetro de 8 m, o de maior área é um quadrado.

3. A figura a seguir apresenta um retângulo inscrito em um triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa tem 2 unidades de comprimento.
   (a) Expresse a ordenada de P em termos de x. (*Dica*: Escreva uma equação para a reta AB.)
   (b) Expresse a área do retângulo em termos de x.
   (c) Qual é a maior área possível para o retângulo? Quais são suas dimensões?



4. Um retângulo tem sua base no eixo x e seus dois vértices superiores na parábola $y = 12 - x^2$. Qual é a maior área que esse retângulo pode ter? Quais são suas dimensões?

5. Você está planejando construir uma caixa retangular aberta com uma folha de papelão de 8 × 15 pol recortando quadrados congruentes dos vértices da folha e dobrando suas bordas para cima. Quais são as dimensões da caixa de maior volume que você pode fazer dessa maneira? Qual é o volume?

6. Você planeja fechar um canto do primeiro quadrante com um segmento de reta de 20 unidades de comprimento, que vai de $(a, 0)$ a $(0, b)$. Demonstre que a área do triângulo determinado pelo segmento é máxima quando $a = b$.

7. **O melhor esquema para a cerca** Uma área retangular em uma fazenda será cercada por um rio e nos outros três lados por uma cerca elétrica feita de um fio. Com 800 m de fio à disposição, qual é a maior área que você pode cercar e quais são suas dimensões?

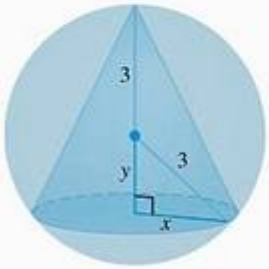
8. **A cerca mais curta** Uma horta de ervilhas retangular com 216 m^2 será cercada e dividida em duas partes iguais por outra cerca paralela a um dos lados. Quais as dimensões do retângulo externo que exigirão a menor quantidade total de cerca? Quantos metros de cerca serão necessários?

9. **Projetando um tanque** Sua metalúrgica foi contratada por uma fábrica de papel para projetar e construir um tanque retangular de aço, com base quadrada, sem tampa e com 500 $pés^3$ de capacidade. O tanque será construído soldando-se chapas de aço umas às outras ao longo das bordas. Como engenheiro de produção, sua tarefa é determinar as dimensões para a base e a altura que farão o tanque pesar o mínimo possível.
   (a) Que dimensões serão passadas para a oficina?
   (b) Descreva, sucintamente, como você levou o peso em consideração.

10. **Captando água da chuva** Um tanque retangular com 1.125 $pés^3$ de capacidade, de base quadrada, medindo x pés de lado e tendo y pés de profundidade, será construído com a parte superior nivelada com o solo para captar água pluvial. O custo associado ao tanque envolve não só o material a ser utilizado, mas também uma taxa de escavação proporcional ao produto xy.
   (a) Sendo o custo total
   $$c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy$$
   que valores de x e y vão minimizá-lo?
   (b) Apresente um cenário possível para a função custo do item (a).

11. **Desenhando um pôster** Você está preparando um pôster retangular para conter 50 pol^2 de material impresso, com margens superior e inferior de 4 pol cada e margens à direita e à esquerda de 2 pol cada. Que dimensões gerais minimizarão a quantidade de papel a ser utilizada?

12. Determine o volume do maior cone de revolução que pode ser inscrito em uma esfera de raio 3.

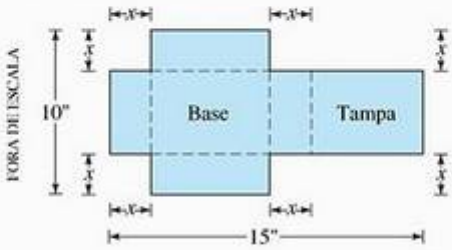


13. Dois lados de um triângulo medem a e b, e o ângulo entre eles é θ. Qual é o valor de θ que maximizará a área do triângulo? (*Dica*: $A = (1/2)ab \operatorname{sen} \theta$.)

14. **Projetando uma lata** Quais são as dimensões mais leve da lata em forma de cilindro reto, sem tampa, para conter 1.000 cm^3? Compare esse resultado com o do Exemplo 2.

15. **Projetando uma lata** Você está projetando uma lata (um cilindro de revolução) de 1.000 cm^3 cuja manufatura levará o desperdício em conta. Não há desperdício ao se cortar a lateral de alumínio, mas tanto a base como o topo, ambos de raio r, serão recortados de quadrados que medem $2r$ de lado. Portanto, a quantidade total de alumínio usada para fazer uma lata será
   $$A = 8r^2 + 2\pi rh$$
   em vez de $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ como no Exemplo 2. Nele, a razão $h{:}r$ para a lata mais econômica foi 2:1. Qual é essa razão agora?

16. **Projetando uma caixa com tampa** Uma folha de papelão
T mede 10 × 15 pol. Dois quadrados iguais são recortados dos vértices de um lado que tem 10 pol, como indica a figura. Dois retângulos iguais são recortados dos outros vértices de modo que as abas possam ser dobradas para formar uma caixa retangular com tampa.



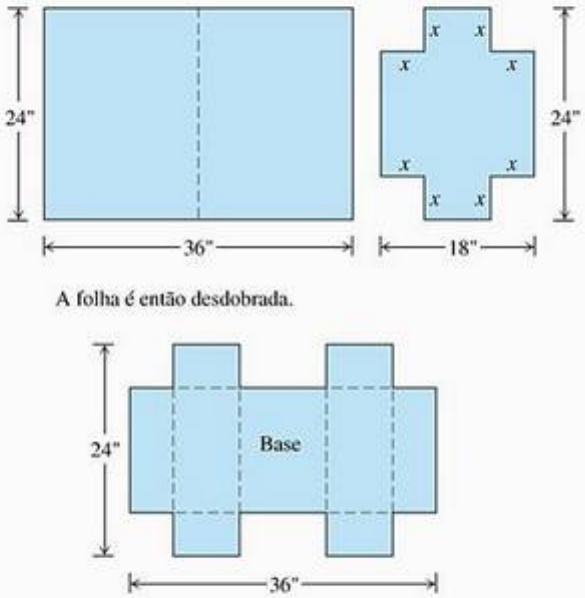
   (a) Escreva uma fórmula $V(x)$ para o volume da caixa.
   (b) Determine o domínio de V para esse problema e esboce o gráfico de V nesse domínio.
   (c) Use um método gráfico para determinar o volume máximo e o respectivo valor de x que o fornece.
   (d) Confirme analiticamente seu resultado do item (c).

17. **Projetando uma mala** Uma folha de papelão medindo
T 24 × 36 pol é dobrada ao meio para formar um retângulo de 24 × 18 pol, como se vê na figura a seguir. Depois, quatro quadrados congruentes com lados medindo x são recortados dos vértices do retângulo dobrado. A folha é desdobrada e seis abas são dobradas para cima, formando uma caixa com laterais e uma tampa.
   (a) Escreva a fórmula $V(x)$ para o volume da caixa.
   (b) Determine o domínio de V para esse problema e trace o gráfico de V nesse domínio.
   (c) Use um método gráfico para determinar o volume máximo e o respectivo valor de x que o fornece.

(d) Confirme analiticamente seu resultado do item (c).

(e) Determine o valor de x que fornece um volume de 1.120 pol^3.

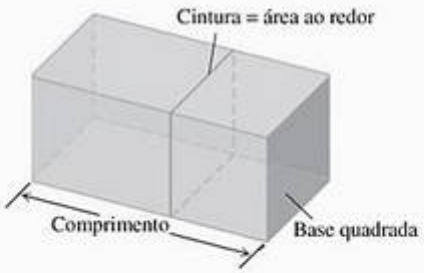
(f) Escreva um parágrafo discutindo as questões que surgem a partir do item (b).



18. Um retângulo será inscrito em um arco da curva $y = 4 \cos(0{,}5x)$, de $x = -\pi$ a $x = \pi$. Quais são as dimensões do retângulo de maior área e qual é a maior área?

19. Determine as dimensões de um cilindro circular reto com o maior volume possível que possa ser inscrito em uma esfera de raio de 10 cm. Qual é seu volume máximo?

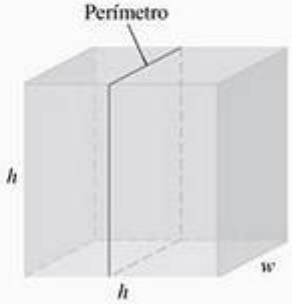
20. (a) O serviço postal norte-americano aceita somente caixas para entrega doméstica se a soma de seu comprimento e sua cintura não ultrapassa 108 pol. Que dimensões terá uma caixa com base quadrada para ter o maior volume possível?



(b) Esboce o gráfico do volume de uma caixa com 108 pol (comprimento mais cintura) em função de seu comprimento e compare o que você vê com o que observou no item (a).

21. (*Continuação do Exercício 20.*)

(a) Suponha que, em vez de uma caixa com base quadrada, você possua uma caixa com lados quadrados cujas dimensões sejam $h \times h \times w$ e cuja cintura seja $2h + 2w$. Que dimensões darão à caixa o maior volume nessas condições?

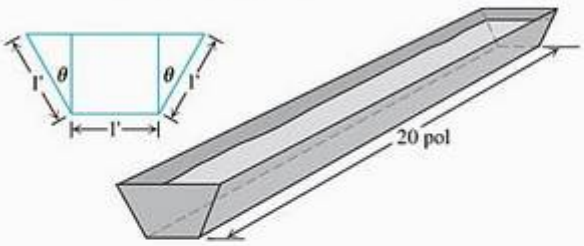


(b) Esboce o gráfico do volume em função de h e compare o que se vê com a resposta dada no item (a).

22. Uma janela possui a forma de um retângulo sob um semicírculo. O retângulo será de vidro transparente, enquanto o semicírculo será de vidro colorido, que transmite apenas metade da luz incidente, por unidade de área, em relação ao vidro transparente. O perímetro total é fixo. Determine as proporções da janela que permitirão a maior passagem de luz. Ignore a espessura do caixilho.

23. Um silo será construído (exceto a base) na forma de um cilindro sob um hemisfério. O custo da construção por unidade de área da superfície é duas vezes maior para o hemisfério em relação ao lado do cilindro. Determine as dimensões para um volume fixo com custos de produção minimizados. Ignore a espessura das paredes e o desperdício durante a construção.

24. O cocho da figura a seguir será feito nas dimensões apresentadas. Apenas o ângulo θ pode variar. Que valor de θ maximiza o volume do cocho?



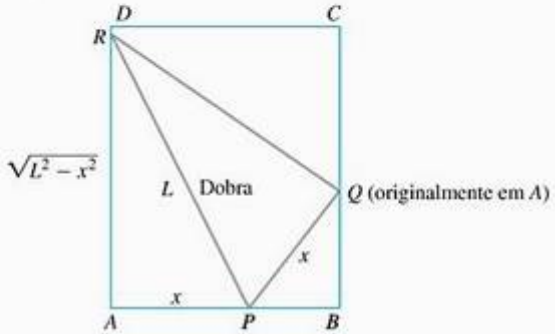
25. **Dobrando papel** Uma folha de papel retangular de 8,5 × 11 pol é colocada em uma superfície plana. Um dos vértices é colocado no lado maior oposto, como mostra a figura, e deixado lá enquanto se dobra e se marca a folha. O problema é tornar o comprimento do vinco

o menor possível. Chamamos esse comprimento de L. Experimente fazer isso com papel.

(a) Demonstre que $L^2 = 2x^3/(2x - 8{,}5)$.

(b) Que valor de x minimiza L^2?

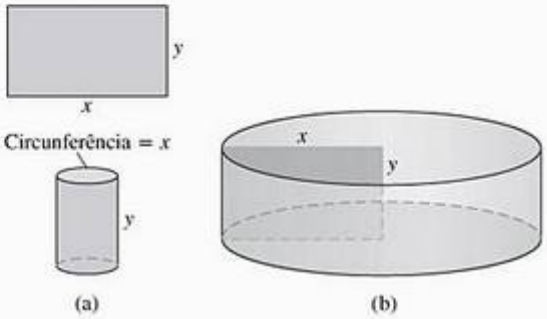
(c) Qual é o valor mínimo de L?



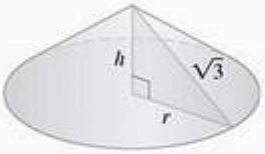
26. Construindo cilindros Compare as respostas dos problemas a seguir.

(a) Uma folha retangular com perímetro de 36 cm e dimensões $x \times y$ cm será enrolada para formar um cilindro, como é mostrado na parte (a) da figura. Que valores de x e y fornecem o maior volume?

(b) A mesma folha sofrerá revolução em torno de um de seus lados de comprimento y para formar outro cilindro, como está indicado na parte (b) da figura. Que valores de x e y fornecem o maior volume?



27. Construindo cones Um triângulo retângulo de hipotenusa $\sqrt{3}$ m gira em torno de um de seus catetos gerando um cone circular reto. Determine o raio, a altura e o volume do cone de maior volume que pode ser gerado dessa maneira.



28. Que valor de a faz $f(x) = x^2 + (a/x)$ ter

(a) um mínimo local em $x = 2$?

(b) um ponto de inflexão quando $x = 1$?

29. Demonstre que $f(x) = x^2 + (a/x)$ não pode ter um máximo local para qualquer valor de a.

30. Quais valores de a e b fazem $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ ter

(a) um máximo local em $x = -1$ e um mínimo local em $x = 3$?

(b) um mínimo local em $x = 4$ e um ponto de inflexão em $x = 1$?

Aplicações físicas

31. Movimento vertical A altura de um objeto que se desloca verticalmente é dada por

$$s = -16t^2 + 96t + 112$$

com s em pés e t em segundos. Determine

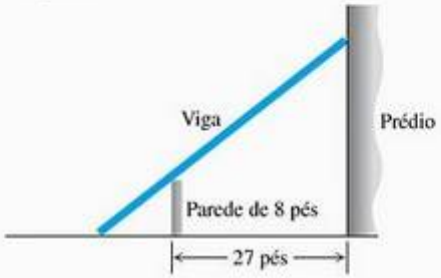
(a) a velocidade do objeto quando $t = 0$.

(b) sua altura máxima e quando esta ocorre.

(c) sua velocidade quando $s = 0$.

32. A rota mais rápida Jane está em um barco a remo a 2 mi da costa e deseja chegar a uma cidade litorânea que está a 6 mi em linha reta do ponto (na costa) mais próximo do barco. Ela rema a 2 mi/h e caminha a 5 mi/h. Onde ela deve aportar para chegar à cidade no menor tempo possível?

33. A viga mais curta O muro de 8 pés da figura a seguir está a 27 pés do edifício. Determine o comprimento da viga mais curta para alcançar o prédio, apoiado no solo do lado esquerdo do muro.



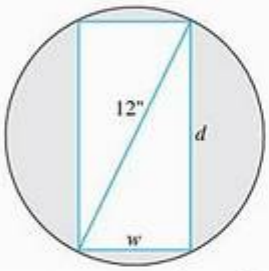
34. A resistência de uma viga A resistência R de uma viga retangular de madeira é proporcional à sua largura multiplicada pelo quadrado de sua profundidade. (Veja figura a seguir.)

T

(a) Determine as dimensões da viga mais resistente que pode ser cortada a partir de um tronco de 12 pol de diâmetro.

(b) Esboce o gráfico de R em função da largura w do sarrafo, considerando a constante de proporcionalidade $k = 1$. Concilie o que você observar neste item com sua resposta ao item (a).

(c) Na mesma tela, esboce o gráfico de R em função da profundidade d da viga, mantendo $k = 1$. Compare um gráfico com o outro e também com a resposta do item (a). Qual seria o efeito se admitíssemos valores de k diferentes de 1? Tente descobrir.



35. A rigidez de uma viga A rigidez R de uma viga retangular é proporcional à sua largura multiplicada pelo cubo de sua profundidade.

(a) Determine as dimensões que produzem a viga mais rígida que possa ser cortada a partir de um tronco de 12 pol de diâmetro.

(b) Esboce o gráfico de R em função da largura w da viga, considerando que a constante de proporcionalidade $k = 1$. Concilie o que você observou neste item com sua resposta ao item (a).

(c) Na mesma tela, esboce o gráfico de R em função da profundidade d do sarrafo, mantendo $k = 1$. Compare um gráfico com o outro e também com sua resposta do item (a). Qual seria o efeito se admitíssemos valores de k diferentes de 1? Tente descobrir.

36. Movimento sobre uma reta As posições de duas partículas no eixo s são $s_1 = \text{sen } t$ e $s_2 = \text{sen } (t + \pi/3)$, com s_1 e s_2 em metros e t em segundos.

(a) No intervalo $0 \le t \le 2\pi$, em que instante as partículas se encontram?

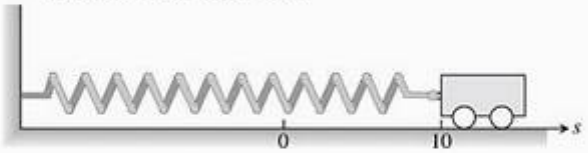
(b) Qual é a distância máxima entre as duas partículas?

(c) No intervalo $0 \le t \le 2\pi$, quando a distância entre as partículas varia mais rapidamente?

37. Um carro na ausência de atrito Um carrinho preso a uma parede por uma mola é afastado 10 cm de sua posição de repouso e liberado no instante $t = 0$, oscilando então durante 4 s. Sua posição no instante t é dada por $s = 10 \cos \pi t$.

(a) Qual é a velocidade máxima do carrinho? Quando o carrinho se desloca com essa velocidade? Onde exatamente isso ocorre? Qual é a magnitude de sua aceleração nesse momento?

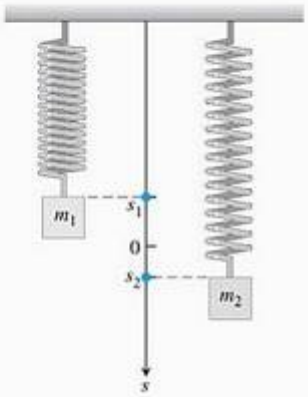
(b) Onde o carrinho se encontra quando a magnitude da aceleração é a maior possível? Qual é a velocidade do carrinho nesse momento?



38. Duas massas penduradas em molas lado a lado possuem posições $s_1 = 2 \text{ sen } t$ e $s_2 = \text{sen } 2t$, respectivamente.

(a) Em que instantes do intervalo $0 < t$ elas passam uma pela outra? (*Dica*: $\text{sen } 2t = 2 \text{ sen } t \cos t$.)

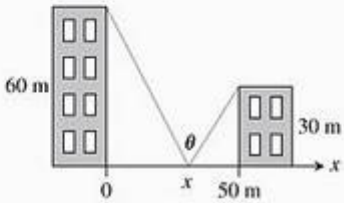
(b) No intervalo $0 \le t \le 2\pi$, quando a distância vertical entre as massas é máxima? De quanto é essa distância? (*Dica*: $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$.)



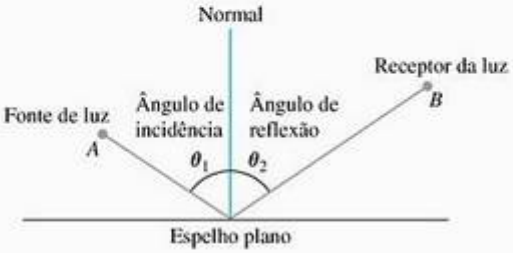
39. Instalando um painel solar Você foi contratado para construir um painel solar no nível do solo no eixo leste–oeste entre dois prédios, conforme a figura a seguir. A que distância do prédio mais alto você deve colocar o painel para maximizar o número de horas que o painel ficará exposto à luz quando o sol passar diretamente acima? Comece pela seguinte observação:

$$\theta = \pi - \text{cotg}^{-1} \frac{x}{60} - \text{cotg}^{-1} \frac{50 - x}{30}$$

Determine, então, o valor de x que maximiza θ.



40. O princípio de Fermat na óptica O princípio de Fermat na óptica diz que a luz sempre se propaga de um ponto a outro por um trajeto que minimiza o tempo de propagação. A luz emitida por uma fonte A é refletida por um espelho plano para um observador em um ponto B, como se vê na figura a seguir. Para que a luz obedeça ao princípio de Fermat, demonstre que o ângulo de incidência deve ser igual ao ângulo de reflexão, ambos medidos a partir da linha normal até a superfície refletora do espelho. (Esse resultado pode ser deduzido sem a utilização do cálculo. Há um argumento puramente geométrico que talvez você prefira.)



41. A peste do estanho Quando o estanho metálico é mantido abaixo de 13,2 °C, lentamente se torna quebradiço e acaba por esfarelar, tornando-se um pó cinza. Se forem mantidos durante anos a baixas temperaturas, objetos de estanho esfarelam-se espontaneamente. Os europeus, que observaram os tubos de estanho dos órgãos das igrejas se desintegrarem no passado, chamavam essa transformação de *peste do estanho*, porque parecia ser contagiosa — e em certo sentido era, pois o pó cinza catalisa a própria formação.

Um *catalisador* para uma reação química é uma substância que aumenta a velocidade da reação sem sofrer mudança permanente. Uma *reação autocatalítica* é aquela em que o produto é o catalisador da própria formação. Uma reação desse tipo pode decorrer lentamente no início, quando a quantidade de catalisador é pequena, e também no final, quando a maioria da substância original já foi consumida. Mas, nesse intervalo, quando tanto a substância original quanto o produto catalisador são abundantes, a reação ocorre mais rapidamente.

Em alguns casos, é razoável admitir que a velocidade de reação $v = dx/dt$ é proporcional tanto à quantidade de substância original quanto à quantidade de produto. Ou seja, v pode ser expressa em função de x apenas e

$$v = kx(a - x) = kax - kx^2$$

onde

x = quantidade de produto,

a = quantidade de substância no início,

k = constante positiva.

Com que valor de x a velocidade v apresenta um máximo? Qual é o valor máximo de v?

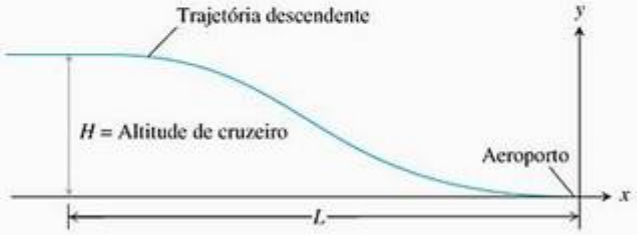
42. A trajetória descendente de um avião Um avião, voando à altitude H, começa a descer rumo à pista de pouso de um aeroporto que está a uma distância terrestre horizontal L do avião, como mostra a figura a seguir. Admita que a trajetória descendente do avião é o gráfico de uma função polinomial cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde $y(-L) = H$ e $y(0) = 0$.

(a) Quanto vale dy/dx quando $x = 0$?

(b) Quanto vale dy/dx quando $x = -L$?

(c) Utilize os valores para dy/dx quando $x = 0$ e $x = -L$ juntamente com $y(0) = 0$ e $y(-L) = H$ para demonstrar que

$$y(x) = H\left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$



Negócios e economia

43. Custa para uma empresa c dólares manufaturar e distribuir cada mochila. Se as mochilas são vendidas a x dólares cada, o número de unidades vendidas é dado por

$$n = \frac{a}{x - c} + b(100 - x)$$

onde a e b são constantes positivas. Qual preço de venda trará lucro máximo?

44. Você opera uma agência de excursões que pratica os seguintes preços:

> \$ 200 por pessoa, se 50 pessoas (o número mínimo necessário para fechar um grupo) participarem da excursão.
>
> Para cada pessoa a mais, até um máximo de 80 pessoas, o preço é reduzido em \$ 2.

Custa \$ 6.000 (custo fixo) mais \$ 32 por pessoa realizar a excursão. Quantas pessoas são necessárias para maximizar seu lucro?

45. A fórmula do tamanho do lote de Wilson Uma das fórmulas para gerenciamento de almoxarifado diz que o custo médio semanal para você encomendar, pagar e armazenar uma mercadoria é

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$$

onde q é a quantidade que você encomenda quando o estoque (de sapatos, rádios, vassouras, seja o que for) está baixo, k é o custo para fazer o pedido (que é constante, não importando quanto você pede), c é o custo de um item (uma constante), m é o número de itens vendidos em uma semana (uma constante) e h é o custo semanal da armazenagem de um item (uma constante que leva em conta coisas como o espaço que o item ocupa, energia elétrica, custo do seguro e da segurança).

(a) Seu trabalho, como almoxarife, é determinar a quantidade que minimizará $A(q)$. Qual é essa quantidade? (A fórmula que você obterá como resposta é conhecida como *fórmula do tamanho do lote de Wilson*.)

(b) Os custos de entrega às vezes dependem do tamanho do pedido. Quando isso ocorre, mais conveniente substituir k por $k + bq$, a soma de k e um múltiplo constante de q. Qual é a quantidade mais econômica a se pedir agora?

46. Nível de produção Demonstre que o nível de produção (se houver) cujo custo médio mínimo é aquele em que o custo médio é igual ao custo marginal.

47. Demonstre que, se $r(x) = 6x$ e $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ são suas funções de receita e custo, então o melhor que você consegue é ter receita igual ao custo.

48. Nível de produção Suponha que $c(x) = x^3 - 20x^2 + 20.000x$ seja o custo para manufaturar x itens. Determine o nível de produção que minimizará o custo médio para produzir x itens.

49. Custo médio diário No Exemplo 6, suponha que em qualquer material incida um custo d relativo à entrega, que haja um custo s de armazenamento por unidade por dia e que a taxa de produção seja de p unidades por dia.

(a) Quanto deve ser entregue a cada x dias?

(b) Demonstre que

$$\text{Custo por ciclo} = d + \frac{px}{2}sx$$

(c) Determine o tempo x^* entre as entregas e a quantidade a ser entregue que minimizam o *custo médio diário* de entrega e estocagem.

(d) Demonstre que x^* ocorre na interseção da hipérbole $y = d/x$ com a reta $y = psx/2$.

50. Minimizando o custo médio Suponha que $c(x) = 2.000 + 96x + 4x^{3/2}$, onde x representa milhares de unidades. Há um nível de produção que minimize o custo médio? Em caso afirmativo, qual é?

Medicina

51. Sensibilidade a medicamentos (*Continuação do Exercício 50, Seção 3.2.*) Calcule a quantidade de medicamento à qual o organismo é mais sensível, determinando o valor de M que maximiza a derivada dR/dM, onde

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

e C é uma constante.

52. Como tossimos

(a) Quando tossimos, a traquéia se contrai e aumenta a velocidade do ar que passa. Isso levanta questões sobre quanto deveria se contrair para maximizar a velocidade e se ela realmente se contrai tanto assim quando tossimos.

Considerando algumas hipóteses razoáveis sobre a elasticidade da parede da traquéia e de como a velocidade do ar próximo às paredes é reduzida pelo atrito, a velocidade média v do fluxo de ar pode ser modelada pela equação

$$v = c(r_0 - r)r^2 \text{ cm/s}, \quad \frac{r_0}{2} \le r \le r_0$$

onde r_0 é o raio, em centímetros, da traquéia em repouso e c é uma constante positiva cujo valor depende, em parte, do comprimento da traquéia.

Demonstre que v é máxima quando $r = (2/3)r_0$, ou seja, quando a traquéia está cerca de 33% contraída. O impressionante é que imagens obtidas com raios X confirmam que a traquéia se contrai assim durante a tosse.

(b) Sendo $r_0 = 0{,}5$, $c = 1$, trace o gráfico de v no intervalo $0 \le r \le 0{,}5$. Compare o que você observa com a afirmação de que v é máxima quando $r = (2/3)r_0$.

Teoria e exemplos

53. Uma desigualdade para inteiros positivos Demonstre que, se a, b, c e d são inteiros positivos, então

$$\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \ge 16$$

54. A derivada dt/dx do Exemplo 4

(a) Demonstre que

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

é uma função crescente de x.

(b) Demonstre que

$$g(x) = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

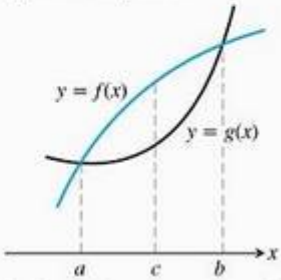
é uma função decrescente de x.

(c) Demonstre que

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

é uma função crescente de x.

55. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ as funções deriváveis traçadas aqui. O ponto c é onde a distância vertical entre as curvas é máxima Há algo especial em relação às tangentes às duas curvas em c? Justifique sua resposta.



56. Você foi incumbido de determinar se a função $f(x) = 3 + 4\cos x + \cos 2x$ é negativa em algum momento.

(a) Explique por que você precisa considerar apenas os valores de x do intervalo $[0, 2\pi]$.

(b) f é negativa em algum momento? Explique.

57. (a) A função $y = \text{cotg}\, x - \sqrt{2}\,\text{cosec}\, x$ possui um valor mínimo absoluto no intervalo $0 < x < \pi$. Determine-o.

(b) Esboce o gráfico da função e compare o que você observa com sua resposta do item (a).

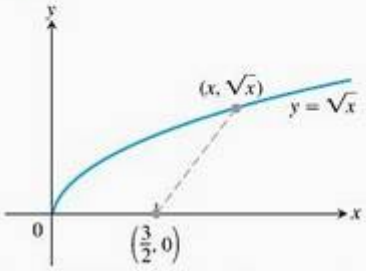
58. (a) A função $y = \text{tg}\, x + 3\,\text{cotg}\, x$ possui valor mínimo absoluto no intervalo $0 < x < \pi/2$. Determine-o.

(b) Esboce o gráfico da função e compare o que você observa com sua resposta ao item (a).

59. (a) Qual é a distância mínima de um ponto da curva $y = \sqrt{x}$ ao ponto $(3/2, 0)$? (*Dica*: Minimizando o *quadrado*

da distância, você evita trabalhar com raízes quadradas.)

(b) Trace juntos os gráficos da função distância e de $y = \sqrt{x}$ e concilie o que você observa com sua resposta ao item (a).



60. (a) Qual é a distância mínima de um ponto da semicircunferência $y = \sqrt{16 - x^2}$ ao ponto $(1, \sqrt{3})$?

(b) Esboce juntos os gráficos da função distância e de $y = \sqrt{16 - x^2}$ e concilie o que você observa com sua resposta ao item (a).

USANDO O COMPUTADOR

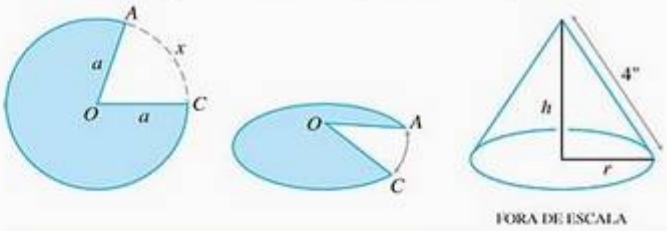
Nos exercícios 61 e 62, talvez seja útil utilizar um SAC.

61. **O problema geral do cone** Um cone de altura h e raio r é construído a partir de um disco plano de raio a pol, removendo-se o setor AOC do arco de comprimento x pol e, então, unindo-se as extremidades OA e OC.

(a) Determine uma fórmula do volume V do cone em função de x e de a.

(b) Determine r e h do cone de volume máximo para $a = 4, 5, 6$ e 8.

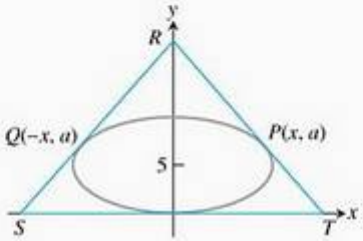
(c) Encontre uma relação simples entre r e h que seja independente de a para o cone de volume máximo. Explique como você chegou a essa relação.



62. **Circunscrevendo uma elipse** Sejam $P(x, a)$ e $Q(-x, a)$ dois pontos da metade superior da elipse

$$\frac{x^2}{100} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

centrada em $(0, 5)$. Um triângulo RST é formado usando-se as retas tangentes à elipse em Q e P, como mostra a figura.



(a) Demonstre que a área do triângulo é

$$A(x) = -f'(x)\left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2$$

onde $y = f(x)$ é a função que representa a metade superior da elipse.

(b) Qual é o domínio de A? Esboce o gráfico de A. Como as assíntotas do gráfico estão relacionadas com a situação do problema?

(c) Determine a altura do triângulo de área mínima. Como ela está relacionada com a ordenada do centro da elipse?

(d) Repita os itens (a), (b) e (c) para a elipse

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{(y-B)^2}{B^2} = 1$$

centrada em $(0, B)$. Demonstre que o triângulo tem área mínima quando a altura é $3B$.

4.6 Formas indeterminadas e a regra de L'Hôpital

Companion Website

Biografia histórica

Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704)

John Bernoulli descobriu uma regra para calcular limites de frações cujos numeradores e denominadores tendem a zero ou a $+\infty$. A regra é conhecida atualmente como **regra de L'Hôpital**, em homenagem a Guillaume de L'Hôpital, um nobre francês que escreveu o primeiro texto introdutório de cálculo diferencial, em que a regra foi impressa pela primeira vez.

Forma indeterminada 0/0

Se as funções contínuas $f(x)$ e $g(x)$ são zero em $x = a$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

não pode ser encontrado com a substituição $x = a$. A substituição gera 0/0, uma expressão sem significado, que não pode ser calculada. Usamos 0/0 para denotar uma expressão conhecida como **forma indeterminada**. Às vezes, mas não sempre, limites que levam a formas indeterminadas podem ser encontrados por cancelamento, rearranjo dos termos ou outras manipulações algébricas. Foi isso que constatamos no Capítulo 2. Foi necessária muita análise, na Seção 2.4, para encontrar $\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)/x$. Mas fomos notavelmente bem-sucedidos com o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

com o qual calculamos derivadas e que sempre produz o equivalente de 0/0 quando substituímos $x = a$. A regra de L'Hôpital nos permite ter sucesso usando derivadas para calcular limites que, abordados de outra maneira, levam a formas indeterminadas.

Atenção!
Para aplicar a regra de L'hôpital a f/g, divida a derivada de f pela derivada de g. Não caia na armadilha de pegar a derivada de f/g. O quociente a ser usado é f'/g', não $(f/g)'$.

Teorema 6 Regra de L'Hôpital (primeira forma)
Suponha que $f(a) = g(a) = 0$, que $f'(a)$ e $g'(a)$ existam e que $g'(a) \neq 0$. Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

PROVA Trabalhando de trás para a frente, a partir de $f'(a)$ e $g'(a)$, que são elas mesmas limites, temos

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

EXEMPLO 1 Usando a regra de L'Hôpital

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{3x - \operatorname{sen} x}{x} = \left.\frac{3 - \cos x}{1}\right|_{x=0} = 2$$

(b) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \left.\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1 + x}}}{1}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

Às vezes, após a derivação, o denominador e o numerador novos são iguais a zero em $x = a$, como vemos no Exemplo 2. Nesses casos, aplicamos uma forma mais forte da regra de L'Hôpital.

Teorema 7 Regra de L'Hôpital (forma mais forte)
Suponha que $f(a) = g(a) = 0$, que f e g sejam deriváveis em um intervalo aberto I contendo a e que $g'(x) \neq 0$ em I se $x \neq a$. Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que exista o limite no lado direito da igualdade.

Antes de darmos uma prova desse Teorema 7, vamos examinar um exemplo.

EXEMPLO 2 Aplicando a forma mais avançada de L'Hôpital

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2}$ $\quad \frac{0}{0}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{(1/2)(1+x)^{-1/2} - 1/2}{2x}$ $\quad$ Ainda $\frac{0}{0}$: derive outra vez.

$= \lim_{x \to 0} \frac{-(1/4)(1+x)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{8}$ $\quad$ Não mais $\frac{0}{0}$; o limite é encontrado.

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ $\quad \frac{0}{0}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$ $\quad$ Ainda $\frac{0}{0}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x}$ $\quad$ Ainda $\frac{0}{0}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$ $\quad$ Não mais $\frac{0}{0}$; o limite é encontrado.

A prova da forma mais forte da regra de L'Hôpital baseia-se no teorema do valor médio de Cauchy, um teorema que envolve duas funções em vez de uma. Provaremos, primeiro, o teorema de Cauchy e, depois, mostremos como ele leva à regra de L'Hôpital.

Companion Website
Biografia histórica
Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Teorema 8 Teorema do valor médio de Cauchy
Suponha que as funções f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e deriváveis ao longo de todo o intervalo (a, b); suponha também que $g'(x) \neq 0$ ao longo de todo o intervalo (a, b). Existe, portanto, um número c em (a, b) no qual

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

PROVA Aplicaremos duas vezes o teorema do valor médio da Seção 4.2. Primeiro, vamos utilizá-lo para demonstrar que $g(a) \neq g(b)$. Se $g(b)$ fosse igual a $g(a)$, o teorema do valor médio resultaria em

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0$$

para algum c entre a e b, o que não pode ser verdade, pois $g'(x) \neq 0$ em (a, b).

Em seguida, aplicaremos o teorema do valor médio à função

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

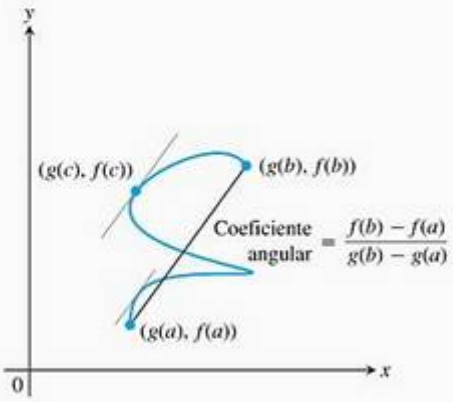


FIGURA 4.44 Existe pelo menos um valor do parâmetro $t = c$, $a < c < b$, para o qual o coeficiente angular da tangente à curva em $(g(c), f(c))$ é igual ao coeficiente angular da secante que conecta os pontos $(g(a), f(a))$ e $(g(b), f(b))$.

Essa função é contínua e derivável onde f e g são, e $F(b) = F(a) = 0$. Assim, existe um número c entre a e b para o qual $F'(c) = 0$. Quando expressa em função de f e g, essa equação se torna

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g'(c)] = 0$$

ou

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Observe que o teorema do valor médio da Seção 4.2 é o Teorema 8 com $g(x) = x$.

O teorema do valor médio de Cauchy tem uma interpretação geométrica para uma curva C definida pelas equações paramétricas $x = g(t)$ e $y = f(t)$. A partir da Equação (2) da Seção 3.5, temos que o coeficiente angular da curva paramétrica em t é dado por

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

portanto $f'(c)/g'(c)$ é o coeficiente angular da tangente à curva quando $t = c$. A secante que conecta os dois pontos $(g(a), f(a))$ e $(g(b), f(b))$ em C tem o coeficiente angular

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

O Teorema 8 diz que existe um valor paramétrico c no intervalo (a, b) para o qual o coeficiente angular da tangente à curva no ponto $(g(c), f(c))$ é igual ao coeficiente angular da secante que conecta os pontos $(g(a), f(a))$ e $(g(b), f(b))$. Esse resultado geométrico é mostrado na Figura 4.44. Observe que pode existir mais de um valor paramétrico c com essa característica.

Provaremos agora o Teorema 7.

Prova da forma forte da regra de L'Hôpital Primeiro, estabelecemos a equação-limite para o caso $x \to a^+$. O método para $x \to a^-$ é praticamente o mesmo, e a combinação desses dois casos formará o resultado.

Suponha que x se situe à direita de a. Então, $g'(x) \neq 0$, e podemos aplicar o teorema do valor médio de Cauchy ao intervalo fechado de a a x. Esse passo produz um número c entre a e x tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Mas $f(a) = g(a) = 0$, logo

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Quando x tende a a, c tende a a porque ele sempre fica entre a e x. Conseqüentemente,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

que estabelece a regra de L'Hôpital para o caso em que x aproxima-se de a por cima. O caso em que x se aproxima de a de baixo para cima é provado pela aplicação do teorema do valor médio de Cauchy ao intervalo fechado $[x, a]$, $x < a$.

A maioria das funções encontradas no mundo real e a maioria das funções vistas neste livro satisfazem as condições da regra de L'Hôpital.

Usando a regra de L'Hôpital

Para determinar

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

pela regra de L'Hôpital, continuamos derivando f e g até obter a forma 0/0 em $x = a$. Mas, assim que uma ou outra dessas derivadas for diferente de zero em $x = 0$, paramos de derivar. A regra de L'Hôpital não se aplica quando o numerador ou o denominador apresentam um limite finito diferente de zero.

EXEMPLO 3 Aplicando incorretamente a forma mais forte da regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \text{Não mais } \frac{0}{0}\text{; o limite é encontrado.}$$

Até agora o cálculo está correto, mas, se continuarmos a derivar na tentativa de aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez, teremos

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

o que está errado. A regra de L'Hôpital só pode ser aplicada a limites que resultam em formas indeterminadas, e 0/1 não é uma forma indeterminada.

A regra de L'Hôpital também se aplica a limites laterais, como fica evidente na prova do Teorema 7.

Lembre-se de que ∞ e $+\infty$ têm o mesmo significado.

EXEMPLO 4 Usando a regra de L'Hôpital para limites laterais

(a) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{2x} = \infty \qquad \text{Positivo para } x > 0.$$

(b) $$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x}{2x} = -\infty \qquad \text{Negativo para } x < 0.$$

Formas indeterminadas ∞/∞, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$

Às vezes, ao tentarmos calcular um limite quando $x \to a$ substituindo $x = a$, obtemos uma expressão ambígua do tipo ∞/∞, $\infty \cdot 0$ ou $\infty - \infty$, em vez de 0/0. Vamos primeiro examinar a forma ∞/∞.

Em livros mais avançados, prova-se que a regra de L'Hôpital aplica-se à forma indeterminada ∞/∞, assim como a 0/0. Se $f(x) \to \pm\infty$ e $g(x) \to \pm\infty$ quando $x \to a$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que o último limite exista. Na notação $x \to a$, o a pode ser finito ou infinito. Além disso, $x \to a$ pode ser substituído pelos limites laterais $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.

EXEMPLO 5 Trabalhando com a forma indeterminada ∞/∞

Encontre

(a) $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sec x}{1 + \operatorname{tg} x}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$

SOLUÇÃO

(a) O numerador e o denominador são descontínuos em $x = \pi/2$, então investigamos o limite lateral nesse ponto. Para aplicar a regra de L'Hôpital, podemos escolher I como qualquer intervalo aberto com $x = \pi/2$ como extremidade.

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\sec x}{1 + \operatorname{tg} x} \qquad \frac{\infty}{\infty} \text{ à esquerda}$$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sec^2 x} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \operatorname{sen} x = 1$$

O limite à direita também é 1, com $(-\infty)/(-\infty)$ como a forma indeterminada. Logo, o limite bilateral é igual a 1.

(b) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

(c) $$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Vamos, agora, voltar nossa atenção às formas $\infty \cdot 0$ e $\infty - \infty$. Podemos, às vezes, lidar com essas formas usando a álgebra para convertê-las nas formas 0/0 ou ∞/∞. Novamente, não estamos sugerindo que exista um número $\infty \cdot 0$ ou $\infty - \infty$, nem que exista um número 0/0 ou ∞/∞. Essas formas são apenas notações que descrevem o comportamento de uma função quando os limites são levados em conta. A seguir, você encontrará exemplos de como podemos trabalhar com tais formas indeterminadas.

EXEMPLO 6 Trabalhando com a forma indeterminada $\infty \cdot 0$

Encontre

(a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x$

SOLUÇÃO

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$ $\qquad \infty \cdot 0$

$$= \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{h}\operatorname{sen} h\right) = 1 \qquad \text{Seja } h = 1/x$$

(b) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/\sqrt{x}}$ $\qquad \infty/\infty$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/2x^{3/2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-2\sqrt{x}\right) = 0$$

EXEMPLO 7 Trabalhando com a forma indeterminada $\infty - \infty$

Encontre

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right)$$

SOLUÇÃO Se $x \to 0^+$, então $\operatorname{sen} x \to 0^+$ e

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \to \infty - \infty$$

De maneira análoga, se $x \to 0^-$, então $\operatorname{sen} x \to 0^-$ e

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \to -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty$$

Nenhuma das duas formas revela o que acontece com o limite. Para descobrir, primeiro, combinamos as frações:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \qquad \text{O denominador comum é } x \operatorname{sen} x.$$

Então, aplicamos a regra de L'Hôpital ao resultado:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \qquad \text{Ainda } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x - x\operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0$$

Potências indeterminadas

Os limites que levam às formas indeterminadas 1^∞, 0^0 e ∞^0 podem, às vezes, ser tratados utilizando-se primeiro logaritmos. Usamos a regra de L'Hôpital para encontrar o limite do logaritmo; calculando a exponencial nesse valor, obtemos o limite da função original. Esse procedimento é justificado pela continuidade da função exponencial e pelo Teorema 11 da Seção 2.6, e é formulado como segue.

Se $\lim_{x\to a}\ln f(x) = L$, então

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)} = e^L$$

Aqui a pode ser finito ou infinito.

EXEMPLO 8 Trabalhando com a forma indeterminada 1^∞

Aplicamos a regra de L'Hôpital para mostrar que $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} = e$.

SOLUÇÃO O limite leva à forma indeterminada 1^∞. Supomos $f(x) = (1+x)^{1/x}$ e encontramos $\lim_{x\to 0^+} \ln f(x)$. Uma vez que

$$\ln f(x) = \ln(1+x)^{1/x} = \frac{1}{x}\ln(1+x),$$

a regra de L'Hôpital pode então ser aplicada e vai resultar em

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \ln f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad \frac{0}{0}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1}\\ &= \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln f(x)} = e^1 = e$$

EXEMPLO 9 Uma forma indeterminada ∞^0

Determine $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

SOLUÇÃO O limite leva à forma indeterminada ∞^0. Supomos $f(x) = x^{1/x}$ e encontramos $\lim_{x\to\infty} \ln f(x)$. Uma vez que

$$\ln f(x) = \ln x^{1/x} = \frac{\ln x}{x}$$

a regra de L'Hôpital resulta em

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \ln f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \qquad \frac{\infty}{\infty}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1}\\ &= \frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)} = e^0 = 1$$

Exercícios 4.6

Encontrando limites

Nos exercícios 1–6, use a regra de L'Hôpital para calcular o limite. Depois, calcule o limite usando um método estudado no Capítulo 2.

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x}{7x^2+1}$
4. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{4x^3-x-3}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
6. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$

Aplicando a regra de L'Hôpital

Use a regra de L'Hôpital para encontrar os limites dos exercícios 7–46.

7. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$
8. $\lim_{x\to -5} \frac{x^2-25}{x+5}$

9. $\lim_{t\to -3} \frac{t^3 - 4t + 15}{t^2 - t - 12}$

10. $\lim_{t\to 1} \frac{t^3 - 1}{4t^3 - t - 3}$

11. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 - 2x}{7x^3 + 3}$

12. $\lim_{x\to\infty} \frac{x - 8x^2}{12x^2 + 5x}$

13. $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t^2}{t}$

14. $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5t}{2t}$

15. $\lim_{x\to 0} \frac{8x^2}{\cos x - 1}$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

17. $\lim_{\theta\to \pi/2} \frac{2\theta - \pi}{\cos(2\pi - \theta)}$

18. $\lim_{\theta\to -\pi/3} \frac{3\theta + \pi}{\operatorname{sen}(\theta + (\pi/3))}$

19. $\lim_{\theta\to \pi/2} \frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \cos 2\theta}$

20. $\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{\ln x - \operatorname{sen}\pi x}$

21. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(\sec x)}$

22. $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\ln(\operatorname{cosec} x)}{(x - (\pi/2))^2}$

23. $\lim_{t\to 0} \frac{t(1 - \cos t)}{t - \operatorname{sen} t}$

24. $\lim_{t\to 0} \frac{t \operatorname{sen} t}{1 - \cos t}$

25. $\lim_{x\to (\pi/2)^-} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sec x$

26. $\lim_{x\to (\pi/2)^-} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$

27. $\lim_{\theta\to 0} \frac{3^{\operatorname{sen}\theta} - 1}{\theta}$

28. $\lim_{\theta\to 0} \frac{(1/2)^\theta - 1}{\theta}$

29. $\lim_{x\to 0} \frac{x2^x}{2^x - 1}$

30. $\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{2^x - 1}$

31. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x + 1)}{\log_2 x}$

32. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2 x}{\log_3(x + 3)}$

33. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2 + 2x)}{\ln x}$

34. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x}$

35. $\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{5y + 25} - 5}{y}$

36. $\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{ay + a^2} - a}{y}, \quad a > 0$

37. $\lim_{x\to\infty} (\ln 2x - \ln(x + 1))$

38. $\lim_{x\to 0^+} (\ln x - \ln \operatorname{sen} x)$

39. $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a + h) - \operatorname{sen} a}{h}$

40. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3x + 1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

41. $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

42. $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x + \cos x)$

43. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{e^\theta - \theta - 1}$

44. $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - (1 + h)}{h^2}$

45. $\lim_{t\to\infty} \frac{e^t + t^2}{e^t - t}$

46. $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

Limites envolvendo bases e expoentes

Determine os limites nos exercícios 47–56.

47. $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

48. $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(x-1)}$

49. $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x}$

50. $\lim_{x\to e^+} (\ln x)^{1/(x-e)}$

51. $\lim_{x\to 0^+} x^{-1/\ln x}$

52. $\lim_{x\to\infty} x^{1/\ln x}$

53. $\lim_{x\to\infty} (1 + 2x)^{1/(2\ln x)}$

54. $\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x}$

55. $\lim_{x\to 0^+} x^x$

56. $\lim_{x\to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Teoria e aplicações

A regra de L'Hôpital não ajuda a encontrar os limites dos exercícios 57–60. Tente; você voltará sempre ao mesmo ponto. Encontre os limites de outra maneira.

57. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x + 1}}{\sqrt{x + 1}}$

58. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

59. $\lim_{x\to (\pi/2)^-} \frac{\sec x}{\operatorname{tg} x}$

60. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cosec} x}$

61. Qual está correto e qual está errado? Justifique suas respostas.

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{2x} = \frac{1}{6}$

(b) $\lim_{x\to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 3} = \frac{0}{6} = 0$

62. Qual está correto e qual está errado? Justifique suas respostas.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2}{2x - \cos x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{2 + \operatorname{sen} x} = \frac{2}{2 + 0} = 1$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2}{2x - \cos x} = \frac{-2}{0 - 1} = 2$

63. Somente um destes cálculos está correto. Qual deles? Por que os demais estão incorretos? Justifique sua resposta.

(a) $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0 \cdot (-\infty) = 0$

(b) $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0 \cdot (-\infty) = -\infty$

(c) $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{(1/x)} = \frac{-\infty}{\infty} = -1$

(d) $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{(1/x)}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(1/x)}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$

64. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \quad \text{mas} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$$

(b) Explique por que isso não contradiz a regra de L'Hôpital.

65. **Extensão contínua** Calcule um valor de c que faça que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9x - 3\operatorname{sen} 3x}{5x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

seja contínua em $x = 0$. Explique por que o seu valor de c funciona.

66. Forma $\infty - \infty$

T (a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2 + x}\right)$$

traçando o gráfico de $f(x) = x - \sqrt{x^2 + x}$ em um intervalo suficientemente grande de valores de x.

(b) Agora confirme sua estimativa encontrando o limite pela regra de L'Hôpital. Como primeiro passo, multiplique $f(x)$ pela fração $(x + \sqrt{x^2 + x})/(x + \sqrt{x^2 + x})$ e simplifique o novo numerador.

67. Forma 0/0 Estime o valor de

T

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2 - (3x + 1)\sqrt{x} + 2}{x - 1}$$

traçando o gráfico. Então, confirme sua estimativa pela regra de L'Hôpital.

68. Este exercício explora a diferença entre o limite

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$$

e o limite

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

(a) Use a regra de L'Hôpital para mostrar que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

(b) Faça juntos os gráficos de

T

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad \text{e} \quad g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

para $x \geq 0$. Compare o comportamento de f com o de g. Estime o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(c) Confirme sua estimativa de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ calculando-o com a regra de L'Hôpital.

69. Mostre que

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = e^r$$

70. Dado que $x > 0$, encontre, caso exista, o valor máximo de

(a) $x^{1/x}$

(b) x^{1/x^2}

(c) x^{1/x^n} (sendo n um inteiro positivo)

(d) Mostre que $\lim_{x\to\infty} x^{1/x^n} = 1$ para qualquer inteiro positivo n.

71. A extensão contínua de $(\text{sen } x)^x$ para $[0, \pi]$

T (a) Trace o gráfico de $f(x) = (\text{sen } x)^x$ no intervalo $0 \leq x \leq \pi$. Qual valor você atribuiria a f para que ela fosse contínua em $x = 0$?

(b) Verifique sua conclusão do item (a) encontrando $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ com a regra de L'Hôpital.

(c) Voltando ao gráfico, estime o valor máximo de f em $[0, \pi]$. Aproximadamente onde está max f?

(d) Melhore sua estimativa do item (c) fazendo o gráfico de f' na mesma janela para ver onde ele cruza o eixo x. Para simplificar seu trabalho, você pode retirar o fator exponencial da expressão de f' e representar graficamente apenas o fator que tem um zero.

72. A função $(\text{sen } x)^{\text{tg } x}$ (*Continuação do Exercício 71.*)

T (a) Trace o gráfico de $f(x) = (\text{sen } x)^{\text{tg } x}$ no intervalo $-7 \leq x \leq 7$. Como você explica as lacunas na curva? Qual a extensão dessas lacunas?

(b) Agora, trace o gráfico de f no intervalo $0 \leq x \leq \pi$. A função não é definida em $x = \pi/2$, mas a curva não é interrompida nesse ponto. O que está acontecendo? Qual valor o gráfico parece fornecer para f em $x = \pi/2$? (*Dica*: Use a regra de L'Hôpital para determinar $\lim f$ quando $x \to (\pi/2)^-$ e $x \to (\pi/2)^+$.)

(c) Continuando com os gráficos do item (b), determine max f e min f da maneira mais precisa possível e estime os valores de x nos quais eles ocorrem.

73. Seja

T

$$f(x) = \frac{1 - \cos x^6}{x^{12}}$$

Explique por que alguns gráficos de f podem fornecer informações falsas sobre $\lim_{x\to 0} f(x)$. (*Dica*: Tente a janela $[-1, 1]$ por $[-0{,}5, 1]$.)

74. Encontre todos os valores de c que satisfazem a conclusão do teorema do valor médio de Cauchy para as funções e o intervalo dados.

(a) $f(x) = x, \quad g(x) = x^2, \quad (a, b) = (-2, 0)$

(b) $f(x) = x, \quad g(x) = x^2, \quad (a, b)$ arbitrário

(c) $f(x) = x^3/3 - 4x, \quad g(x) = x^2, \quad (a, b) = (0, 3)$

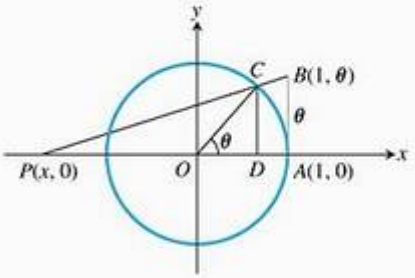
75. Na figura a seguir, o círculo tem raio OA igual a 1, e AB é a tangente ao círculo em A. O arco AC mede θ em radianos e o segmento AB também tem comprimento θ. A reta que vai de B a C cruza o eixo x em $P(x, 0)$.

(a) Mostre que o comprimento de PA é

$$1 - x = \frac{\theta(1 - \cos\theta)}{\theta - \text{sen } \theta}$$

(b) Determine $\lim_{\theta\to 0}(1 - x)$

(c) Mostre que $\lim_{\theta \to \infty} [(1 - x) - (1 - \cos\theta)] = 0$
Interprete essa conclusão geometricamente.



76. Um triângulo retângulo tem um cateto de comprimento 1, outro de comprimento y e uma hipotenusa de comprimento r. O ângulo oposto a y mede θ em radianos. Determine os limites quando $\theta \to \pi/2$ de

(a) $r - y$

(b) $r^2 - y^2$

(c) $r^3 - y^3$

4.7 O método de Newton

Um dos problemas básicos da matemática é resolver equações. Usando a fórmula quadrática, sabemos como encontrar um ponto (solução) onde $x^2 - 3x + 2 = 0$. Existem fórmulas mais complicadas para resolver equações cúbicas e quárticas (polinômios de grau 3 e 4), mas o matemático norueguês Neils Abel demonstrou que não existem fórmulas simples para resolver polinômios de grau cinco. Não existem fórmulas simples para resolver equações do tipo sen $x = x^2$, que envolvem funções transcendentes, com polinômios e outras funções algébricas.

Companion Website
Biografia histórica
Neils Henrik Abel (1802-1829)

Nesta seção, vamos estudar um método numérico denominado *método de Newton*, ou *método de Newton-Raphson*, que consiste em uma técnica para aproximar a solução de uma equação $f(x) = 0$. Em essência, esse método usa retas tangentes para substituir o gráfico $y = f(x)$ próximo aos pontos onde f é zero. (Um valor de x onde f é zero é uma *raiz* da função f e uma *solução* da equação $f(x) = 0$.)

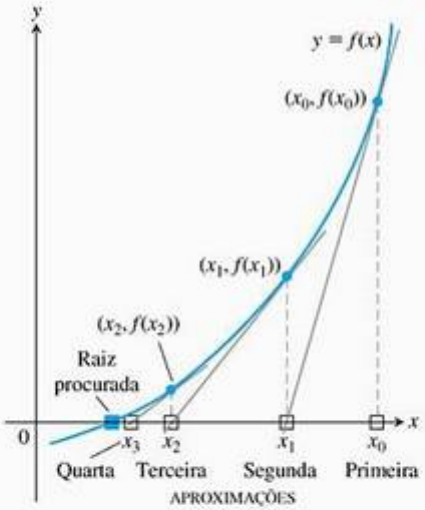


FIGURA 4.45 O método de Newton começa pela estimativa inicial x_0 e (sob circunstâncias favoráveis) melhora a estimativa a cada passo.

Procedimentos para o método de Newton

O objetivo do método de Newton para estimar a solução de uma equação $f(x) = 0$ é produzir uma seqüência de aproximações que acabarão aproximando a solução. Pegamos o primeiro número x_0 da seqüência. Então, sob circunstâncias favoráveis, o método vai se encarregar do resto, caminhando passo a passo rumo a um ponto onde a curva de f cruza o eixo x (Figura 4.45). A cada passo, o método se aproxima mais de uma raiz de f utilizando uma raiz de uma de suas linearizações. Eis como ele funciona.

A estimativa inicial, x_0, pode ser determinada graficamente ou por pura adivinhação. Assim, o método usa a tangente à curva $y = f(x)$ em $(x_0, f(x_0))$ para aproximar a curva, chamando x_1 o ponto onde a tangente cruza o eixo x (Figura 4.45). O número x_1 geralmente é uma aproximação melhor da solução que x_0. O ponto x_2, onde a tangente à curva $(x_1, f(x_1))$ cruza o eixo x, é a aproximação seguinte. Prosseguimos, usando cada aproximação para gerar a próxima, até que estejamos suficientemente próximos da raiz para cessar.

Podemos derivar uma fórmula para gerar as aproximações sucessivas da maneira apresentada a seguir. Dada a aproximação x_n, a equação da tangente à curva em $(x_n, f(x_n))$ é

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Podemos determinar onde essa curva cruza o eixo x tornando $y = 0$ (Figura 4.46).

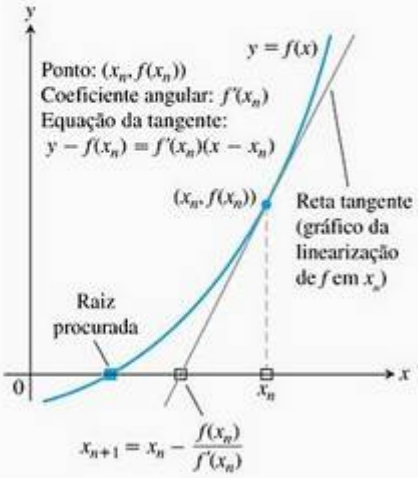


FIGURA 4.46 Geometria das etapas sucessivas do método de Newton. A partir de x_n, seguimos para cima até a curva e descemos pela reta tangente para determinar x_{n+1}.

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x - x_n$$

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{Se } f'(x_n) \neq 0$$

Esse valor de x é a próxima aproximação x_{n+1}. Eis um resumo do método de Newton.

Procedimentos para o método de Newton

1. Escolha uma primeira aproximação para resolver a equação $f(x) = 0$. Um gráfico de $y = f(x)$ pode ajudá-lo.
2. Use a primeira aproximação para obter uma segunda, a segunda para obter uma terceira e assim por diante, utilizando a fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{se } f'(x_n) \neq 0 \qquad (1)$$

Aplicando o método de Newton

As aplicações do método de Newton em geral envolvem muitos cálculos numéricos, o que as torna especialmente adequadas para computadores ou calculadoras. De qualquer modo, mesmo quando os cálculos são feitos manualmente (o que pode ser bem tedioso), o método é uma boa maneira de achar soluções para equações.

Em nosso primeiro exemplo, determinaremos aproximações decimais para $\sqrt{2}$ estimando a raiz positiva da equação $f(x) = x^2 - 2 = 0$.

EXEMPLO 1 Determinando a raiz quadrada de 2

Determine a raiz positiva da equação

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

SOLUÇÃO Com $f(x) = x^2 - 2$ e $f'(x) = 2x$, a Equação (1) torna-se

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

$$= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

$$= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

A equação

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

permite passar de uma aproximação para a seguinte usando poucos comandos. Com o valor inicial $x_0 = 1$, obtemos os resultados da primeira coluna da tabela a seguir. (Com cinco casas decimais, $\sqrt{2} = 1{,}41421$.)

	Erro	Número de algarismos corretos
$x_0 = 1$	−0,41421	1
$x_1 = 1{,}5$	+0,08579	1
$x_2 = 1{,}41667$	+0,00246	3
$x_3 = 1{,}41422$	+0,00001	5

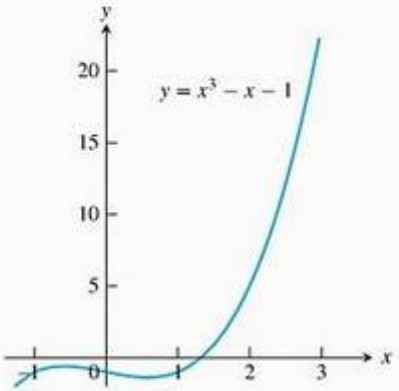


FIGURA 4.47 O gráfico de $f(x) = x^3 - x - 1$ cruza o eixo x uma vez; essa é a raiz que queremos encontrar (Exemplo 2).

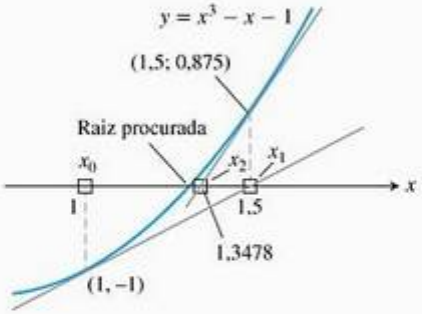


FIGURA 4.48 Os primeiros três valores de x da Tabela 4.1 (quatro casas decimais).

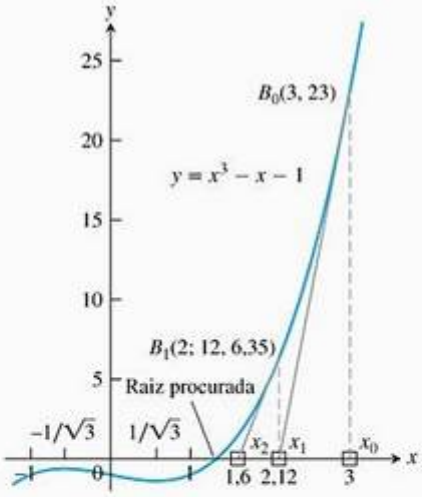


FIGURA 4.49 Qualquer valor inicial x_0 à direita de $x = 1/\sqrt{3}$ levará à raiz.

O método de Newton é usado pela maioria das calculadoras para determinar raízes, pois converge muito rapidamente (adiante veremos mais sobre isso). Se a aritmética da tabela do Exemplo 1 tivesse sido realizada com 13 casas decimais, em vez de 5, então indo um passo além teríamos obtido $\sqrt{2}$ com mais de 10 casas decimais corretas.

EXEMPLO 2 Usando o método de Newton

Determine a abscissa do ponto onde a curva $y = x^3 - x$ cruza a reta horizontal $y = 1$.

SOLUÇÃO A curva cruza a reta quando $x^3 - x = 1$ ou $x^3 - x - 1 = 0$. Quando $f(x) = x^3 - x - 1$ é igual a zero? Como $f(1) = -1$ e $f(2) = 5$, sabemos pelo teorema do valor intermediário que existe uma raiz no intervalo (1, 2) (Figura 4.47).

Aplicamos o método de Newton a f com valor inicial $x_0 = 1$. Os resultados estão apresentados na Tabela 4.1 e na Figura 4.48.

Quando $n = 5$, chegamos ao resultado $x_6 = x_5 = 1{,}3247\ 17957$. Quando $x_{n+1} = x_n$, a equação (1) mostra que $f(x_n) = 0$. Chegamos à solução de $f(x) = 0$ com nove casas decimais.

TABELA 4.1 Resultado da aplicação do método de Newton a $f(x) = x^3 - x - 1$ com $x_0 = 1$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	−1	2	1,5
1	1,5	0,875	5,75	1,3478 26087
2	1,3478 26087	0,1006 82173	4,4499 05482	1,3252 00399
3	1,3252 00399	0,0020 58362	4,2684 68292	1,3247 18174
4	1,3247 18174	0,0000 00924	4,2646 34722	1,3247 17957
5	1,3247 17957	−1,8672E-13	4,2646 32999	1,3247 17957

Na Figura 4.49, indicamos que o processo do Exemplo 2 poderia ter iniciado no ponto $B_0(3, 23)$ da curva, com $x_0 = 3$. O ponto B_0 está bem distante do eixo x, mas a tangente em B_0 cruza o eixo x aproximadamente em (2,12; 0), portanto x_1 ainda é melhor se comparado com x_0. Se utilizarmos a Equação (1) repetidamente, como antes, com $f(x) = x^3 - x - 1$ e $f'(x) = 3x^2 - 1$, confirmaremos a solução de nove casas decimais $x_7 = x_6 = 1{,}3247\ 17957$ com sete etapas.

A curva da Figura 4.49 possui um máximo local em $x = -1/\sqrt{3}$ e um mínimo local em $x = 1/\sqrt{3}$. Não deveríamos esperar bons resultados do método de Newton se começássemos com x_0 entre esses dois pontos, mas podemos começar em qualquer lugar à direita de $x = 1/\sqrt{3}$ e então obter a resposta. Não seria muito inteligente começar ainda mais à direita de B_0, mas poderíamos fazer isso, por exemplo, com $x_0 = 10$. O processo torna-se um pouco mais longo, mas converge igualmente para a mesma resposta.

Convergência do método de Newton

Na prática, o método de Newton geralmente converge com uma velocidade impressionante, mas isso não é garantido. Uma maneira de testar a

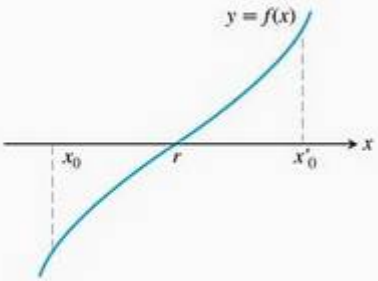


FIGURA 4.50 O método de Newton convergirá para r a partir de qualquer ponto de partida.

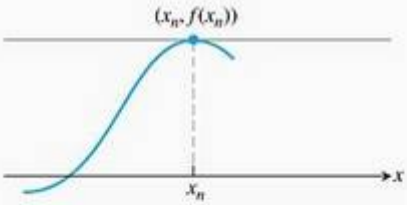


FIGURA 4.51 Se $f'(x_n) = 0$, não há ponto de interseção para definir x_{n+1}.

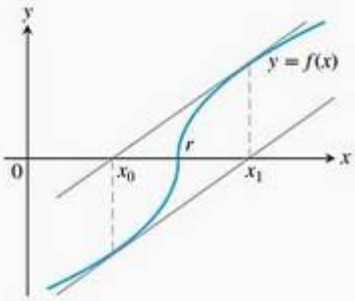


FIGURA 4.52 O método de Newton não consegue convergir. Você vai de x_0 a x_1 e volta para x_0, nunca se aproximando de r.

convergência é iniciar traçando o gráfico da função e estimar um bom valor inicial de x_0. Você pode verificar se está se aproximando de uma raiz da função calculando $|f(x_n)|$ e, depois, verificar se o método está convergindo calculando $|x_n - x_{n+1}|$.

A teoria, de fato, pode fornecer alguma ajuda. Um teorema do cálculo avançado diz que, se

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right| < 1 \tag{2}$$

para qualquer x em um intervalo em torno de uma raiz r, o método convergirá então para r qualquer que seja o valor inicial de x_0 nesse intervalo. Observe que essa condição é satisfeita se o gráfico de f não é exageradamente horizontal próximo do ponto onde ele cruza o eixo x.

O método de Newton sempre converge se, entre r e x_0, a curva de f é côncava para cima quando $f(x_0) > 0$ e côncava para baixo quando $f(x_0) < 0$. (Veja a Figura 4.50.) Na maioria dos casos, a velocidade com que o método de Newton converge para a raiz r é expressa pela fórmula de cálculo avançado

$$\underbrace{|x_{n+1} - r|}_{\text{erro } e_{n+1}} \le \frac{\max|f''|}{2\min|f'|}|x_n - r|^2 = \text{constante} \cdot \underbrace{|x_n - r|^2}_{\text{erro } e_n} \tag{3}$$

onde max e min se referem aos valores máximo e mínimo no intervalo em torno de r. A fórmula diz que o erro no passo $n + 1$ não é maior do que uma constante multiplicada pelo quadrado do erro no passo n. Isso pode não parecer muito, mas pense no que representa. Se a constante for menor ou igual a 1 e $|x_n - r| < 10^{-3}$, então $|x_{n+1} - r| < 10^{-6}$. *Em um único passo*, o método vai de uma exatidão de três casas decimais para uma de seis casas, e o número de casas com exatidão continua a dobrar a cada passo subseqüente.

No entanto, as coisas podem dar errado

O *método de Newton pára quando* $f'(x_n) = 0$ (Figura 4.51). Nesse caso, experimente um novo ponto de partida. Obviamente, f e f' podem possuir uma raiz em comum. Para detectar se isso ocorre, você pode inicialmente determinar as soluções de $f'(x) = 0$ e verificar f nesses valores, ou ainda traçar f e f' juntas.

O método de Newton nem sempre converge. Por exemplo, se

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r - x}, & x < r \\ \sqrt{x - r}, & x \ge r \end{cases}$$

o gráfico será como aquele da Figura 4.52. Se começarmos com $x_0 = r - h$, teremos $x_1 = r + h$, e as aproximações sucessivas ficarão indo e vindo entre esses dois valores. Não importa o número de iterações, isso não vai nos aproximar mais da raiz do que nossa estimativa inicial.

Se o método de Newton convergir, ele convergirá para uma raiz. Entretanto, tome cuidado. Há situações em que o método parece convergir, mas não há raiz nesse ponto. Felizmente, tais situações são raras.

Quando o método de Newton converge para uma raiz, pode não ser a raiz que você tem em mente. A Figura 4.53 apresenta duas situações em que isso pode acontecer.

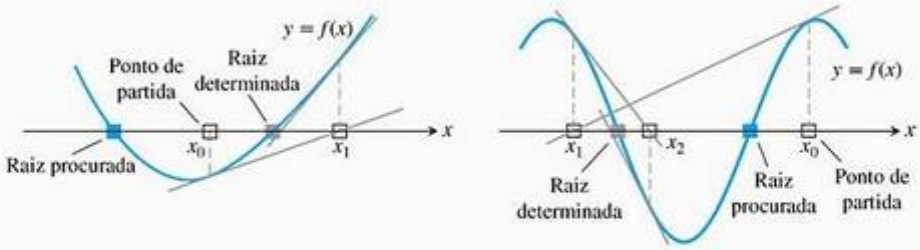


FIGURA 4.53 Se você começar muito distante, o método de Newton pode perder a raiz que você deseja.

Exercícios 4.7

Determinação de raízes

1. Use o método de Newton para estimar as soluções da equação $x^2 + x - 1 = 0$. Comece com $x_0 = -1$ para a solução à esquerda e com $x_0 = 1$ para a solução à direita. Depois, determine x_2 em cada caso.

2. Use o método de Newton para estimar a única solução real de $x^3 + 3x + 1 = 0$. Comece com $x_0 = 0$ e depois determine x_2.

3. Use o método de Newton para estimar as duas raízes da função $f(x) = x^4 + x - 3$. Comece com $x_0 = -1$ para a raiz à esquerda e depois com $x_0 = 1$ para a raiz à direita. Então, determine x_2 em cada caso.

4. Use o método de Newton para estimar as duas raízes da função $f(x) = 2x - x^2 + 1$. Comece com $x_0 = 0$ para a raiz à esquerda e depois com $x_0 = 2$ para a raiz à direita. Então, determine x_2 em cada caso.

Nos exercícios 5 e 6, use o método de Newton para determinar todas as raízes corretas da equação até a sexta casa decimal.

5. $e^{-x} = 2x + 1$

6. $\text{tg}^{-1}\, x = 1 - 2x$

Teoria, exemplos e aplicações

7. **Advinhando uma raiz** Suponha que sua primeira tentativa para a raiz esteja correta, no sentido de que x_0 seja uma raiz de $f(x) = 0$. Supondo que $f'(x_0)$ exista e seja não-nula, o que acontecerá com x_1 e com as aproximações seguintes?

8. **Estimando pi** Você planeja estimar $\pi/2$ com cinco casas decimais usando o método de Newton para resolver a equação $\cos x = 0$. O valor inicial faz diferença? Justifique sua resposta.

9. **Oscilação** Demonstre que, se $h > 0$, a aplicação do método de Newton a

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

leva a $x_1 = -h$ se $x_0 = h$ e a $x_1 = h$ se $x_0 = -h$. Desenhe uma figura que mostre o que está acontecendo.

10. **Aproximações que se tornam cada vez piores** Aplique o método de Newton a $f(x) = x^{1/3}$ com $x_0 = 1$ e calcule x_1, x_2, x_3 e x_4. Determine uma fórmula para $|x_n|$. O que acontece com $|x_n|$ quando $n \to \infty$? Desenhe uma figura que mostre o que está acontecendo.

11. Explique por que as quatro questões seguintes pedem a mesma informação.
    i. Determine as raízes de $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
    ii. Determine as abscissas da interseção da curva $y = x^3$ com a reta $y = 3x + 1$.
    iii. Determine as abscissas dos pontos onde a curva $y = x^3 - 3x$ cruza a reta horizontal $y = 1$.
    iv. Determine os valores de x onde a derivada de $g(x) = (1/4)x^4 - (3/2)x^2 - x + 5$ é igual a zero.

12. **Localizando um planeta** Para calcular as coordenadas espaciais de um planeta, temos de resolver equações do tipo $x = 1 + 0{,}5 \text{ sen } x$. O traçado da função $f(x) = x - 1 - 0{,}5 \text{ sen } x$ sugere que a função possui uma raiz próxima de $x = 1{,}5$. Use uma aplicação do método de Newton para melhorar essa estimativa. Ou seja, comece com $x_0 = 1{,}5$ e determine x_1. (O valor da raiz é 1,49870, com cinco casas decimais.) Lembre-se de usar radianos.

13. **Um programa para usar o método de Newton em um registrador de gráficos** Seja $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Eis um programa simples para executar os cálculos do método de Newton.

(a) Seja $y_0 = f(x)$ e $y_1 = \text{NDER}\, f(x)$.

(b) Armazene $x_0 = -0{,}3$ em x.

(c) Armazene então $x - (y_0/y_1)$ em x e pressione a tecla "Enter" repetidamente. Observe os números convergirem para a raiz de f.

(d) Usando valores diferentes para x_0, repita os passos (b) e (c).

(e) Escreva a própria equação e use essa abordagem para resolvê-la pelo método de Newton. Compare sua resposta com aquela dada pelo determinador de raízes de sua calculadora.

14. (*Continuação do Exercício 11.*)

T (a) Use o método de Newton para determinar as duas raízes negativas de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ com cinco casas decimais de precisão.

(b) Esboce o gráfico de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ para $-2 \le x \le 2{,}5$. Use as funções "Trace" e "Zoom" para estimar as raízes de f com cinco casas decimais de precisão.

(c) Esboce o gráfico de $g(x) = 0{,}25x^4 - 1{,}5x^2 - x + 5$. Use as funções "Trace" e "Zoom" em uma escala apropriada para determinar, com cinco casas decimais de precisão, onde o gráfico possui tangentes horizontais.

15. Curvas que se cruzam A curva $y = \text{tg}\, x$ cruza a reta $y = 2x$ entre $x = 0$ e $x = \pi/2$. Use o método de Newton para determinar onde isso ocorre.

T

16. Soluções reais de uma equação de quarto grau Use o método de Newton para determinar as duas soluções reais da equação $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$.

T

17. (a) Quantas soluções a equação $\text{sen}\,(3x) = 0{,}99 - x^2$ tem?

T (b) Use o método de Newton para determiná-las.

18. Interseção de curvas

T (a) $\cos 3x$ é igual a x para algum x? Justifique sua resposta.

(b) Use o método de Newton para determinar onde isso ocorre.

19. Determine as quatro raízes reais da função $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

T

20. Estimando pi Estime π com tantas casas decimais de precisão quantas sua calculadora permitir usando o método de Newton para resolver a equação $\text{tg}\, x = 0$ com $x_0 = 3$.

T

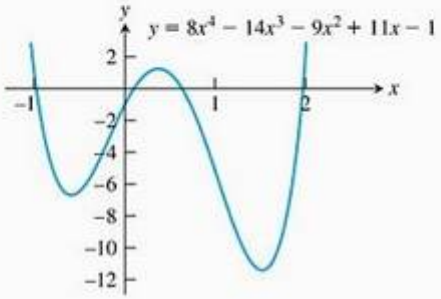
21. Interseção de curvas Para que valor(es) de x teremos $e^{-x^2} = x^2 - x + 1$?

22. Interseção de curvas Para que valor(es) de x teremos $\ln(1 - x^2) = x - 1$?

23. Use o teorema do valor intermediário da Seção 2.6 para demonstrar que $f(x) = x^3 + 2x - 4$ possui uma raiz entre $x = 1$ e $x = 2$. Determine, então, essa raiz com cinco casas decimais de precisão.

24. Fatorando uma equação de quarto grau Determine os valores aproximados de r_1 a r_4 na fatoração

$$8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 8(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)$$



25. Convergindo para raízes diferentes Use o método de Newton para determinar as raízes de $f(x) = 4x^4 - 4x^2$ usando os valores iniciais fornecidos.

T

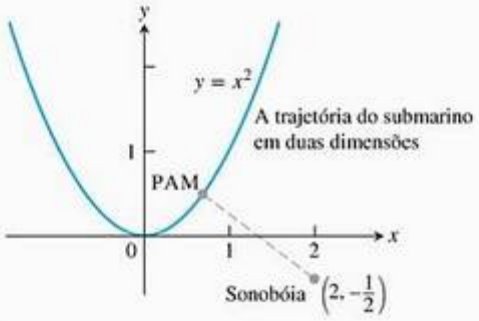
(a) $x_0 = -2$ e $x_0 = -0{,}8$, situados em $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$

(b) $x_0 = -0{,}5$ e $x_0 = 0{,}25$, situados em $(-\sqrt{21}/7, \sqrt{21}/7)$

(c) $x_0 = 0{,}8$ e $x_0 = 2$, situados em $(\sqrt{2}/2, \infty)$

(d) $x_0 = -\sqrt{21}/7$ e $x_0 = \sqrt{21}/7$

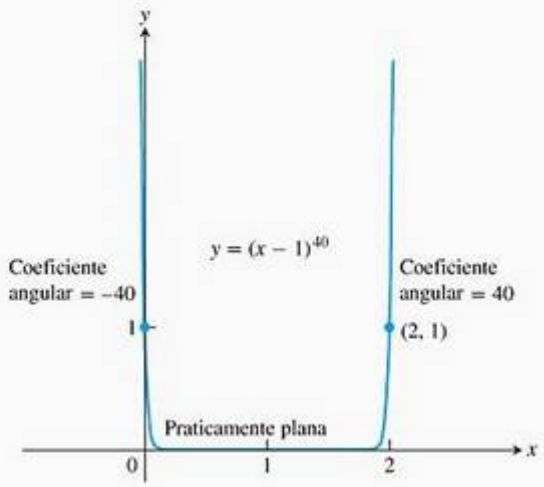
26. O problema do sonobóia Nos problemas para localizar submarinos, normalmente é necessário determinar o ponto de aproximação máxima (PAM) em relação a um sonobóia (detector de sons). Suponha que o submarino se desloque em uma trajetória parabólica $y = x^2$ e que a bóia esteja localizada no ponto $(2, -1/2)$.



(a) Demonstre que o valor de x capaz de minimizar a distância entre o submarino e o sonobóia é a solução da equação $x = 1/(x^2 + 1)$.

(b) Resolva a equação $x = 1/(x^2 + 1)$ pelo método de Newton.

27. Curvas que são praticamente achatadas na raiz Algumas curvas são tão planas que, na prática, o método de Newton pára muito longe da raiz para fornecer uma estimativa útil. Tente usar o método de Newton em $f(x) = (x - 1)^{40}$ com uma estimativa inicial de $x_0 = 2$ para verificar quanto sua calculadora se aproxima da raiz $x = 1$.



28. Determinando a concentração de um íon Enquanto tentávamos determinar a acidez de uma solução saturada de hidróxido de magnésio em ácido clorídrico, derivamos a seguinte equação

$$\frac{3{,}64 \times 10^{-11}}{[H_3O^+]^2} = [H_3O^+] + 3{,}6 \times 10^{-4}$$

para a concentração do íon hidrônio $[H_3O^+]$. Para determinar o valor de $[H_3O^+]$, fazemos $x = 10^4[H_3O^+]$ e convertemos a equação em

$$x^3 + 3{,}6x^2 - 36{,}4 = 0$$

Resolva, então, pelo método de Newton. Que valor você obtém para x? (Expresse o resultado com uma precisão de duas casas decimais.) E para $[H_3O^+]$?

4.8 Primitivas

Já estudamos como encontrar a derivada de uma função. No entanto, muitos problemas exigem que recuperemos uma função a partir de sua derivada conhecida (a partir de sua taxa de variação conhecida). Por exemplo, podemos saber a função velocidade de um objeto que cai a partir de uma altura inicial e precisar saber sua altura em um instante qualquer ao longo de determinado período. Falando de maneira mais genérica, queremos encontrar uma função F a partir de sua derivada f. Se tal função F existir, será denominada *primitiva* ou *antiderivada* da função f.

Determinando primitivas

Definição **Primitiva**
Uma função F é uma **primitiva** de f em um intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para qualquer x em I.

O processo de recuperar uma função $F(x)$ a partir de sua derivada $f(x)$ chama-se *primitivação* ou *antiderivação*. Usamos um F maiúsculo para representar a primitiva de uma função f, G para representar a primitiva de g e assim por diante.

EXEMPLO 1 Determinando primitivas

Determine uma primitiva para cada uma das funções a seguir.

(a) $f(x) = 2x$

(b) $g(x) = \cos x$

(c) $h(x) = \dfrac{1}{x} + 2e^{2x}$

SOLUÇÃO

(a) $F(x) = x^2$

(b) $G(x) = \operatorname{sen} x$

(c) $H(x) = \ln |x| + e^{2x}$

Cada resposta pode ser verificada por derivação. A derivada de $F(x) = x^2$ é $2x$. A derivada de $G(x) = \text{sen } x$ é $\cos x$, e a derivada de $H(x) = \ln|x| + e^{2x}$ é $(1/x) + 2e^{2x}$.

A função $F(x) = x^2$ não é a única cuja derivada é $2x$. A função $x^2 + 1$ tem a mesma derivada, assim como $x^2 + C$ para qualquer constante C. Haverá outras?

A resposta está no Corolário 2 do teorema do valor médio, visto na Seção 4.2. Duas primitivas quaisquer de uma função diferem por uma constante. Assim, as funções $x^2 + C$, onde C é uma **constante arbitrária**, formam *todas* as primitivas de $f(x) = 2x$. Falando de modo mais genérico, temos o seguinte resultado.

Se F é uma primitiva de f em um intervalo I, então a primitiva mais geral de f em I é

$$F(x) + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

Assim, a primitiva mais geral de f em I é uma *família* de funções $F(x) + C$ cujos gráficos são translações verticais uns dos outros. Podemos selecionar uma primitiva específica dessa família atribuindo um valor específico a C. Eis um exemplo que mostra como tal atribuição pode ser feita.

EXEMPLO 2 Determinando uma primitiva específica

Determine uma primitiva de $f(x) = \text{sen } x$ que satisfaça $F(0) = 3$.

SOLUÇÃO Como a derivada de $-\cos x$ é $\text{sen } x$, a primitiva geral

$$F(x) = -\cos x + C$$

fornece todas as primitivas de $f(x)$. A condição $F(0) = 3$ determina um valor específico para C. Substituindo $x = 0$ em $F(x) = -\cos x + C$, temos

$$F(0) = -\cos 0 + C = -1 + C.$$

Como $F(0) = 3$, resolvendo em C, temos $C = 4$. Logo

$$F(x) = -\cos x + 4$$

é a primitiva que satisfaz $F(0) = 3$.

TABELA 4.2 Fórmulas de primitivas, sendo k uma constante diferente de zero

	Função	Primitiva geral		Função	Primitiva geral
1.	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$	8.	e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx} + C$
2.	$\text{sen } kx$	$-\frac{1}{k}\cos kx + C$	9.	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C, \quad x \neq 0$
3.	$\cos kx$	$\frac{1}{k}\text{sen } kx + C$	10.	$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2x^2}}$	$\frac{1}{k}\text{sen}^{-1} kx + C$
4.	$\sec^2 kx$	$\frac{1}{k}\text{tg } kx + C$	11.	$\frac{1}{1 + k^2x^2}$	$\frac{1}{k}\text{tg}^{-1} kx + C$
5.	$\text{cosec}^2 kx$	$-\frac{1}{k}\text{cotg } kx + C$	12.	$\frac{1}{x\sqrt{k^2x^2 - 1}}$	$\sec^{-1} kx + C, \quad kx > 1$
6.	$\sec kx \text{ tg } kx$	$\frac{1}{k}\sec kx + C$	13.	a^{kx}	$\left(\frac{1}{k \ln a}\right)a^{kx} + C, \quad a > 0, \ a \neq 1$
7.	$\text{cosec } kx \text{ cotg } kx$	$-\frac{1}{k}\text{cosec } kx + C$			

Trabalhando de trás para a frente a partir de regras adequadas de derivação, podemos derivar fórmulas e regras para primitivas. Em todos os casos haverá uma constante arbitrária C na expressão geral que representa todas as primitivas de dada função. A Tabela 4.2 apresenta as fórmulas das primitivas de algumas importantes funções.

É fácil verificar as regras dessa tabela: basta derivar a fórmula geral da primitiva para obter a função que está à sua esquerda. Por exemplo, a derivada de $(\text{tg } kx)/k + C$ é $\sec^2 kx$, qualquer que seja o valor das constantes C ou $k \neq 0$, e isso estabelece a fórmula para a primitiva mais geral de $\sec^2 kx$.

EXEMPLO 3 Determinando primitivas com o auxílio da Tabela 4.2

Determine a primitiva geral de cada uma das seguintes funções.

(a) $f(x) = x^5$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(c) $h(x) = \text{sen } 2x$

(d) $i(x) = \cos \dfrac{x}{2}$

(e) $j(x) = e^{-3x}$

(f) $k(x) = 2^x$

SOLUÇÃO

(a) $F(x) = \dfrac{x^6}{6} + C$ — Fórmula 1 com $n = 5$

(b) $g(x) = x^{-1/2}$, logo

$$G(x) = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$$ — Fórmula 1 com $n = -1/2$

(c) $H(x) = \dfrac{-\cos 2x}{2} + C$ — Fórmula 2 com $k = 2$

(d) $I(x) = \dfrac{\text{sen } (x/2)}{1/2} + C = 2 \text{ sen } \dfrac{x}{2} + C$ — Fórmula 3 com $k = 1/2$

(e) $J(x) = -\dfrac{1}{3} e^{-3x} + C$ — Fórmula 8 com $k = -3$

(f) $K(x) = \left(\dfrac{1}{\ln 2}\right) 2^x + C$ — Fórmula 13 com $a = 2, k = 1$

TABELA 4.3 Regras de linearidade para primitivas

		Função	Primitiva geral
1.	*Regra da multiplicação por constante*	$kf(x)$	$kF(x) + C$, sendo k uma constante
2.	*Regra da oposta*	$-f(x)$	$-F(x) + C$
3.	*Regra da soma ou da diferença*	$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x) + C$

Outras regras de derivadas também levam a regras de primitivas correspondentes. Podemos adicionar e subtrair primitivas, bem como multiplicá-las por constantes.

Também é fácil provar as fórmulas da Tabela 4.3: basta derivar as primitivas e verificar que o resultado está de acordo com a função original. A fórmula 2 é o caso especial $k = -1$ da fórmula 1.

EXEMPLO 4 Usando as regras de linearidade para primitivas

Determine a primitiva geral de

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \operatorname{sen} 2x$$

SOLUÇÃO Temos que $f(x) = 3g(x) + h(x)$ para as funções g e h do Exemplo 3. Como $G(x) = 2\sqrt{x}$ é uma primitiva de $g(x)$, conforme Exemplo 3b, a regra da multiplicação por constante para derivadas nos diz que $3G(x) = 3 \cdot 2\sqrt{x} = 6\sqrt{x}$ é uma primitiva de $3g(x) = 3/\sqrt{x}$. De modo análogo, pelo Exemplo 3c sabemos que $H(x) = (-1/2) \cos 2x$ é uma primitiva de $h(x) = \operatorname{sen} 2x$. A regra da soma para primitivas nos diz que

$$\begin{aligned} F(x) &= 3G(x) + H(x) + C \\ &= 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos 2x + C \end{aligned}$$

é a fórmula da primitiva geral para $f(x)$, onde C é uma constante arbitrária.

As primitivas desempenham vários papéis importantes, e os métodos e técnicas para determiná-las são uma das principais áreas de estudo do cálculo. (Esse, aliás, será o assunto do Capítulo 8.)

Problemas de valor inicial e equações diferenciais

Encontrar uma primitiva para uma função $f(x)$ é o mesmo problema de encontrar uma função $y(x)$ que satisfaça a equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Essa equação é chamada **equação diferencial**, pois envolve uma função desconhecida y que está sendo derivada (diferenciada). Para resolvê-la, precisamos de uma função $y(x)$ que a satisfaça. Encontramos tal função a partir da primitiva de $f(x)$. Para fixar a constante arbitrária que entra na fórmula da primitiva, especificamos uma condição inicial

$$y(x_0) = y_0$$

Essa condição implica que a função $y(x)$ tem o valor y_0 quando $x = x_0$. A combinação de uma equação diferencial e uma condição inicial é chamada um **problema de valor inicial**. Problemas desse tipo desempenham importantes papéis em todas as áreas da ciência. Eis um exemplo de como resolver um problema de valor inicial.

EXEMPLO 5 Determinando uma curva a partir de sua função coeficiente angular e um ponto

Determine a curva cujo coeficiente angular no ponto (x, y) é $3x^2$ sabendo que ela deve passar pelo ponto $(1, -1)$.

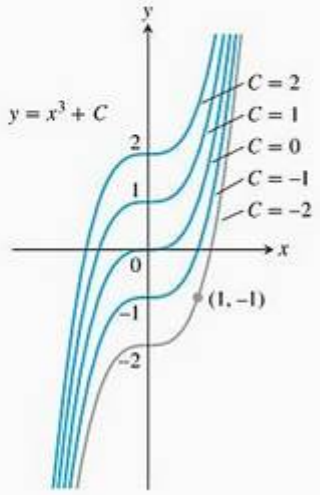


FIGURA 4.54 As curvas $y = x^3 + C$ ocupam o plano cartesiano sem se sobrepor. No Exemplo 5, identificamos a curva $y = x^3 - 2$ como aquela que passa pelo ponto dado $(1, -1)$.

SOLUÇÃO Em linguagem matemática, foi pedido que se resolvesse o problema do valor inicial, que consiste no seguinte.

A equação diferencial: $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$ O coeficiente angular da curva é $3x^2$.

A condição inicial: $y(1) = -1$

1. *Resolva a equação diferencial*: A função y é uma primitiva de $f(x) = 3x^2$, logo

$$y = x^3 + C$$

Esse resultado nos diz que y é igual a $x^3 + C$ para algum valor de C. Determinamos esse valor a partir da condição $y(1) = -1$.

2. Calcule C:

$$y = x^3 + C$$
$$-1 = (1)^3 + C \quad \text{Condição inicial } y(1) = -1$$
$$C = -2$$

A curva que desejamos é $y = x^3 - 2$ (Figura 4.54).

A primitiva mais geral $F(x) + C$ (que era $x^3 + C$ no Exemplo 5) da função $f(x)$ fornece a **solução geral** $y = F(x) + C$ da equação diferencial $dy/dx = f(x)$. A solução geral dá *todas* as soluções da equação (há infinitas, uma para cada valor de C). **Resolvemos** a equação diferencial determinando a solução geral. Então resolvemos o problema do valor inicial determinando a **solução particular** que satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$.

Primitivas e movimento

Já vimos que a derivada da posição de um objeto fornece sua velocidade, e que a derivada de sua velocidade fornece a aceleração. Se conhecemos a aceleração de um objeto, então podemos achar uma primitiva e assim recuperar a velocidade e, a partir de uma primitiva da velocidade, recuperar a função posição. Esse processo foi usado como uma aplicação do Corolário 2 na Seção 4.2. Agora que contamos com a terminologia e a estrutura conceitual das primitivas, revisitaremos esse problema, desta vez do ponto de vista das equações diferenciais.

EXEMPLO 6 Jogando um pacote de um balão em ascensão

Um balão que sobe a uma taxa de 12 pés/s está a uma altura de 80 pés acima do solo quando um pacote é jogado. Quanto tempo o pacote demora para chegar ao solo?

SOLUÇÃO Faça $v(t)$ denotar a velocidade do pacote no tempo t, e $s(t)$ sua altura acima do solo. A aceleração da gravidade perto da superfície terrestre é 32 pés/s^2. Admitindo que outras forças não atuem sobre o pacote atirado, temos que

$$\frac{dv}{dt} = -32 \quad \text{Negativo, pois a gravidade atua no sentido da diminuição de } s.$$

Isso leva ao problema de valor inicial

$$\textit{Equação diferencial}: \frac{dv}{dt} = -32$$
$$\textit{Condição inicial}: v(0) = 12$$

que é nosso modelo matemático para o movimento do pacote. Resolvemos o problema de valor inicial para obter a velocidade do pacote.

1. *Resolva a equação diferencial*: A fórmula geral para uma primitiva de -32 é

$$v = -32t + C$$

Tendo encontrado a solução geral para a equação diferencial, usamos a condição inicial para determinar a solução particular que resolve nosso problema.

2. *Calcule C*:

$$12 = -32(0) + C \quad \text{Condição inicial } v(0) = 12$$
$$C = 12$$

A solução do problema de valor inicial é

$$v = -32t + 12$$

Como a velocidade é a derivada da altura e ao ser atirado (no instante $t = 0$) a altura do pacote era de 80 pés, agora temos um segundo problema de valor inicial.

Equação diferencial: $\dfrac{ds}{dt} = 32t + 12$ Faça $v = ds/dt$ na última equação.

Condição inicial: $s(0) = 80$

Resolvemos esse problema de valor inicial para determinar a altura em função de t.

1. *Resolva a equação diferencial*: Achando a primitiva geral de $-32t + 12$, você chega a

$$s = -16t^2 + 12t + C$$

2. *Calcule C*:

$$80 = -16(0)^2 + 12(0) + C \quad \text{Condição inicial } s(0) = 80$$
$$C = 80$$

A altura do pacote acima do solo no instante t é

$$s = -16t^2 + 12t + 80$$

Use a solução: Para determinar quanto tempo o pacote leva para chegar ao solo, tornamos s igual a 0 e encontramos t:

$$-16t^2 + 12t + 80 = 0$$
$$-4t^2 + 3t + 20 = 0$$
$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{329}}{-8} \quad \text{Fórmula quadrática}$$
$$t \approx -1{,}89, \qquad t \approx 2{,}64$$

O pacote atinge o solo cerca de 2,64 s depois de ser jogado do balão. (A raiz negativa não tem significado físico.)

Integrais indefinidas

Um símbolo especial é usado para denotar o conjunto de todas as primitivas de uma função f.

Definições **Integral indefinida, integrando**

O conjunto de todas as primitivas de f é a **integral indefinida** de f em relação a x, denotada por

$$\int f(x)dx$$

$\int$ é o **símbolo da integral**. A função f é o **integrando** da integral e x é a **variável de integração**.

Usando essa notação, reelaboramos as soluções do Exemplo 1, desta maneira:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \left(\frac{1}{x} + 2e^{2x}\right) dx = \ln|x| + e^{2x} + C$$

Essa notação relaciona-se à principal aplicação das primitivas, que será explorada no Capítulo 5. As primitivas desempenham papel essencial no cálculo dos limites de somas infinitas, uma utilidade maravilhosa e surpreendente que será descrita em um resultado central do Capítulo 5, denominado o teorema fundamental do cálculo.

EXEMPLO 7 Integração indefinida feita termo a termo e reescrevendo a constante de integração

Calcule

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx$$

SOLUÇÃO Se reconhecemos que $(x^3/3) - x^2 + 5x$ é uma primitiva de $x^2 - 2x + 5$, podemos calcular a integral como

$$\int (x^2 - 2x + 5)dx = \overbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}^{\text{primitiva}} + \underbrace{C}_{\text{constante arbitrária}}$$

Se não reconhecemos a primitiva tão facilmente, podemos gerá-la termo a termo com as regras da soma, da diferença e da multiplicação por constante:

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5)\,dx &= \int x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx \\ &= \int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 5\int 1\,dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) - 2\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) + 5(x + C_3) \\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 - 2C_2 + 5x + 5C_3\end{aligned}$$

Essa fórmula é desnecessariamente complicada. Se combinamos C_1, $-2C_2$ e $5C_3$ em uma única constante arbitrária $C = C_1 - 2C_2 + 5C_3$, a fórmula é simplificada para

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

e *ainda* fornece todas as primitivas existentes. Por essa razão, recomendamos que você vá direto à forma final, mesmo que decida integrar termo a termo. Escreva

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5)\,dx &= \int x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C\end{aligned}$$

Encontre a primitiva mais simples possível para cada parte e adicione a constante arbitrária de integração no final.

Exercícios 4.8

Determinando primitivas

Nos exercícios 1–24, determine uma primitiva para cada função. Faça mentalmente quantas você puder. Verifique suas respostas por diferenciação.

1. (a) $2x$ (b) x^2 (c) $x^2 - 2x + 1$
2. (a) $6x$ (b) x^7 (c) $x^7 - 6x + 8$
3. (a) $-3x^{-4}$ (b) x^{-4} (c) $x^{-4} + 2x + 3$
4. (a) $2x^{-3}$ (b) $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$ (c) $-x^{-3} + x - 1$
5. (a) $\frac{1}{x^2}$ (b) $\frac{5}{x^2}$ (c) $2 - \frac{5}{x^2}$
6. (a) $-\frac{2}{x^3}$ (b) $\frac{1}{2x^3}$ (c) $x^3 - \frac{1}{x^3}$
7. (a) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (c) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
8. (a) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ (b) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ (c) $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
9. (a) $\frac{2}{3}x^{-1/3}$ (b) $\frac{1}{3}x^{-2/3}$ (c) $-\frac{1}{3}x^{-4/3}$
10. (a) $\frac{1}{2}x^{-1/2}$ (b) $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$ (c) $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$
11. (a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{7}{x}$ (c) $1 - \frac{5}{x}$
12. (a) $\frac{1}{3x}$ (b) $\frac{2}{5x}$ (c) $1 + \frac{4}{3x} - \frac{1}{x^2}$
13. (a) $-\pi \operatorname{sen} \pi x$ (b) $3 \operatorname{sen} x$ (c) $\operatorname{sen} \pi x - 3 \operatorname{sen} 3x$
14. (a) $\pi \cos \pi x$ (b) $\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$ (c) $\cos \frac{\pi x}{2} + \pi \cos x$
15. (a) $\sec^2 x$ (b) $\frac{2}{3} \sec^2 \frac{x}{3}$ (c) $-\sec^2 \frac{3x}{2}$
16. (a) $\operatorname{cosec}^2 x$ (b) $-\frac{3}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{3x}{2}$ (c) $1 - 8 \operatorname{cosec}^2 2x$
17. (a) $\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$ (b) $-\operatorname{cosec} 5x \operatorname{cotg} 5x$ (c) $-\pi \operatorname{cosec} \frac{\pi x}{2} \operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2}$
18. (a) $\sec x \operatorname{tg} x$ (b) $4 \sec 3x \operatorname{tg} 3x$ (c) $\sec \frac{\pi x}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$
19. (a) e^{3x} (b) e^{-x} (c) $e^{x/2}$
20. (a) e^{-2x} (b) $e^{4x/3}$ (c) $e^{-x/5}$
21. (a) 3^x (b) 2^{-x} (c) $\left(\frac{5}{3}\right)^x$
22. (a) $x^{\sqrt{3}}$ (b) x^{π} (c) $x^{\sqrt{2}-1}$
23. (a) $\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$ (b) $\frac{1}{2(x^2 + 1)}$ (c) $\frac{1}{1 + 4x^2}$
24. (a) $x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (b) $x^2 + 2^x$ (c) $\pi^x - x^{-1}$

Determinando integrais indefinidas

Nos exercícios 25–70, determine a primitiva mais geral ou a integral indefinida. Verifique suas respostas por diferenciação.

25. $\int (x + 1)\, dx$
26. $\int (5 - 6x)\, dx$
27. $\int \left(3t^2 + \frac{t}{2}\right) dt$
28. $\int \left(\frac{t^2}{2} + 4t^3\right) dt$
29. $\int (2x^3 - 5x + 7)\, dx$
30. $\int (1 - x^2 - 3x^5)\, dx$
31. $\int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$
32. $\int \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x\right) dx$
33. $\int x^{-1/3}\, dx$
34. $\int x^{-5/4}\, dx$
35. $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$
36. $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$
37. $\int \left(8y - \frac{2}{y^{1/4}}\right) dy$
38. $\int \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}}\right) dy$
39. $\int 2x(1 - x^{-3})\, dx$
40. $\int x^{-3}(x + 1)\, dx$
41. $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2}\, dt$
42. $\int \frac{4 + \sqrt{t}}{t^3}\, dt$
43. $\int (-2 \cos t)\, dt$
44. $\int (-5 \operatorname{sen} t)\, dt$
45. $\int 7 \operatorname{sen} \frac{\theta}{3}\, d\theta$
46. $\int 3 \cos 5\theta\, d\theta$
47. $\int (-3 \operatorname{cosec}^2 x)\, dx$
48. $\int \left(-\frac{\sec^2 x}{3}\right) dx$
49. $\int \frac{\operatorname{cosec} \theta \operatorname{cotg} \theta}{2}\, d\theta$
50. $\int \frac{2}{5} \sec \theta \operatorname{tg} \theta\, d\theta$
51. $\int (e^{3x} + 5e^{-x})\, dx$
52. $\int (2e^x - 3e^{-2x})\, dx$
53. $\int (e^{-x} + 4^x)\, dx$
54. $\int (1{,}3)^x\, dx$
55. $\int (4 \sec x \operatorname{tg} x - 2 \sec^2 x)\, dx$
56. $\int \frac{1}{2}(\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x)\, dx$
57. $\int (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{cosec}^2 x)\, dx$
58. $\int (2 \cos 2x - 3 \operatorname{sen} 3x)\, dx$
59. $\int \frac{1 + \cos 4t}{2}\, dt$
60. $\int \frac{1 - \cos 6t}{2}\, dt$
61. $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2 + 1}\right) dx$
62. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{1 - y^2}} - \frac{1}{y^{1/4}}\right) dy$
63. $\int 3x^{\sqrt{3}}\, dx$
64. $\int x^{\sqrt{2}-1}\, dx$

65. $\int (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)\, d\theta$

(*Dica*: $1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta$)

66. $\int (2 + \operatorname{tg}^2 \theta)\, d\theta$

67. $\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx$

(*Dica*: $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$)

68. $\int (1 - \operatorname{cotg}^2 x)\, dx$

69. $\int \cos\theta\,(\operatorname{tg}\theta + \sec\theta)\, d\theta$

70. $\int \dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{cosec}\theta - \operatorname{sen}\theta}\, d\theta$

Verificando fórmulas de primitivas

Verifique as fórmulas dos exercícios 71–82 por diferenciação.

71. $\int (7x - 2)^3\, dx = \dfrac{(7x - 2)^4}{28} + C$

72. $\int (3x + 5)^{-2}\, dx = -\dfrac{(3x + 5)^{-1}}{3} + C$

73. $\int \sec^2(5x - 1)\, dx = \dfrac{1}{5}\operatorname{tg}(5x - 1) + C$

74. $\int \operatorname{cosec}^2\left(\dfrac{x - 1}{3}\right) dx = -3\operatorname{cotg}\left(\dfrac{x - 1}{3}\right) + C$

75. $\int \dfrac{1}{(x + 1)^2}\, dx = -\dfrac{1}{x + 1} + C$

76. $\int \dfrac{1}{(x + 1)^2}\, dx = \dfrac{x}{x + 1} + C$

77. $\int \dfrac{1}{x + 1}\, dx = \ln(x + 1) + C, \quad x > -1$

78. $\int xe^x\, dx = xe^x - e^x + C$

79. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$

80. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$

81. $\int \dfrac{\operatorname{tg}^{-1} x}{x^2}\, dx = \ln x - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \dfrac{\operatorname{tg}^{-1} x}{x} + C$

82. $\int (\operatorname{sen}^{-1} x)^2\, dx = x(\operatorname{sen}^{-1} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1 - x^2}\operatorname{sen}^{-1} x + C$

83. Diga se cada uma das fórmulas está certa ou errada e justifique sucintamente as respostas.

(a) $\int x \operatorname{sen} x\, dx = \dfrac{x^2}{2}\operatorname{sen} x + C$

(b) $\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x\cos x + C$

(c) $\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$

84. Diga se cada uma das fórmulas está certa ou errada e justifique sucintamente as respostas.

(a) $\int \operatorname{tg}\theta \sec^2\theta\, d\theta = \dfrac{\sec^3\theta}{3} + C$

(b) $\int \operatorname{tg}\theta \sec^2\theta\, d\theta = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\theta + C$

(c) $\int \operatorname{tg}\theta \sec^2\theta\, d\theta = \dfrac{1}{2}\sec^2\theta + C$

85. Diga se cada uma das fórmulas está certa ou errada e justifique sucintamente as respostas.

(a) $\int (2x + 1)^2\, dx = \dfrac{(2x + 1)^3}{3} + C$

(b) $\int 3(2x + 1)^2\, dx = (2x + 1)^3 + C$

(c) $\int 6(2x + 1)^2\, dx = (2x + 1)^3 + C$

86. Diga se cada uma das fórmulas está certa ou errada e justifique sucintamente as respostas.

(a) $\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \sqrt{x^2 + x + C}$

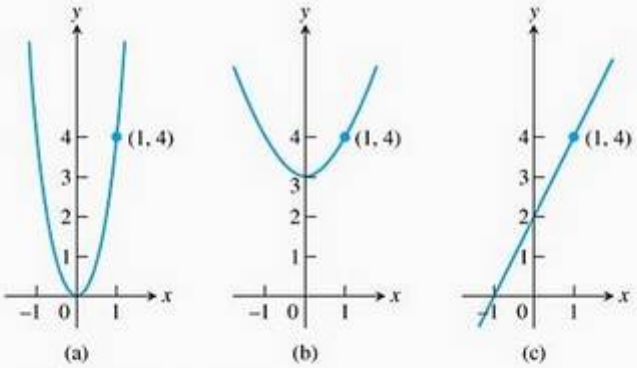
(b) $\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \sqrt{x^2 + x} + C$

(c) $\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{2x + 1}\right)^3 + C$

Problemas de valor inicial

87. Qual dos gráficos a seguir mostra a solução do problema de valor inicial

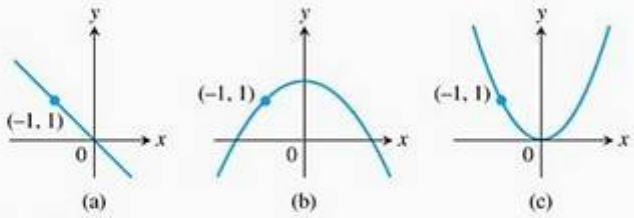
$\dfrac{dy}{dx} = 2x, \quad y = 4$ quando $x = 1$?



Justifique suas respostas.

88. Qual dos seguintes gráficos mostra a solução do problema de valor inicial

$\dfrac{dy}{dx} = -x, \quad y = 1$ quando $x = -1$?



Justifique suas respostas.

Resolva os problemas de valor inicial nos exercícios 89–110.

89. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 7, \quad y(2) = 0$

90. $\dfrac{dy}{dx} = 10 - x, \quad y(0) = -1$

91. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2} + x, \quad x > 0; \quad y(2) = 1$

92. $\dfrac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5, \quad y(-1) = 0$

93. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^{-2/3}, \quad y(-1) = -5$

94. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y(4) = 0$

95. $\dfrac{ds}{dt} = 1 + \cos t, \quad s(0) = 4$

96. $\dfrac{ds}{dt} = \cos t + \operatorname{sen} t, \quad s(\pi) = 1$

97. $\dfrac{dr}{d\theta} = -\pi \operatorname{sen} \pi\theta, \quad r(0) = 0$

98. $\dfrac{dr}{d\theta} = \cos \pi\theta, \quad r(0) = 1$

99. $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2} \sec t \operatorname{tg} t, \quad v(0) = 1$

100. $\dfrac{dv}{dt} = 8t + \operatorname{cosec}^2 t, \quad v\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -7$

101. $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{3}{t\sqrt{t^2 - 1}}, \quad t > 1, v(2) = 0$

102. $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{8}{1 + t^2} + \sec^2 t, \quad v(0) = 1$

103. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x; \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = 1$

104. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0; \quad y'(0) = 2, \quad y(0) = 0$

105. $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{2}{t^3}; \quad \left.\dfrac{dr}{dt}\right|_{t=1} = 1, \quad r(1) = 1$

106. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{3t}{8}; \quad \left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=4} = 3, \quad s(4) = 4$

107. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 6; \quad y''(0) = -8, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 5$

108. $\dfrac{d^3\theta}{dt^3} = 0; \quad \theta''(0) = -2, \quad \theta'(0) = -\dfrac{1}{2}, \quad \theta(0) = \sqrt{2}$

109. $y^{(4)} = -\operatorname{sen} t + \cos t;$
$y'''(0) = 7, \quad y''(0) = y'(0) = -1, \quad y(0) = 0$

110. $y^{(4)} = -\cos x + 8 \operatorname{sen} 2x;$
$y'''(0) = 0, \quad y''(0) = y'(0) = 1, \quad y(0) = 3$

Determinando curvas

111. Determine a curva $y = f(x)$ no plano xy que passa pelo ponto (9, 4) cujo coeficiente angular em cada ponto é $3\sqrt{x}$.

112. (a) Determine uma curva $y = f(x)$ com as seguintes propriedades:

i. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$

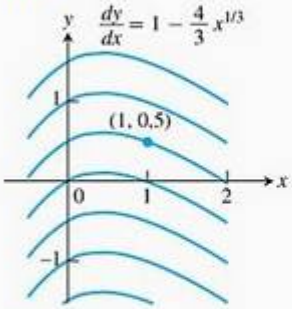
ii. Seu gráfico passa pelo ponto (0, 1), tendo aí uma tangente horizontal.

(b) Quantas curvas como essa existem? Como você sabe?

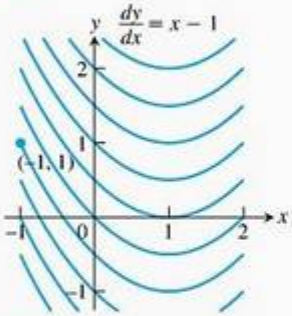
Curvas (integrais) solução

Os exercícios 113–116 mostram curvas solução para equações diferenciais. Em cada exercício, determine uma equação para a curva que passa pelo ponto marcado.

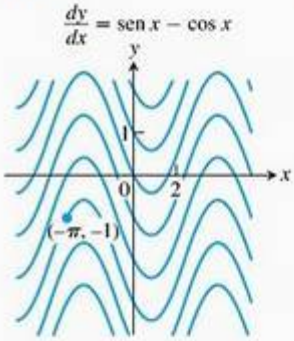
113.



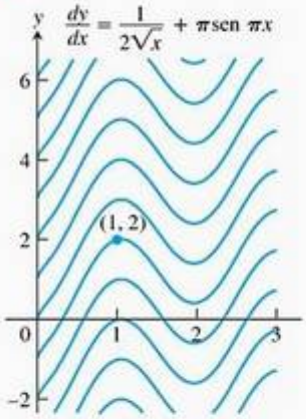
114.



115.



116.



Aplicações

117. Determinando o deslocamento a partir de uma primitiva da velocidade

(a) Suponha que a velocidade de um corpo que se desloca ao longo do eixo s seja

$$\frac{ds}{dt} = v = 9{,}8t - 3$$

i. Determine o deslocamento do corpo no intervalo de tempo de $t = 1$ a $t = 3$, dado que $s = 5$ quando $t = 0$.

ii. Determine o deslocamento do corpo de $t = 1$ a $t = 3$, dado que $s = -2$ quando $t = 0$.

iii. Agora determine o deslocamento do corpo de $t = 1$ a $t = 3$, dado que $s = s_0$ quando $t = 0$.

(b) Suponha que a posição s de um corpo que se desloca ao longo de um eixo coordenado seja uma função derivável do tempo t. Será mesmo verdade que, se você conhecer uma primitiva da função velocidade ds/dt, poderá determinar o deslocamento de $t = a$ a $t = b$ ainda que não saiba a posição exata do corpo nos dois instantes? Justifique sua resposta.

118. **Decolando da Terra** Um foguete decola da superfície terrestre com uma aceleração constante de 20 m/s^2. Qual será sua velocidade 1 min depois?

119. **Parando um carro a tempo** Você está dirigindo em uma rodovia a uma velocidade constante de 60 mi/h (88 pés/s) quando vê um acidente à frente e aciona os freios. Que desaceleração constante é necessária para frear seu carro no espaço de 242 pés? Para determiná-la, siga os passos a seguir.

1. Resolva o problema do valor inicial

Equação diferencial: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -k$ (k constante)

Condições iniciais: $\dfrac{ds}{dt} = 88$ e $s = 0$ quando $t = 0$.

Medindo tempo e distância a partir do momento em que os freios são acionados.

2. Determine o valor de t que torna $ds/dt = 0$ (a resposta envolve k).

3. Determine o valor de k que torna $s = 242$ para o valor de t que você encontrou no passo 2.

120. **Freando uma motocicleta** Um programa estadual de segurança do motociclista em Illinois exige que os condutores dirigindo a 30 mi/h (44 pés/s) estejam aptos a parar no espaço de 45 pés. Que desaceleração constante é necessária para fazer isso?

121. **Movimento ao longo de um eixo cartesiano** Uma partícula se desloca ao longo de um eixo coordenado com aceleração $a = d^2s/dt^2 = 15\sqrt{t} - (3/\sqrt{t})$, sujeito a $ds/dt = 4$ e $s = 0$ quando $t = 1$. Determine

(a) a velocidade $v = ds/dt$ em termos de t.

(b) a posição s em termos de t.

122. **O martelo e a pena** Quando o astronauta da Apollo 15 David Scott jogou um martelo e uma pena na Lua para demonstrar que no vácuo todos os corpos caem com a mesma aceleração (constante), ele os jogou de aproximadamente 4 pés acima do solo. A cobertura televisiva do evento mostra o martelo e a pena caindo mais lentamente que na Terra, onde, no vácuo, eles deveriam ter gasto só meio segundo para percorrer os 4 pés. Quanto tempo gastaram o martelo e a pena para percorrer os 4 pés na Lua? Para descobrir, resolva o seguinte problema do valor inicial para s em função de t. Depois determine o valor de t que torna s igual a 0.

Equação diferencial: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -5{,}2$ pés/s^2

Condições iniciais: $\dfrac{ds}{dt} = 0$ e $s = 4$ quando $t = 0$

123. **Movimento com aceleração constante** A equação-padrão para a posição s de um corpo que se desloca com aceleração a constante ao longo de um eixo coordenado é

$$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + s_0 \qquad (1)$$

onde v_0 e s_0 são a velocidade e a posição no tempo $t = 0$. Deduza essa equação resolvendo o problema do valor inicial

Equação diferencial: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = a$

Condições iniciais: $\dfrac{ds}{dt} = v_0$ e $s = s_0$ quando $t = 0$

124. **Queda livre próximo à superfície de um planeta** Para a queda livre próximo à superfície de um planeta onde a aceleração da gravidade tem uma magnitude constante de g unidades de comprimento/s^2, a Equação (1) do Exercício 123 toma a forma

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \qquad (2)$$

onde s é a altura do corpo acima da superfície. A equação tem sinal negativo, pois a aceleração atua para baixo, no sentido da diminuição de s. A velocidade v_0 será positiva se o objeto estiver subindo no tempo $t = 0$ e negativa se o objeto estiver caindo.

Em vez de usar o resultado do Exercício 123, você pode deduzir a Equação (2) diretamente resolvendo um problema adequado de valor inicial. Que problema de valor inicial? Resolva-o para certificar-se de que é o problema certo, explicando os passos da solução conforme você avança.

Teoria e exemplos

125. Suponha que

$$f(x) = \frac{d}{dx}(1 - \sqrt{x}) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{d}{dx}(x + 2)$$

Determine:

(a) $\int f(x)\,dx$ (b) $\int g(x)\,dx$

(c) $\int [-f(x)]\,dx$ (d) $\int [-g(x)]\,dx$

(e) $\int [f(x) + g(x)]\,dx$ (f) $\int [f(x) - g(x)]\,dx$

126. **Unicidade de soluções** Se ambas as funções deriváveis $y = F(x)$ e $y = G(x)$ resolvem o problema do valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \qquad y(x_0) = y_0,$$

em um intervalo I, deveria ser $F(x) = G(x)$ para cada x em I? Justifique sua resposta.

USANDO O COMPUTADOR

Use um SAC para resolver os problemas de valor inicial nos exercícios 127–130. Faça um gráfico das curvas integrais.

127. $y' = \cos^2 x + \operatorname{sen} x, \quad y(\pi) = 1$

128. $y' = \frac{1}{x} + x, \quad y(1) = -1$

129. $y' = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad y(0) = 2$

130. $y'' = \frac{2}{x} + \sqrt{x}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0$

Questões de revisão

1. O que se pode dizer sobre os valores extremos de uma função que é contínua em um intervalo fechado?
2. O que significa uma função possuir extremo local em seu domínio? E um valor extremo absoluto? Como se relacionam os extremos local e absoluto? Exemplifique.
3. Como você determina os extremos absolutos de uma função contínua ao longo de um intervalo fechado? Exemplifique.
4. Quais são as hipóteses e a conclusão do teorema de Rolle? As hipóteses são mesmo necessárias? Explique.
5. Quais são as hipóteses e a conclusão do teorema do valor médio? Que interpretações físicas esse teorema pode ter?
6. Apresente os três corolários do teorema do valor médio.
7. Como, às vezes, é possível identificar uma função $f(x)$ conhecendo f' e o valor de f em um ponto $x = x_0$? Exemplifique.
8. O que é o teste da primeira derivada para extremos locais? Dê exemplos de sua aplicação.
9. Como testamos uma função duplamente derivável para verificar se é côncava para cima ou para baixo? Exemplifique.
10. O que é um ponto de inflexão? Exemplifique. Que significado físico os pontos de inflexão podem às vezes apresentar?
11. O que é o teste da segunda derivada para extremos locais? Dê exemplos de como aplicá-lo.
12. O que as derivadas informam sobre a forma do gráfico de uma função?
13. Enumere os passos que você daria para fazer o gráfico de uma função polinomial. Ilustre com um exemplo.
14. O que é um ponto cuspidal? Dê exemplos.
15. Enumere os passos que você daria para fazer o gráfico de uma função racional. Ilustre com um exemplo.
16. Esboce a estratégia geral para resolver problemas envolvendo máximos e mínimos. Exemplifique.
17. Descreva a regra de L'Hôpital. Como você sabe quando usá-la ou não? Dê um exemplo.
18. Como você pode lidar às vezes com limites que geram formas indeterminadas como ∞/∞, $\infty \cdot 0$ e $\infty - \infty$? Dê exemplos.
19. Descreva o método de Newton para resolver equações. Exemplifique. Quais são alguns dos pontos a observar quando se usa esse método?
20. Uma função pode ter mais de uma primitiva? Se puder, então como as primitivas estão relacionadas? Explique.
21. O que é uma integral indefinida? Como você a calcula? Que fórmulas gerais você conhece para calcular integrais indefinidas?
22. Como você poderia eventualmente resolver uma equação diferencial da forma $dy/dx = f(x)$?
23. O que é um problema do valor inicial? Como você resolve esse tipo de problema? Exemplifique.
24. Se você conhece a aceleração de um corpo que se desloca ao longo de uma reta coordenada em função do tempo, o que mais você precisa saber para determinar a função posição do corpo? Exemplifique.

Exercícios práticos

Existência de valores extremos

1. $f(x) = x^3 + 2x + \text{tg}\, x$ possui algum máximo ou mínimo local? Justifique sua resposta.

2. $g(x) = \text{cosec}\, x + 2\, \text{cotg}\, x$ possui algum máximo local? Justifique sua resposta.

3. $f(x) = (7 + x)(11 - 3x)^{1/3}$ possui algum mínimo absoluto? E máximo absoluto? Em caso afirmativo, determine-os ou justifique sua ausência. Apresente todos os pontos críticos de f.

4. Determine os valores de a e b tal que a função

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 - 1}$$

tenha um valor extremo local 1 quando $x = 3$. Esse extremo é um máximo local ou um mínimo local? Justifique sua resposta.

5. $g(x) = e^x - x$ tem um mínimo absoluto? E um máximo absoluto? Em caso positivo, encontre-os; do contrário, explique por que eles não existem. Liste todos os pontos críticos de g.

6. $f(x) = 2e^x/(1 + x^2)$ tem um mínimo absoluto? E um máximo absoluto? Em caso positivo, encontre-os; do contrário, explique por que eles não existem. Liste todos os pontos críticos de f.

Nos exercícios 7 e 8, determine o máximo absoluto e o mínimo absoluto de f ao longo do intervalo.

7. $f(x) = x - 2 \ln x, \quad 1 \le x \le 3$
8. $f(x) = (4/x) + \ln x^2, \quad 1 \le x \le 4$

9. A função maior inteiro $f(x) = \lfloor x \rfloor$, definida para qualquer x, admite um valor máximo local 0 em cada ponto de $[0, 1)$. Algum desses valores máximos locais poderia ser o mínimo local de f? Justifique sua resposta.

10. (a) Dê um exemplo de uma função derivável f cuja primeira derivada seja zero em algum ponto c, embora f não tenha nem um máximo local nem um mínimo local em c.

    (b) Como isso é consistente com o Teorema 2 da Seção 4.1? Justifique sua resposta.

11. A função $y = 1/x$ não assume um valor máximo nem mínimo no intervalo $0 < x < 1$ mesmo sendo contínua aí. Isso contradiz o teorema do valor extremo para funções contínuas? Por quê?

12. Quais são os valores máximo e mínimo da função $y = |x|$ no intervalo $-1 \le x < 1$? Observe que o intervalo não é fechado. Isso é consistente com o teorema do valor extremo para funções contínuas? Por quê?

13. T Um gráfico que seja grande o suficiente para mostrar o comportamento global de uma função pode deixar de revelar importantes aspectos locais. O gráfico de $f(x) = (x^8/8) - (x^6/2) - x^5 + 5x^3$ é um desses casos.

    (a) Faça o gráfico de f no intervalo $-2{,}5 \le x \le 2{,}5$. Onde o gráfico parece ter extremos locais ou pontos de inflexão?

    (b) Agora, fatore $f'(x)$ e mostre que f tem um máximo local em $x = \sqrt[3]{5} \approx 1{,}70998$ e mínimos locais em $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}73205$.

    (c) Amplie no gráfico para achar uma janela de visualização que mostre a presença de extremos locais em $x = \sqrt[3]{5}$ e $x = \sqrt{3}$.

    A moral da história aqui é que, sem cálculo, a existência de dois dos três extremos provavelmente passaria despercebida. Em qualquer gráfico normal da função, os valores ficariam juntos demais, ocupando um único pixel na tela.

    (*Fonte*: *Uses of technology in the Mathematics curriculum*, de Benny Evans e Jerry Johnson, Oklahoma State University, editado em 1990 pela National Science Foundation Grant USE-8950044.)

14. (*Continuação do Exercício 13.*)

    T (a) Faça o gráfico de $f(x) = (x^8/8) - (2/5)x^5 - 5x - (5/x^2) + 11$ ao longo do intervalo $-2 \le x \le 2$. Onde o gráfico parece ter extremos locais ou pontos de inflexão?

    (b) Mostre que f tem um máximo local em $x = \sqrt[7]{5} \approx 1{,}2585$ e um mínimo local em $x = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599$.

    (c) Amplie para achar uma janela de visualização que mostre a presença de extremos locais em $x = \sqrt[7]{5}$ e $x = \sqrt[3]{2}$.

Teorema do valor médio

15. (a) Demonstre que $g(t) = \text{sen}^2\, t - 3t$ decresce em cada intervalo de seu domínio.

    (b) Quantas soluções a equação $\text{sen}^2\, t - 3t = 5$ possui? Justifique sua resposta.

16. (a) Demonstre que $y = \text{tg}\, \theta$ é crescente em cada intervalo de seu domínio.

    (b) Se a conclusão em (a) estiver mesmo correta, como você explica o fato de que $\text{tg}\, \pi = 0$ é menor que $\text{tg}\, (\pi/4) = 1$?

17. **(a)** Demonstre que a equação $x^4 + 2x^2 - 2 = 0$ tem exatamente uma solução em $[0, 1]$.

(b) Determine a solução com o maior número de casas decimais que você conseguir.

18. **(a)** Demonstre que $f(x) = x/(x + 1)$ é crescente em cada intervalo de seu domínio.

(b) Demonstre que $f(x) = x^3 + 2x$ não possui valores máximo ou mínimo locais.

19. **Água de um reservatório** Como resultado das fortes chuvas, o volume de água de um reservatório aumentou 1.400 acres-pés em 24 h. Demonstre que, em algum momento, o volume estava aumentando a uma taxa maior que 225.000 gal/min. (Um acre-pé equivale a 43.560 pés^3, o volume que cobriria um acre com um pé de profundidade. Um pé^3 contém 7,48 galões. Um galão contém 231 pol^3. Uma polegada equivale a 2,54 cm.)

20. A fórmula $F(x) = 3x + C$ fornece uma função diferente para cada valor de C. Entretanto, todas essas funções têm a mesma derivada em relação a x, ou seja, $F'(x) = 3$. Essas são as únicas funções deriváveis cuja derivada é 3? Há outras? Justifique sua resposta.

21. Demonstre que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

mesmo que

$$\frac{x}{x+1} \neq -\frac{1}{x+1}$$

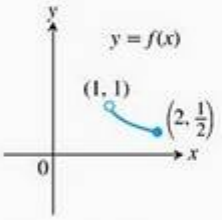
Isso não contradiz o segundo corolário do teorema do valor médio? Justifique sua resposta.

22. Calcule as primeiras derivadas de $f(x) = x^2/(x^2 + 1)$ e $g(x) = -1/(x^2 + 1)$. O que você pode concluir sobre os gráficos dessas funções?

Concluindo a partir de gráficos

Nos exercícios 23 e 24, use o gráfico para responder às questões.

23. Identifique os valores extremos globais de f e os valores de x onde eles ocorrem.

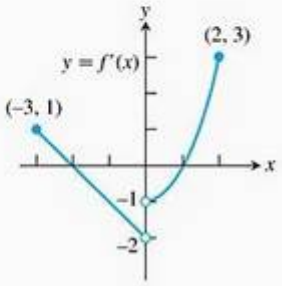


24. Estime os intervalos onde a função $y = f(x)$ é

(a) crescente.

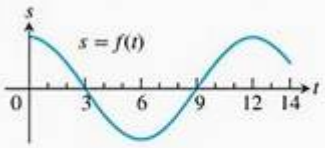
(b) decrescente.

(c) Use o gráfico de f' apresentado para indicar onde ocorrem os valores extremos locais da função e se cada extremo é um máximo ou um mínimo relativo.

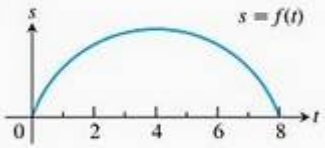


Cada um dos gráficos dos exercícios 25 e 26 é o gráfico da função posição $s = f(t)$ de um corpo que se desloca ao longo de um eixo coordenado (t representa o tempo). Em que tempo aproximadamente, se houver, cada corpo tem **(a)** velocidade igual a zero? **(b)** aceleração igual a zero? Durante aproximadamente que intervalos de tempo o corpo se move **(c)** para a frente? **(d)** para trás?

25.



26.



Gráficos e construção de gráficos

Faça o gráfico das curvas nos exercícios 27–42.

27. $y = x^2 - (x^3/6)$

28. $y = x^3 - 3x^2 + 3$

29. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$

30. $y = (1/8)(x^3 + 3x^2 - 9x - 27)$

31. $y = x^3(8 - x)$

32. $y = x^2(2x^2 - 9)$

33. $y = x - 3x^{2/3}$

34. $y = x^{1/3}(x - 4)$

35. $y = x\sqrt{3 - x}$

36. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

37. $y = (x - 3)^2 e^x$

38. $y = xe^{-x^2}$

39. $y = \ln(x^2 - 4x + 3)$

40. $y = \ln(\operatorname{sen} x)$

41. $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

42. $y = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

Cada um dos exercícios 43–48 fornece a primeira derivada de uma função $y = f(x)$. **(a)** Em quais pontos, se houver, o gráfico de f tem um máximo local, um mínimo local ou um ponto de inflexão? **(b)** Esboce a forma geral do gráfico.

43. $y' = 16 - x^2$

44. $y' = x^2 - x - 6$

45. $y' = 6x(x + 1)(x - 2)$

46. $y' = x^2(6 - 4x)$

47. $y' = x^4 - 2x^2$

48. $y' = 4x^2 - x^4$

Nos exercícios 49–52, faça o gráfico de cada função. Em seguida, use a primeira derivada da função para explicar o que você está vendo.

49. $y = x^{2/3} + (x - 1)^{1/3}$
50. $y = x^{2/3} + (x - 1)^{2/3}$
51. $y = x^{1/3} + (x - 1)^{1/3}$
52. $y = x^{2/3} - (x - 1)^{1/3}$

Esboce os gráficos das funções nos exercícios 53–60.

53. $y = \dfrac{x + 1}{x - 3}$
54. $y = \dfrac{2x}{x + 5}$
55. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$
56. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$
57. $y = \dfrac{x^3 + 2}{2x}$
58. $y = \dfrac{x^4 - 1}{x^2}$
59. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3}$
60. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

Aplicando a regra de L'Hôpital

Nos exercícios 61–72, use a regra de L'Hôpital para determinar os limites.

61. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$
62. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$
63. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$
64. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x + \operatorname{sen} x}$
65. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{tg}(x^2)}$
66. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} nx}$
67. $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \sec 7x \cos 3x$
68. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \sec x$
69. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x)$
70. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{x^2}\right)$
71. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}\right)$
72. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 - 1} - \dfrac{x^3}{x^2 + 1}\right)$

Calculando limites

Determine os limites nos exercícios 73–84.

73. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{10^x - 1}{x}$
74. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{3^\theta - 1}{\theta}$
75. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{\operatorname{sen} x} - 1}{e^x - 1}$
76. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{-\operatorname{sen} x} - 1}{e^x - 1}$
77. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5 - 5\cos x}{e^x - x - 1}$
78. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4 - 4e^x}{xe^x}$
79. $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{t - \ln(1 + 2t)}{t^2}$
80. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{e^{x-4} + 3 - x}$
81. $\lim\limits_{t \to 0^+} \left(\dfrac{e^t}{t} - \dfrac{1}{t}\right)$
82. $\lim\limits_{y \to 0^+} e^{-1/y} \ln y$
83. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{b}{x}\right)^{kx}$
84. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{7}{x^2}\right)$

Otimização

85. A soma de dois números não negativos é 36. Diga quais serão esses números se
    (a) a diferença de suas raízes quadradas tiver de ser a maior possível.
    (b) a soma de suas raízes quadradas tiver de ser a maior possível.

86. A soma de dois números não negativos é 20. Diga quais serão esses números
    (a) se o produto de um multiplicado pela raiz quadrada do outro tiver de ser o maior possível.
    (b) se a soma de um número com a raiz quadrada do outro tiver de ser a maior possível.

87. Um triângulo isósceles tem seu vértice na origem e sua base é paralela ao eixo x, estando os vértices da base acima do eixo, sobre a curva $y = 27 - x^2$. Determine a maior área que o triângulo pode assumir.

88. Um cliente lhe pediu que projetasse um tanque retangular de aço inoxidável, sem tampa. Ele deverá possuir base quadrada e um volume de 32 pés^3 e será soldado a partir de chapas de aço com espessura de 1/4 de polegada, sem pesar mais que o estritamente necessário. Que dimensões você recomendaria?

89. Determine a altura e o raio do maior cilindro circular reto que pode ser colocado dentro de uma esfera de raio $\sqrt{3}$

90. A figura a seguir apresenta dois cones circulares retos, um de cabeça para baixo e dentro do outro. As duas bases são paralelas e o vértice do menor coincide com o centro da base do maior. Que valores de r e h darão ao cone menor o maior volume possível?

91. **Manufaturando pneus** Sua empresa pode manufaturar por dia x centenas de pneus com qualidade A e y centenas de pneus com qualidade B, onde $0 \le x \le 4$ e

$$y = \frac{40 - 10x}{5 - x}$$

Seu lucro sobre o pneu qualidade A é duas vezes maior que o lucro sobre o pneu de qualidade B. Qual é o número de cada tipo de pneu que torna a produção mais lucrativa?

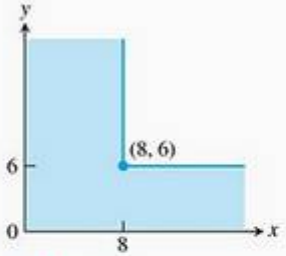
92. Deslocamento de uma partícula As posições de duas partículas no eixo s são $s_1 = \cos t$ e $s_2 = \cos(t + \pi/4)$.

(a) Qual é a maior distância que separa as partículas?

(b) Quando as partículas colidirão?

93. Caixa sem tampa Uma caixa retangular, sem tampa, será confeccionada a partir de uma folha de papelão de 10×16 pol recortando-se dos vértices quadrados com lados iguais e dobrando-se os lados para cima. Determine analiticamente as dimensões da caixa de maior volume e o volume máximo. Fundamente sua resposta graficamente.

94. O problema da escada Qual é o comprimento aproximado (em pés) da maior escada que você consegue transportar horizontalmente de um corredor para o outro, passando pela esquina, como mostrado na figura a seguir? Arredonde sua resposta para um número inteiro.



O método de Newton

95. Seja $f(x) = 3x - x^3$. Mostre que a equação $f(x) = -4$ tem uma solução no intervalo $[2, 3]$ e use o método de Newton para determiná-la.

96. Seja $f(x) = x^4 - x^3$. Mostre que a equação $f(x) = 75$ tem uma solução no intervalo $[3, 4]$ e use o método de Newton para determiná-la.

Determinando integrais indefinidas

Nos exercícios 97–120, determine as integrais indefinidas (as primitivas mais gerais). Verifique suas respostas por derivação.

97. $\int (x^3 + 5x - 7)\,dx$

98. $\int \left(8t^3 - \frac{t^2}{2} + t\right) dt$

99. $\int \left(3\sqrt{t} + \frac{4}{t^2}\right) dt$

100. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{3}{t^4}\right) dt$

101. $\int \frac{dr}{(r+5)^2}$

102. $\int \frac{6\,dr}{(r - \sqrt{2})^3}$

103. $\int 3\theta\sqrt{\theta^2 + 1}\,d\theta$

104. $\int \frac{\theta}{\sqrt{7 + \theta^2}}\,d\theta$

105. $\int x^3(1 + x^4)^{-1/4}\,dx$

106. $\int (2 - x)^{3/5}\,dx$

107. $\int \sec^2 \frac{s}{10}\,ds$

108. $\int \operatorname{cosec}^2 \pi s\,ds$

109. $\int \operatorname{cosec}\sqrt{2}\theta \operatorname{cotg}\sqrt{2}\theta\,d\theta$

110. $\int \sec\frac{\theta}{3}\operatorname{tg}\frac{\theta}{3}\,d\theta$

111. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{4}\,dx$

112. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$ $\left(\textit{Dica: } \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)$

113. $\int \left(\frac{3}{x} - x\right) dx$

114. $\int \left(\frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^2 + 1}\right) dx$

115. $\int \left(\frac{1}{2}e^t - e^{-t}\right) dt$

116. $\int (5^s + s^5)\,ds$

117. $\int \theta^{1-\pi}\,d\theta$

118. $\int 2^{\pi + r}\,dr$

119. $\int \frac{3}{2x\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$

120. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{16 - \theta^2}}$

Problemas de valor inicial

Nos exercícios 121–124, resolva os problemas de valor inicial.

121. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{x^2}, \quad y(1) = -1$

122. $\frac{dy}{dx} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2, \quad y(1) = 1$

123. $\frac{d^2r}{dt^2} = 15\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}}; \quad r'(1) = 8, \quad r(1) = 0$

124. $\frac{d^3r}{dt^3} = -\cos t; \quad r''(0) = r'(0) = 0, \quad r(0) = -1$

Teoria e exemplos

125. A integração do item (a) e a do item (b) podem estar ambas corretas? Explique.

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} x + C$

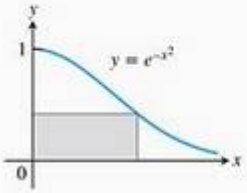
(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\int -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\cos^{-1} x + C$

126. A integração do item (a) e a do item (b) podem estar ambas corretas? Explique.

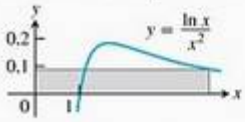
(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\int -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\cos^{-1} x + C$

(b)
$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} &= \int \frac{-du}{\sqrt{1 - (-u)^2}} && x = -u,\ dx = -du \\
&= \int \frac{-du}{\sqrt{1 - u^2}} \\
&= \cos^{-1} u + C \\
&= \cos^{-1}(-x) + C && u = -x
\end{aligned}$$

127. O retângulo apresentado na figura possui um lado no eixo y positivo, o lado vizinho no eixo x positivo e seu vértice superior direito na curva $y = e^{-x^2}$. Que dimensões dão ao retângulo a maior área possível e qual é essa área?



128. O retângulo apresentado na figura possui um lado no eixo y positivo, o lado vizinho no eixo x positivo e seu vértice superior direito na curva $y = (\ln x)/x^2$. Que dimensões dão ao retângulo a maior área possível e qual é essa área?



Nos exercícios 129 e 130, determine o máximo e o mínimo absolutos de cada função no intervalo dado.

129. $y = x \ln 2x - x, \quad \left[\frac{1}{2e}, \frac{e}{2}\right]$

130. $y = 10x(2 - \ln x), \quad (0, e^2]$

Nos exercícios 131 e 132, determine os máximos e mínimos absolutos das funções e diga onde eles ocorrem.

131. $f(x) = e^{x/\sqrt{x^4+1}}$

132. $g(x) = e^{\sqrt{3-2x-x^2}}$

133. T Faça o gráfico das funções a seguir e utilize o que você observar para localizar e estimar os valores extremos, identificar as coordenadas dos pontos de inflexão e os intervalos nos quais os gráficos são côncavos para cima ou para baixo. Confirme, então, suas estimativas trabalhando com as derivadas das funções.

(a) $y = (\ln x)/\sqrt{x}$

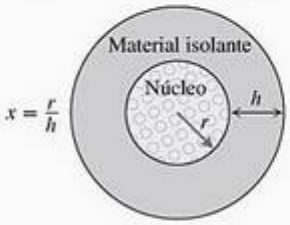
(b) $y = e^{-x^2}$

(c) $y = (1 + x)e^{-x}$

134. T Faça o gráfico de $f(x) = x \ln x$. A função parece ter um valor mínimo absoluto? Confirme sua resposta usando cálculo.

135. T Faça o gráfico de $f(x) = (\text{sen } x)^{\text{sen } x}$ no intervalo $[0, 3\pi]$. Explique o que você observa.

136. Um cabo redondo de transmissão subaquático compõe-se de um núcleo de fios de cobre envolto em material isolante não condutor. Se x representa a razão entre o raio do núcleo e a espessura do material isolante, sabe-se que a velocidade do sinal de transmissão é dada pela equação $v = x^2 \ln (1/x)$. Se o raio do núcleo é 1 cm, qual espessura h do material isolante vai proporcionar a maior velocidade de transmissão?



Exercícios adicionais

1. O que você pode dizer sobre uma função cujos valores máximo e mínimo em determinado intervalo são iguais? Justifique sua resposta.

2. Seria correto dizer que uma função descontínua não pode ter seus valores máximo e mínimo absolutos em um intervalo fechado? Justifique sua resposta.

3. O que você pode concluir sobre valores extremos de uma função contínua em um intervalo aberto? E em um intervalo semi-aberto? Justifique sua resposta.

4. Extremos locais Estude o sinal de

$$\frac{df}{dx} = 6(x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3(x - 4)^4$$

para identificar os pontos onde f tem valores máximos e mínimos locais.

5. Extremos locais

(a) Suponha que a primeira derivada de $y = f(x)$ seja

$$y' = 6(x + 1)(x - 2)^2$$

Em que pontos, se houver, f possui um máximo local, um mínimo local ou um ponto de inflexão?

(b) Suponha que a derivada de $y = f(x)$ seja

$$y' = 6x(x + 1)(x - 2)$$

Em que pontos, se houver, f possui um máximo local, um mínimo local ou um ponto de inflexão?

6. Se $f'(x) \leq 2$ para qualquer x, então qual é o máximo que os valores de f podem aumentar em $[0, 6]$? Justifique sua resposta.

7. **Limitando uma função** Suponha que f seja contínua em $[a, b]$ e que c seja um ponto interior do intervalo. Demonstre que, se $f'(x) \leq 0$ em $[a, c)$ e $f'(x) \geq 0$ em $(c, b]$, então $f(x)$ nunca será menor que $f(c)$ em $[a, b]$.

8. **Uma desigualdade**
   (a) Demonstre que $-1/2 \leq x/(1 + x^2) \leq 1/2$ para qualquer valor de x.
   (b) Suponha que f seja uma função cuja derivada é $f'(x) = x/(1 + x^2)$. Use o resultado do item (a) para demonstrar que
   $$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|$$
   para quaisquer a e b.

9. A derivada de $f(x) = x^2$ é zero em $x = 0$, mas f não é uma função constante. Isso não contradiz o corolário do teorema do valor médio, que afirma serem constantes as funções com derivada igual a zero? Justifique sua resposta.

10. **Extremos e pontos de inflexão** Seja $h = fg$ o produto de duas funções deriváveis de x.
   (a) Se f e g são positivas, com máximo local em $x = a$, e se f' e g' mudam de sinal em a, pode h ter um máximo local em a?
   (b) Se os gráficos de f e g têm ponto de inflexão em $x = a$, então o gráfico de h também tem?

   Se a resposta for "sim", então demonstre. Do contrário, dê um contra-exemplo.

11. **Determinando uma função** Use as seguintes informações para determinar os valores de a, b e c na fórmula $f(x) = (x + a)/(bx^2 + cx + 2)$.
   i. Os valores de a, b, c são ou 0 ou 1.
   ii. O gráfico de f passa pelo ponto $(-1, 0)$.
   iii. A reta $y = 1$ é uma assíntota do gráfico de f.

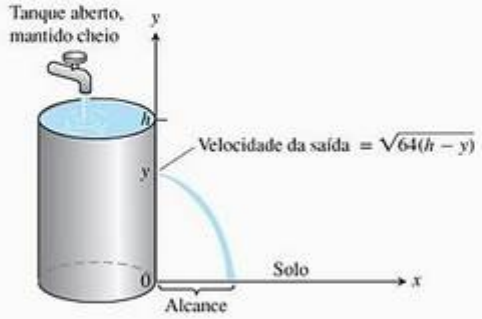
12. **Tangentes horizontais** Para que valor(es) da constante k a curva $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ tem exatamente uma tangente horizontal?

13. **O maior triângulo inscrito** Os pontos A e B estão nas extremidades de um diâmetro de um círculo unitário e o ponto C está na circunferência. É correto dizer que o perímetro do triângulo ABC é máximo quando esse triângulo é isósceles? Como saber?

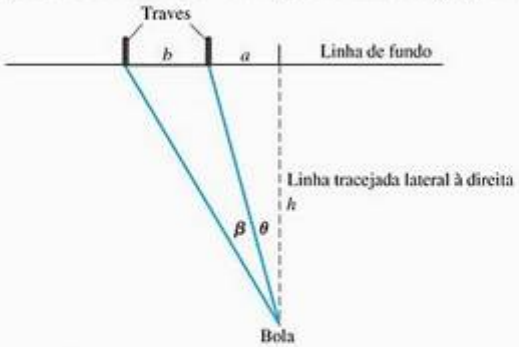
14. **Provando o teste da segunda derivada** O teste da segunda derivada para máximos e mínimos locais (Seção 4.4) afirma que:
   (a) f tem um máximo local em $x = c$ se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$.
   (b) f tem um mínimo local em $x = c$ se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$.

   Para demonstrar a afirmação (a), seja $\epsilon = (1/2)|f''(c)|$. Então use o fato de que
   $$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c + h) - f'(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c + h)}{h}$$
   para concluir que, para algum $\delta > 0$,
   $$0 < |h| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(c + h)}{h} < f''(c) + \epsilon < 0$$
   Portanto, $f'(c + h)$ é positiva para $-\delta < h < 0$ e negativa para $0 < h < \delta$. Demonstre a afirmativa (b) de maneira análoga.

15. **Furo em um tanque de água** Você quer fazer um furo na parede do tanque apresentado na figura a seguir em uma altura tal que o jorro de água resultante atinja o solo o mais longe do tanque possível. Se você fizer o buraco muito alto, onde a pressão é baixa, a água sairá lentamente, mas permanecerá um tempo relativamente longo no ar. Se você fizer o furo muito embaixo, a água sairá com velocidade maior, mas terá pouco tempo para cair. Onde é o melhor lugar, se houver, para se fazer o furo? (*Dica*: Quanto tempo leva para atingir o solo uma molécula de água que sai pelo furo?)



16. **Marcando um gol** Um jogador de futebol norte-americano quer fazer um gol, estando a bola sobre a linha tracejada à direita. Considere que as traves estejam b metros distantes entre si e que a linha tracejada lateral esteja a uma distância $a > 0$ da trave direita (veja a figura). Determine a distância h, em relação à linha de fundo, que oferece ao jogador o maior ângulo β. Considere que o campo de futebol seja plano.



17. **Um problema de max-min com resposta variável** Às vezes, a solução de um problema de max-min depende

das proporções das formas envolvidas. Por exemplo, suponha que um cilindro de revolução com raio r e altura h esteja inscrito em um cone de revolução com raio R e altura H, conforme a figura a seguir. Determine o valor de r (em função de R e de H) que maximiza a área total da superfície do cilindro (inclusive o topo e a base inferior). Como você verá, a solução depende de ser $H \leq 2R$ ou $H > 2R$.

18. **Minimizando um parâmetro** Determine o menor valor da constante positiva m que torna $mx - 1 + (1/x)$ maior ou igual a zero para qualquer valor positivo de x.

19. Calcule os limites a seguir.

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} 5x}{3x}$ (b) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} 5x \operatorname{cotg} 3x$

(c) $\lim_{x \to 0} x \operatorname{cosec}^2 \sqrt{2x}$ (d) $\lim_{x \to \pi/2} (\sec x - \operatorname{tg} x)$

(e) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x}$ (f) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x \operatorname{sen} x}$

(g) $\lim_{x \to 0} \frac{\sec x - 1}{x^2}$ (h) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

20. A regra de L'Hôpital não ajuda a encontrar os limites a seguir. Determine-os de outra maneira.

(a) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x + 5}}{\sqrt{x} + 5}$ (b) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x + 7\sqrt{x}}$

21. Suponha que uma empresa gaste $y = a + bx$ dólares para produzir x unidades por semana. Ela consegue vender essas unidades a um preço $P = c - ex$ dólares por unidade. Cada uma dessas letras — a, b, c, e — representa uma constante positiva. (a) Qual nível de produção maximiza o lucro? (b) Qual é o preço correspondente? (c) Qual é o lucro semanal nesse nível de produção? (d) A qual preço cada item deveria ser vendido para maximizar os lucros, caso o governo impusesse um imposto de t dólares por item vendido? Comente a diferença entre o preço antes e depois do imposto.

22. **Estimando recíprocos sem divisão** Você pode estimar o valor do recíproco do número a sem nunca ter de dividir por a, aplicando o método de Newton à função $f(x) = (1/x) - a$. Por exemplo, se $a = 3$, então a função envolvida é $f(x) = (1/x) - 3$.

(a) Trace o gráfico de $y = (1/x) - 3$. Onde o gráfico cruza o eixo x?

(b) Demonstre que nesse caso a fórmula da recursão é

$$x_{n+1} = x_n(2 - 3x_n)$$

portanto não é preciso dividir.

23. Para determinar $x = \sqrt[q]{a}$, aplicamos o método de Newton a $f(x) = x^q - a$. Aqui, supomos que a seja um número real positivo e q um inteiro positivo. Demonstre que x_1 é uma "média ponderada" entre x_0 e a / x_0^{q-1}; depois, determine os coeficientes m_0, m_1 tais que

$$x_1 = m_0 x_0 + m_1 \left(\frac{a}{x_0^{q-1}} \right), \qquad \begin{array}{l} m_0 > 0, m_1 > 0 \\ m_0 + m_1 = 1 \end{array}$$

A que conclusão você chegaria se x_0 e a/x_0^{q-1} fossem iguais? Qual seria o valor de x^1 nesse caso?

24. A família de retas $y = ax + b$ (sendo a, b constantes arbitrárias) pode ser caracterizada pela relação $y'' = 0$. Determine uma relação similar satisfeita pela família de todos os círculos

$$(x - h)^2 + (y - h)^2 = r^2$$

onde h e r são constantes arbitrárias. (*Dica*: Elimine h e r do conjunto de três equações incluindo aquela que foi dada e duas obtidas por derivação sucessiva.)

25. **Queda livre no século XIV** Em meados do século XIV, Alberto da Saxônia (1316-1390) propôs um modelo para queda livre que admitia ser a velocidade de um corpo em queda proporcional à distância da queda. Parecia razoável considerar que um corpo caindo de uma altura de 20 pés estivesse se deslocando duas vezes mais rápido que outro caindo de 10 pés. Além disso, nenhum dos instrumentos disponíveis na época era suficientemente preciso para demonstrar o contrário. Hoje, resolvendo o problema de valor inicial implícito em seu modelo, vemos que o modelo de Alberto da Saxônia estava longe de estar correto. Resolva o problema e compare graficamente sua solução com a equação $s = 16t^2$. Você verá que ela descreve um movimento que se inicia lentamente demais e depois se torna rápido demais, cedo demais, para ser real.

26. **Exames de um grupo sangüíneo** Durante a Segunda
T Guerra Mundial, foi preciso fazer exame de sangue em grande número de soldados. Há duas maneiras-padrão para realizar o exame de sangue em N pessoas. No método 1, cada pessoa é examinada separadamente. No método 2, as amostras de sangue de x pessoas são misturadas e examinadas como uma grande amostra. Se o resultado for negativo, esse único teste será suficiente para as x pessoas. Se for positivo, então cada uma das x pessoas deverá ser examinada separadamente, sendo necessário um total de $x + 1$ exames. Usando o segundo método e alguma noção de probabilidade, pode-se demonstrar que, em média, o número total y de testes será

$$y = N\left(1 - q^x + \frac{1}{x}\right)$$

Com $q = 0{,}99$ e $N = 1.000$, determine o valor inteiro de x que minimiza y. Determine também o valor inteiro de x que maximiza y. (Esse segundo resultado não é importante para situações reais.) O método de exames de sangue em grupo foi usado durante a Segunda Guerra Mundial e resultou em uma economia de 80% em relação ao método de testes individuais, mas não com o valor dado de q.

27. Suponha que o freio de um automóvel produza uma desaceleração constante de k pés/s^2. **(a)** Determine qual k um automóvel que viaje a 60 mi/h (88 pés/s) precisa ter para parar a uma distância de 100 pés desde o ponto em que o freio é acionado. **(b)** Com o mesmo k, que distância um carro que viajasse a 30 mi/h percorreria antes de parar?

28. Sejam $f(x)$, $g(x)$ duas funções continuamente deriváveis que satisfazem as relações $f'(x) = g(x)$ e $f''(x) = -f(x)$. Seja $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$. Se $h(0) = 5$, determine $h(10)$.

29. Pode existir uma curva que satisfaça as condições a seguir? d^2y/dx^2 é igual a zero em toda parte, quando $x = 0$, $y = 0$ e $dy/dx = 1$. Justifique sua resposta.

30. Determine a equação para a curva no plano cartesiano que passa pelo ponto $(1, -1)$, sendo seu coeficiente angular em x sempre $3x^2 + 2$.

31. Uma partícula se move ao longo do eixo x. Sua aceleração é $a = -t^2$. Em $t = 0$, a partícula está na origem. No curso de seu movimento, ela alcança o ponto $x = b$, onde $b > 0$, mas não vai além de b. Determine sua velocidade em $t = 0$.

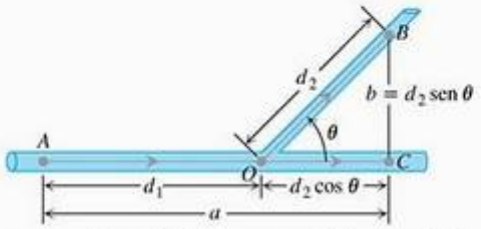
32. Uma partícula se move com aceleração $a = \sqrt{t} - (1/\sqrt{t})$. Supondo velocidade $v = 4/3$ e posição $s = -4/15$ quando $t = 0$, determine

(a) a velocidade v em termos de t.

(b) a posição s em termos de t.

33. **Os melhores ângulos para a ramificação de vasos sangüíneos e tubos** Quando um pequeno tubo se ramifica em um sistema de fluxo a partir de outro maior, pode-se querer que essa ramificação ocorra no melhor ângulo para poupar energia (de certo ponto de vista). Pode-se desejar, por exemplo, que o consumo de energia devido ao atrito seja minimizado ao longo da seção AOB (veja a figura a seguir). Nesse diagrama, B é um ponto qualquer a ser conectado ao tubo menor, A é um ponto no tubo maior, anterior a B, sendo O o ponto em que a ramificação ocorre. Uma lei formulada por Poiseuille diz que a perda de energia devida ao atrito em fluxo não turbulento é proporcional ao comprimento e inversamente proporcional à quarta potência do raio. Assim, a perda ao longo de AO é $(kd_1)/R^4$ e ao longo de OB é $(kd_2)/r^4$, onde k é uma constante, d_1 é o comprimento do segmento AO, d_2 é o comprimento do segmento OB, R é o raio do tubo maior e r é o raio do tubo menor. O ângulo θ deve ser escolhido para minimizar a soma dessas duas perdas:

$$L = k\frac{d_1}{R^4} + k\frac{d_2}{r^4}$$



Em nosso modelo, admitimos que $AC = a$ e $BC = b$ são constantes. Assim, temos as relações

$$d_1 + d_2 \cos\theta = a \quad d_2 \operatorname{sen}\theta = b,$$

tais que

$$d_2 = b \operatorname{cosec}\theta,$$
$$d_1 = a - d_2 \cos\theta = a - b \operatorname{cotg}\theta.$$

Podemos expressar a perda total L em função de θ:

$$L = k\left(\frac{a - b\operatorname{cotg}\theta}{R^4} + \frac{b\operatorname{cosec}\theta}{r^4}\right)$$

(a) Demonstre que o valor crítico de θ para o qual $dL/d\theta$ é igual a zero é

$$\theta_c = \cos^{-1}\frac{r^4}{R^4}$$

(b) Se a razão entre os raios dos tubos é $r/R = 5/6$, estime para o valor inteiro mais próximo o ângulo em graus de ramificação ótimo dado no item **(a)**.

A análise matemática descrita aqui também é usada para explicar os ângulos através dos quais as artérias se ramificam no corpo dos animais. (Veja E. Batschelet. *Introduction to Mathematics for life scientists*. 2. ed., Nova York: Springer-Verlag, 1976.)

34. Dado $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ com $a > 0$. Considerando o mínimo, prove que $f(x) \geq 0$ para qualquer x real se e somente se $b^2 - ac \leq 0$.

35. **A desigualdade de Schwartz**

(a) No Exercício 34, considere

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2$$

e deduza a desigualdade de Schwartz:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \quad + a_nb_n)^2$$
$$\leq (a_1^2 + a_2^2 + \quad + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \quad + b_n^2)$$

(b) Demonstre que a desigualdade de Schwartz só poderá ser uma igualdade se existir um número real x que torne a_ix igual a $-b_i$ para todos os valores de i, entre 1 e n.

Exercícios avançados

1. Dê exemplos de funções sem máximo nem mínimo em I, quando

   (a) $I = (a, b)$, a e b reais (b) $I = (0, \infty)$.

2. A circunferência que melhor aproxima o gráfico de uma função $y = f(x)$, com primeira e segunda derivadas contínuas, perto de um ponto $(a, f(a))$ é chamada circunferência osculadora. Se esta circunferência puder ser descrita por $y = g(x)$ perto de $x = a$, ela pode ser caracterizada por $g(a) = f(a)$, $g'(a) = f'(a)$ e $g''(a) = f''(a)$ (lembre-se de que $(x - b)^2 + (g(x) - c)^2 = r^2$ para algum b e c reais e algum r positivo). Considere a parábola de equação $y(x) = 4 - x^2$. Ache a circunferência osculadora dessa parábola no seu vértice ($a = 0$) e para $0 < a < 2$.

Nos exercícios 3 e 4 considere o modelo de crescimento populacional, proposto por Gompertz em 1825, dado pela equação diferencial $p' = a\, p \ln (b/p)$, onde $p = p(t) > 0$ é o tamanho da população no instante t e a e b são constantes positivas características da população em questão.

3. Mostre que se $p = p(t)$ é solução dessa equação, então p tem derivada de qualquer ordem.

4. É fácil ver que $p(t) = b$ para todo t satisfaz essa equação e que $p(0) = b$. É possível demonstrar que se $0 < p(0) < b$ a solução dessa equação satisfaz $0 < p(t) < b$ para todo t, e que se $p(0) > b$ a solução satisfaz $p(t) > b$ para todo t.

   (a) Esboce o gráfico de uma solução que satisfaz $0 < p(0) < b$.

   (b) Esboce o gráfico de uma solução que satisfaz $p(0) > b$.

Nos exercícios 5–7 são dados $a \in \mathbf{R}$ e uma função g definida em R, derivável, tal que $g(a) = a$ (isto é, a é um ponto fixo de g). Suponha, ainda, que $|g'(x)| \leq M \leq 1$, para todo x. Para $x_0 \in \mathbf{R}$ considere a seqüência x_n, $n \in \mathbf{N}$, definida por $x_{n+1} = g(x_n)$, $n \in \mathbf{N}$.

5. Mostre que, então $| x_n - a | \leq M^n | x_0 - a |$, para todo $n \in \mathbf{N}$. Em conseqüência, a seqüência x_n pode ser usada para determinar uma aproximação de a com erro absoluto menor que um valor $\in > 0$ dado.

6. Mostre que se $g'(x) > 0$ para todo x, então a seqüência x_n é monótona crescente se $x_0 < a$; e é monótona decrescente se $x_0 > a$.

7. Mostre que se $g'(x) < 0$ para todo x, então a seqüência x_n oscila em torno de a, isto é, a está entre x_n e x_{n+1} para todo n.

8. Mostre que a equação $(\cos x)/2 = x$ tem uma solução a no intervalo $[0, \pi/2]$ e use o Exercícios 5 para obter uma aproximação dessa solução com erro absoluto menor que 10^{-1}.

9. Mostre que se f tem segunda derivada contínua e $f''(x) > 0$, para todo $x \in \mathbf{R}$, então a reta tangente ao gráfico de f num ponto qualquer $(a, f(a))$ fica abaixo do gráfico de f. Dizemos que, nesse caso, f tem concavidade para cima.

   (*Sugestão*: estude a função $g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ que descreve a diferença entre a altura do gráfico de f e a da reta tangente.)

10. Esboce o gráfico das funções

    (a) $f(x) = x^2/(1 - x^2)$ (b) $g(x) = x/(1 - x^2)$

    (c) $h(x) = x^2/(1 + x^2)$

Seja f uma função com $n + 1$ derivadas contínuas em uma vizinhança de a. O polinômio $P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)(x - a)^2/(2!) + \ldots + f^{(n)}(a)(x - a)^n/(n!)$ é chamado polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de a. É possível mostrar que $R_n(x) = f(x) - Pn(x) = f^{(n+1)}(b)(x - a)^{n+1}/((n+1)!)$, para algum b entre x e a.

11. Use o polinômio de Taylor de ordem 3 de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em torno de $a = 0$ para determinar uma aproximação de sen 0,5 e delimite o erro absoluto cometido.

12. Use o polinômio de Taylor de ordem 4 de $f(x) = \ln x$ em torno de $a = 1$ para determinar uma aproximação de ln 1,5 e delimite o erro absoluto cometido.

Projetos de aplicação de tecnologia

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Movimento ao longo de uma reta: posição → velocidade → aceleração

Você vai observar o formato de um gráfico em impressionantes animações que retratam as relações de derivação entre posição, velocidade e aceleração. As figuras do texto podem ser animadas.

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Método de Newton: estimar π com quantas casas decimais?

Trace os pontos de uma função no plano cartesiano, observe uma raiz, escolha um ponto inicial perto dela e, por fim, use o método interativo de Newton para aproximar a raiz até a precisão desejada. Os números π, e, $\sqrt{2}$ são aproximados.

5 Integração

RESUMO Um dos grandes avanços da geometria clássica foi obter fórmulas para determinar área e volume de triângulos, esferas e cones. Neste capítulo, estudaremos um método para calcular área e volume destas e de outras formas mais gerais. Mas o método que apresentaremos — a *integração* — não serve apenas para isso. A *integral* tem muitas aplicações em estatística, economia, ciências e engenharia. Ela nos permite calcular quantidades que vão desde probabilidades e médias até consumo de energia e forças que atuam contra as comportas de uma represa.

A idéia básica da integração é que muitas quantidades podem ser calculadas se são quebradas em pedaços pequenos e, depois, soma-se a contribuição que cada parte dá. Apresentamos a teoria da integral no campo da área, no qual ela revela sua natureza de modo mais claro. Começaremos com exemplos envolvendo somas finitas. Isso levará naturalmente à pergunta sobre o que acontece quando mais e mais termos são somados. Passando para o limite, quando o número de termos tende ao infinito, chegamos a uma integral. Embora integração e derivação estejam intimamente relacionadas, não veremos o papel da derivada e da primitiva antes da Seção 5.4. A natureza de sua relação, contida no teorema fundamental do cálculo, é uma das mais importantes idéias do cálculo.

5.1 Estimando com somas finitas

Esta seção mostra como área, valores médios e distância percorrida por um objeto ao longo do tempo podem ser todos aproximados por somas finitas. Somas finitas são a base da definição de integrais, que será dada na Seção 5.3.

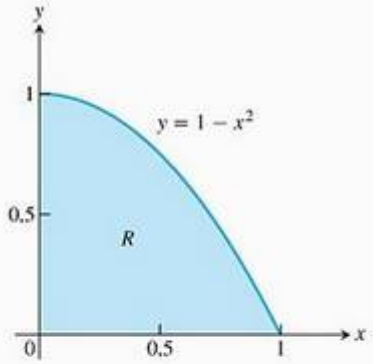


FIGURA 5.1 A área da região R não pode ser encontrada com uma fórmula simples (Exemplo 1).

Área

Podemos aproximar a área de uma região com contorno curvo somando as áreas de um conjunto de retângulos. Usar uma quantidade maior de retângulos pode aumentar a precisão da sua aproximação.

EXEMPLO 1 Aproximando área

Qual é a área da região sombreada R que se encontra acima do eixo x, abaixo da curva de $y = 1 - x^2$, e entre as retas verticais $x = 0$ e $x = 1$? (Veja a Figura 5.1.) Um arquiteto pode querer saber essa área para calcular o peso de uma janela feita sob medida, cujo formato é descrito por R.

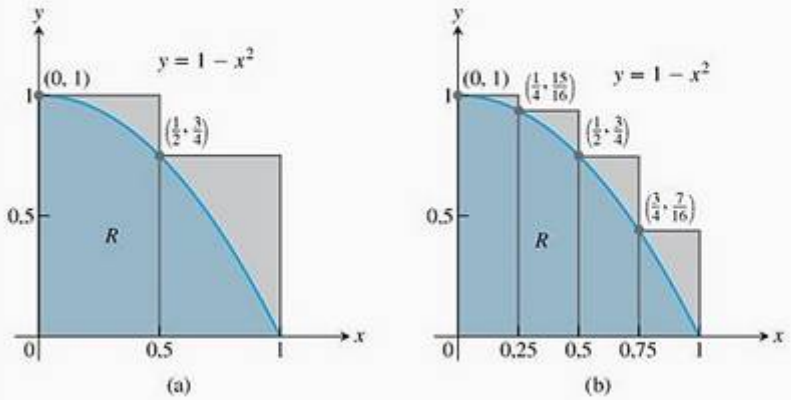


FIGURA 5.2 (a) Usando dois retângulos que contêm R, obtemos uma estimativa superior da área de R. (b) Quatro retângulos fornecem uma estimativa superior melhor. Ambas as alternativas ultrapassam o valor real da área.

Infelizmente, não existe uma fórmula geométrica simples para calcular a área de formas com contorno curvo como a região R.

Embora não tenhamos ainda um método para determinar a área exata de R, podemos aproximá-la de um modo simples. A Figura 5.2a mostra dois retângulos que, juntos, contêm a região R. Cada retângulo tem largura 1/2; o primeiro da esquerda para a direita tem altura 1, e o segundo, 3/4. A altura de cada retângulo é o valor máximo da função f, valor que se obtém calculando f na extremidade esquerda do subintervalo de [0, 1] que forma a base do retângulo. A área total dos dois retângulos aproxima a área A da região R,

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

Essa estimativa é maior do que a área real A, uma vez que os dois retângulos contêm R. Dizemos que 0,875 é uma **soma superior**, pois é obtida considerando-se a altura de cada retângulo como o valor máximo (o ponto mais alto) de $f(x)$, sendo x um ponto no intervalo da base do retângulo. Na Figura 5.2b, melhoramos nossa estimativa usando retângulos mais estreitos, cada qual com largura de 1/4, os quais, se considerados em conjunto, contêm a região R. Esses quatro retângulos nos fornecem a aproximação

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0{,}78125$$

que ainda é maior do que A, uma vez que os dois retângulos contêm R.

Suponha, em vez disso, que usemos quatro retângulos contidos *dentro* da região R para estimar a área, como mostra a Figura 5.3a. Cada retângulo tem largura 1/4, como antes, mas os retângulos são mais baixos e ficam inteiramente abaixo da curva de f. A função $f(x) = 1 - x^2$ é decrescente em [0, 1], portanto a altura de cada um dos retângulos é dada pelo valor de f na extremidade direita do subintervalo que forma sua base. O quarto retângulo tem altura zero e, assim, não contribui para a área. Somando esses retângulos com alturas iguais ao valor mínimo de $f(x)$, sendo x um ponto em cada subintervalo da base, temos uma aproximação de **soma inferior** para a área

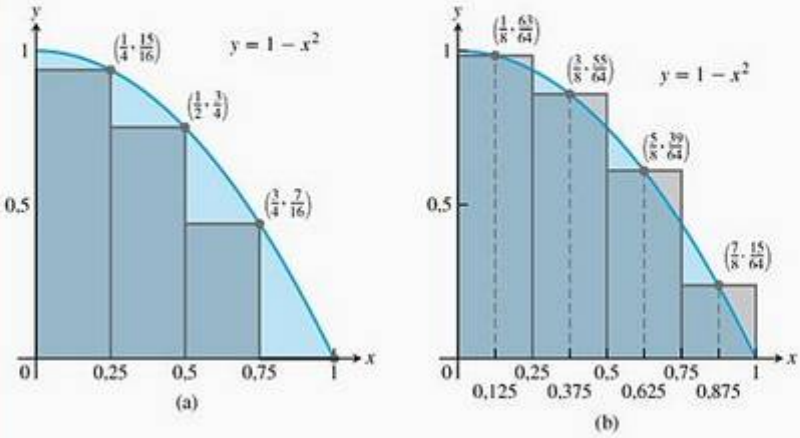


FIGURA 5.3 (a) Os retângulos contidos em R dão uma estimativa da área que subestima o valor real. (b) A regra do ponto médio usa retângulos cuja altura é o valor de $y = f(x)$ no ponto médio de suas bases.

$$A \approx \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0{,}53125$$

Essa estimativa é menor que a área de A, pois todos os retângulos se situam dentro da região R. O verdadeiro valor de A fica em algum ponto entre as somas superior e inferior:

$$0{,}53125 < A < 0{,}78125$$

Considerando as duas aproximações, a de soma inferior e a de soma superior, conseguimos não apenas estimativas para a área, mas também um limite para o tamanho do possível erro nas estimativas, uma vez que o valor real da área fica em algum ponto entre elas. No presente caso, o erro não pode ser superior à diferença 0,78125 – 0,53125 = 0,25.

É possível, ainda, obter outra estimativa usando retângulos cujas alturas sejam valores de f em pontos médios de suas bases (Figura 5.3b). Esse método de estimação chama-se **regra do ponto médio** para aproximação da área. A regra do ponto médio fornece uma estimativa que fica entre uma soma inferior e uma superior, mas não fica claro se ela superestima ou subestima a área real. Com quatro retângulos de largura 1/4 como antes, a regra do ponto médio estima a área de R em

$$A \approx \frac{63}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{55}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{39}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{172}{64} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}671875$$

Em cada uma das nossas somas calculadas, o intervalo $[a, b]$ ao longo do qual a função f é definida foi subdividido em n subintervalos de igual largura (também chamada comprimento) $\Delta x = (b - a)/n$, e f foi calculada em um ponto em cada subintervalo: c_1 no primeiro subintervalo, c_2 no segundo subintervalo, e assim por diante. Desse modo, todas as somas finitas assumem esta forma:

$$f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + f(c_3)\,\Delta x + \cdots + f(c_n)\,\Delta x$$

Pegando mais e mais retângulos, cada um deles mais estreito que os anteriores, parece que essas somas finitas fornecem aproximações cada vez melhores da área real da região R.

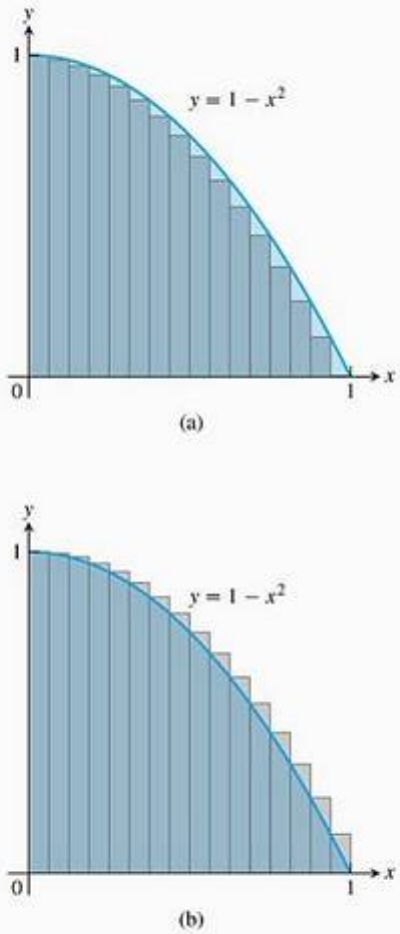


FIGURA 5.4 (a) Soma inferior usando 16 retângulos de igual largura $\Delta x = 1/16$. (b) Soma superior usando 16 retângulos.

A Figura 5.4a mostra uma aproximação de soma inferior para a área de R usando 16 retângulos de igual largura. A soma de suas áreas é 0,634765625, que parece próximo da área real, mas ainda é menor porque os retângulos estão dentro de R.

A Figura 5.4b mostra uma aproximação de soma superior usando 16 retângulos de igual largura. A soma de suas áreas é 0,697265625, um pouco maior que a área real, pois os retângulos, juntos, contêm R. A regra do ponto médio para 16 retângulos dá uma aproximação da área total de 0,6669921875, mas não fica imediatamente evidente se essa estimativa é maior ou menor que a área real.

TABELA 5.1 Aproximações finitas da área de R

Número de subintervalos	Soma inferior	Regra do ponto médio	Soma superior
2	,375	,6875	,875
4	,53125	,671875	,78125
16	,634765625	,6669921875	,697265625
50	,6566	,6667	,6766
100	,66165	,666675	,67165
1.000	,6661665	,66666675	,6671665

A Tabela 5.1 mostra os valores de aproximações de somas superior e inferior para a área de R, usando até 1.000 retângulos. Na Seção 5.2, veremos como obter o valor exato da área de regiões como R determinando o limite quando a largura da base de cada retângulo tende a zero e o número de retângulos tende a infinito. Com as técnicas que desenvolveremos, conseguiremos demonstrar que a área de R é exatamente 2/3.

Distância percorrida

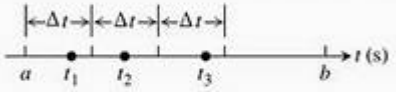
Suponha que conheçamos a função velocidade $v(t)$ de um carro que percorre uma rodovia, sempre na mesma direção, e queiramos saber que distância ele terá percorrido entre os instantes $t = a$ e $t = b$. Se conhecemos uma primitiva $F(t)$ de $v(t)$, podemos determinar a função posição do carro $s(t)$ estabelecendo $s(t) = F(t) + C$. Determinamos, então, a distância percorrida calculando a mudança na posição, $s(b) - s(a)$ (como na Seção 4.8, Exercício 117). Se a função velocidade é determinada por um velocímetro que mede a velocidade do carro em vários instantes, então não temos uma fórmula da qual obter uma função primitiva para a velocidade. Então, o que fazemos nessa situação?

Quando não conhecemos uma primitiva da função velocidade $v(t)$, podemos aproximar a distância percorrida da seguinte maneira: subdividimos o intervalo $[a, b]$ em pequenos intervalos de tempo, em cada um dos quais a velocidade é considerada razoavelmente constante; então, fazemos uma aproximação da distância percorrida em cada intervalo de tempo com a fórmula usual de distância

$$\text{distância} = \text{velocidade} \times \text{tempo}$$

e somamos os resultados ao longo de $[a, b]$.

Suponha que o intervalo subdividido tenha esta aparência:



sendo todos os subintervalos de comprimento Δt. Pegue um número t_1 no primeiro intervalo. Se Δt é tão pequeno que a velocidade mal se altera em um pequeno intervalo de duração Δt, então a distância percorrida no primeiro intervalo ficará em torno de $v(t_1)\ \Delta t$. Se t_2 for um número do segundo intervalo, a distância percorrida nesse segundo intervalo ficará em torno de $v(t_2)\ \Delta t$. A soma das distâncias percorridas em todos os intervalos é

$$D \approx v(t_1)\ \Delta t + v(t_2)\ \Delta t + \cdots + v(t_n)\ \Delta t$$

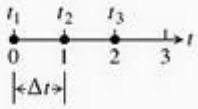
onde n é o número total de subintervalos.

EXEMPLO 2 Estimando a altitude de um projétil

A função velocidade de um projétil disparado diretamente para cima é $f(t) = 160 - 9{,}8t$ m/s. Use as técnicas de soma descritas para estimar a que distância o projétil sobe durante os primeiros 3 segundos. Quão perto as somas chegam do número exato 435,9 metros?

SOLUÇÃO Exploramos os resultados para diferentes números de intervalos e diferentes escolhas de pontos de avaliação. Observe que $f(t)$ é decrescente, portanto as extremidades esquerdas vão nos dar uma estimativa de soma superior, ao passo que as direitas vão nos dar uma estimativa de soma inferior.

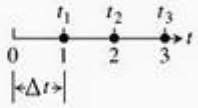
(a) *Três subintervalos de comprimento* 1, *com f calculada nas extremidades esquerdas, resultando em uma soma superior:*



Com f calculada em $t = 0$, 1 e 2, temos:

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\ \Delta t + f(t_2)\ \Delta t + f(t_3)\ \Delta t \\ &= [160 - 9{,}8(0)](1) + [160 - 9{,}8(1)](1) + [160 - 9{,}8(2)](1) \\ &= 450{,}6 \end{aligned}$$

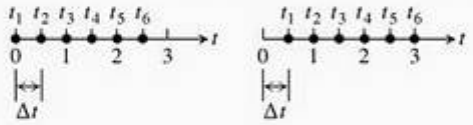
(b) *Três subintervalos de comprimento* 1, *com f avaliada nas extremidades direitas, resultando em uma soma inferior:*



Com f calculada em $t = 1$, 2 e 3, temos:

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\ \Delta t + f(t_2)\ \Delta t + f(t_3)\ \Delta t \\ &= [160 - 9{,}8(1)](1) + [160 - 9{,}8(2)](1) + [160 - 9{,}8(3)](1) \\ &= 421{,}2 \end{aligned}$$

(c) *Com seis subintervalos de comprimento 1/2, obtemos:*



Uma soma superior usando extremidades esquerdas: $D \approx 443{,}25$; uma soma inferior usando extremidades direitas: $D \approx 428{,}55$.

Essas estimativas de seis intervalos estão um pouco mais próximas que as estimativas de três intervalos. Os resultados melhoram à medida que os subintervalos diminuem de tamanho.

Como podemos ver na Tabela 5.2, as somas superiores, avaliadas nas extremidades esquerdas, aproximam-se do valor real 435,9 por cima, enquanto as somas inferiores, avaliadas nas extremidades direitas, aproximam-se dele por baixo. O valor real fica entre essas somas superior e inferior. A magnitude do erro nos valores mais próximos é 0,23, uma pequena fração do valor real.

TABELA 5.2 Distâncias percorridas estimadas

Número de subintervalos	Comprimento de cada subintervalo	Soma superior	Soma inferior
3	1	450,6	421,2
6	1/2	443,25	428,55
12	1/4	439,57	432,22
24	1/8	437,74	434,06
48	1/16	436,82	434,98
96	1/32	436,36	435,44
192	1/64	436,13	435,67

$$\begin{aligned}\text{Magnitude de erro} &= |\text{Valor real} - \text{Valor calculado}| \\ &= |435{,}9 - 435{,}67| = 0{,}23\end{aligned}$$

$$\text{Porcentagem de erro} = \frac{0{,}23}{435{,}9} \approx 0{,}05\%$$

Seria seguro concluir, dos últimos valores da tabela, que o projétil subiu aproximadamente 436 m durante os primeiros 3 s de vôo.

Deslocamento contra distância percorrida

Se um corpo com a função posição $s(t)$ desloca-se ao longo de um eixo coordenado sem mudar sua direção, podemos calcular a distância total percorrida de $t = a$ até $t = b$, somando a distância percorrida durante pequenos intervalos, como no Exemplo 2. Se o corpo muda sua direção uma ou mais vezes durante o trajeto, então precisamos usar a *rapidez* do corpo $|v(t)|$, que é o valor absoluto da função velocidade, $v(t)$, para determinar a distância total percorrida. Usando a própria velocidade, como no Exemplo 2, somente se obtém uma estimativa para o **deslocamento** do corpo, $s(b) - s(a)$, a diferença entre as posições inicial e final.

Para saber o porquê disso, divida o intervalo de tempo $[a, b]$ em subintervalos Δt iguais suficientemente pequenos, de modo que a velocidade do corpo não

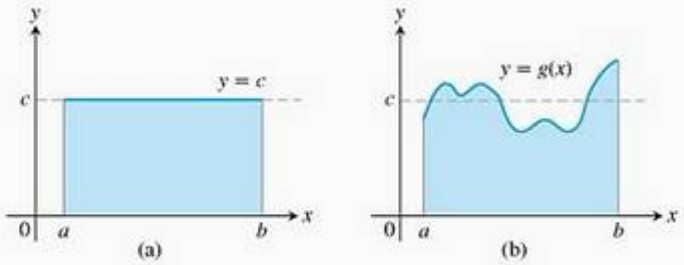


FIGURA 5.5 (a) O valor médio de $f(x) = c$ em $[a, b]$ é a área do retângulo dividida por $b - a$. (b) O valor médio de $g(x)$ em $[a, b]$ é a área abaixo de sua curva dividida por $b - a$.

mude muito do instante t_{k-1} para t_k. Assim, $v(t_k)$ permite obter uma boa aproximação para a velocidade ao longo do intervalo. Portanto, a variação na coordenada da posição do corpo durante o intervalo de tempo será aproximadamente

$$v(t_k)\,\Delta t$$

A variação será positiva se $v(t_k)$ for positivo, e negativa se $v(t_k)$ for negativo. Em ambos os casos, a distância percorrida durante o subintervalo será aproximadamente

$$|v(t_k)|\,\Delta t$$

A **distância total percorrida** será aproximadamente a soma

$$|v(t_1)|\,\Delta t + |v(t_2)|\,\Delta t + \cdots + |v(t_n)|\,\Delta t$$

Valor médio de uma função não negativa

Para obter a média de um conjunto de n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, devemos somá-los e dividir o resultado por n. Mas qual é a média de uma função contínua f em um intervalo $[a, b]$? Tal função pode assumir uma variedade infinita de valores. Por exemplo, a temperatura em certa parte de uma cidade é uma função contínua que sobe e desce todos os dias. O que significa dizer que a temperatura média na cidade ao longo de determinado dia é 73 graus Fahrenheit?

Quando uma função é constante, essa questão é fácil de responder. Uma função com valor constante c em um intervalo $[a, b]$ tem valor médio c. Se c for positivo, o gráfico da função em $[a, b]$ formará um retângulo de altura c. A média da função pode então ser interpretada geometricamente como a área desse retângulo dividida por sua largura $b - a$ (Figura 5.5a).

E se quisermos determinar a média de uma função não constante, tal como a função g da Figura 5.5b? Podemos pensar em seu gráfico como uma "fotografia" da altura de um pouco de água balançando dentro de um tanque, entre as paredes confinantes em $x = a$ e $x = b$. Conforme a água balança, sua altura muda a cada ponto, mas a altura média permanece a mesma. Para obter essa altura média, esperamos até que a água se assente e sua altura fique constante. A altura resultante c é igual à área sob a curva de g dividida por $b - a$. Assim, fomos levados a *definir* a altura média de uma função não negativa em um intervalo $[a, b]$ como a área sob sua curva dividida por $b - a$. Para que tal definição seja válida, devemos compreender precisamente o que significa essa área sob a curva. Faremos isso na Seção 5.3, mas, por enquanto, vamos analisar dois exemplos simples.

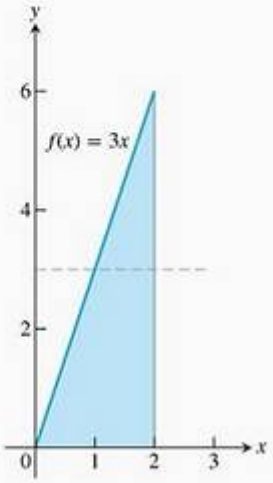


FIGURA 5.6 O valor médio de $f(x) = 3x$ ao longo de $[0, 2]$ é 3 (Exemplo 3).

EXEMPLO 3 Valor médio de uma função linear

Qual é o valor médio da função $f(x) = 3x$ no intervalo $[0, 2]$?

SOLUÇÃO A média é igual à área sob a curva dividida pela largura do intervalo. Nesse caso, não precisamos de aproximação finita para estimar a área da região sob a curva: um triângulo de altura 6 e base 2 tem área 6 (Figura 5.6). A largura do intervalo é $b - a = 2 - 0 = 2$. O valor médio da função é $6/2 = 3$.

EXEMPLO 4 Valor médio de sen x

Estime o valor médio da função $f(x) = \text{sen } x$ no intervalo $[0, \pi]$.

SOLUÇÃO Analisando o gráfico de sen x entre 0 e π na Figura 5.7, podemos ver que sua altura média fica entre 0 e 1. Para determinar a média, precisamos calcular a área A sob o gráfico e depois dividi-la pelo comprimento do intervalo, $\pi - 0 = \pi$.

Não dispomos de uma maneira simples para determinar a área, por isso fazemos uma aproximação com somas finitas. Para obter uma estimativa de soma superior, somamos a área de quatro retângulos de igual largura $\pi/4$ que, juntos, contêm a região sob a curva de $y = \text{sen } x$ e acima do eixo x em $[0, \pi]$. Fazemos que a altura dos retângulos seja o maior valor de sen x em cada subintervalo. Em um subintervalo específico, esse valor máximo pode ocorrer na extremidade esquerda, na direita ou em algum ponto entre elas. Calculamos sen x nesse ponto para obter a altura do retângulo para a soma superior. Por fim, a soma das áreas dos retângulos dará uma estimativa da área total (Figura 5.7a).

$$A \approx \left(\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4} + \left(\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{4} + \left(\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{4} + \left(\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\pi}{4} \approx (3{,}42)\cdot\frac{\pi}{4} \approx 2{,}69$$

Para estimar o valor médio de sen x dividimos a área estimada por π e obtemos a aproximação $2{,}69/\pi \approx 0{,}86$.

Se usarmos oito retângulos de igual largura $\pi/8$, todos acima da curva de $y = \text{sen } x$ (Figura 5.7b), obteremos a seguinte estimativa da área:

$$A \approx \left(\text{sen}\frac{\pi}{8} + \text{sen}\frac{\pi}{4} + \text{sen}\frac{3\pi}{8} + \text{sen}\frac{\pi}{2} + \text{sen}\frac{\pi}{2} + \text{sen}\frac{5\pi}{8} + \text{sen}\frac{3\pi}{4} + \text{sen}\frac{7\pi}{8}\right)\cdot\frac{\pi}{8}$$
$$\approx (0{,}38 + 0{,}71 + 0{,}92 + 1 + 1 + 0{,}92 + 0{,}71 + 0{,}38)\cdot\frac{\pi}{8} = (6{,}02)\cdot\frac{\pi}{8} \approx 2{,}365$$

Dividindo esse resultado pelo comprimento π do intervalo, obteremos uma estimativa mais precisa de 0,753 para a média. Como usamos uma soma superior para aproximar a área, essa estimativa ainda é superior ao valor médio real de sen x ao longo de $[0, \pi]$. Quanto mais retângulos usarmos, e quanto mais estreitos eles forem, mais próximos ficaremos da média real. Usando as técnicas da Seção 5.3, demonstraremos que a média real é $2/\pi \approx 0{,}64$.

Assim como anteriormente, também poderíamos ter usado retângulos que ficassem abaixo da curva de $y = \text{sen } x$ e calculado uma aproximação de soma inferior, ou poderíamos ter usado a regra do ponto médio. Na Seção 5.3,

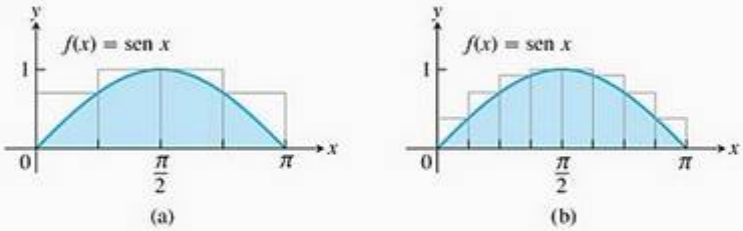


FIGURA 5.7 Aproximando a área sob $f(x) = \text{sen } x$ entre 0 e π para calcular o valor médio de sen x ao longo de $[0, \pi]$ com (a) quatro retângulos; (b) oito retângulos (Exemplo 4).

veremos que não importa se nossa aproximação com retângulos é feita com somas superiores, inferiores, ou com uma soma intermediária. Em todos os casos, as aproximações chegarão perto da área real, desde que todos os retângulos sejam suficientemente estreitos.

Resumo

A área sob a curva de uma função positiva, a distância percorrida por um objeto em movimento que não muda de direção e o valor médio de uma função não negativa ao longo de um intervalo podem ser aproximados por somas finitas. Primeiro, subdividimos o intervalo em subintervalos, tratando a função apropriada f como se fosse constante em cada subintervalo. Em seguida, multiplicamos a largura de cada subintervalo pelo valor de f em algum ponto dentro dele; depois somamos esses produtos. Se o intervalo $[a, b]$ for subdividido em n subintervalos de igual largura $\Delta x = (b - a)/n$, e se $f(c_k)$ for o valor de f em dado ponto c_k no intervalo k-ésimo, esse processo resultará em uma soma finita com a seguinte forma:

$$f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + f(c_3)\,\Delta x + \cdots + f(c_n)\,\Delta x$$

O valor de c_k pode recair no valor máximo ou mínimo de f no k-ésimo subintervalo, ou a algum valor entre eles. O verdadeiro valor ficará em algum ponto entre as aproximações dadas pelas somas superiores e inferiores. As aproximações de soma finita que observamos melhoram à medida que consideramos mais subintervalos de largura cada vez menor.

Exercícios 5.1

Área

Nos exercícios 1–4, use aproximações finitas para estimar a área sob a curva da função usando

(a) uma soma inferior com dois retângulos de igual largura.

(b) uma soma inferior com quatro retângulos de igual largura.

(c) uma soma superior com dois retângulos de igual largura.

(d) uma soma superior com quatro retângulos de igual largura.

1. $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ e $x = 1$.

2. $f(x) = x^3$ entre $x = 0$ e $x = 1$.

3. $f(x) = 1/x$ entre $x = 1$ e $x = 5$.

4. $f(x) = 4 - x^2$ entre $x = -2$ e $x = 2$.

Usando retângulos cuja altura seja dada pelo valor da função no ponto médio da base do retângulo (*regra do ponto*

médio), estime a área sob as curvas das seguintes funções, usando primeiro dois e depois quatro retângulos.

5. $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ e $x = 1$.

6. $f(x) = x^3$ entre $x = 0$ e $x = 1$.

7. $f(x) = 1/x$ entre $x = 1$ e $x = 5$.

8. $f(x) = 4 - x^2$ entre $x = -2$ e $x = 2$.

Distância

9. **Distância percorrida** A tabela a seguir mostra a velocidade de uma locomotiva em miniatura que se desloca por um trilho durante 10 segundos. Estime a distância percorrida pela miniatura usando 10 subintervalos de comprimento 1 com

   (a) valores nas extremidades esquerdas.

   (b) valores nas extremidades direitas.

Tempo (s)	Velocidade (pol/s)	Tempo (s)	Velocidade (pol/s)
0	0	6	11
1	12	7	6
2	22	8	2
3	10	9	6
4	5	10	0
5	13		

10. **Distância percorrida rio acima** Você está sentado junto à foz de um rio. Quando a maré sobe, as ondas levam uma garrafa rio acima. Você registra a velocidade da garrafa a cada 5 minutos durante uma hora, obtendo os resultados apresentados na tabela a seguir. Aproximadamente que distância a garrafa percorreu durante aquela hora? Faça uma estimativa usando 12 subintervalos de comprimento 5 com

    (a) valores nas extremidades esquerdas.

    (b) valores nas extremidades direitas.

Tempo (min)	Velocidade (m/s)	Tempo (min)	Velocidade (m/s)
0	1	35	1,2
5	1,2	40	1,0
10	1,7	45	1,8
15	2,0	50	1,5
20	1,8	55	1,2
25	1,6	60	0
30	1,4		

11. **Comprimento de uma estrada** Você e um companheiro estão prestes a dirigir em um trecho sinuoso de uma estrada de terra em um carro cujo velocímetro funciona, mas cujo hodômetro (contador de quilômetros) está quebrado. Para descobrir a extensão desse trecho da estrada, você registra a velocidade do carro a intervalos de 10 segundos, com os resultados apresentados na tabela a seguir. Estime o comprimento desse percurso usando

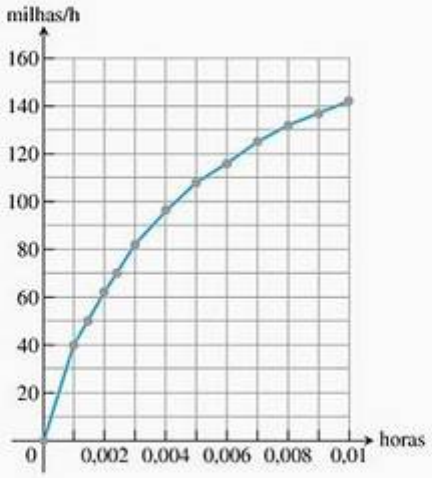
    (a) o valor na extremidade esquerda de cada subintervalo.

    (b) o valor na extremidade direita de cada subintervalo.

Tempo (s)	Velocidade (convertida p/ pés/s) (30 mi/h = 44 pés/s)	Tempo (s)	Velocidade (convertida p/ pés/s) (30 mi/h = 44 pés/s)
0	0	70	15
10	44	80	22
20	15	90	35
30	35	100	44
40	30	110	30
50	44	120	35
60	35		

12. **Distância a partir dos dados de velocidade** A tabela a seguir fornece dados sobre a velocidade de um carro esporte que acelera de 0 até 142 mi/h em 36 segundos (10 milésimos de uma hora).

Tempo (h)	Velocidade (milhas/h)	Tempo (h)	Velocidade (milhas/h)
0,0	0	0,006	116
0,001	40	0,007	125
0,002	62	0,008	132
0,003	82	0,009	137
0,004	96	0,010	142
0,005	108		



(a) Use retângulos para estimar a distância que o carro percorreu durante os 36 segundos decorridos para atingir 142 mi/h.

(b) Aproximadamente quantos segundos o carro levou para atingir o ponto médio do caminho? Qual era a velocidade aproximada do carro então?

Velocidade e distância

13. Queda livre e resistência do ar Um objeto é solto de um helicóptero que se encontra parado no ar. O objeto cai cada vez mais rápido, mas sua aceleração (taxa de variação da velocidade) diminui com o passar do tempo devido à resistência do ar. A aceleração é medida em pés por segundo ao quadrado e registrada a cada segundo durante 5 segundos após o lançamento, como se pode ver na tabela a seguir.

t	0	1	2	3	4	5
a	32,00	19,41	11,77	7,14	4,33	2,63

(a) Encontre uma estimativa superior para a velocidade quando $t = 5$.

(b) Encontre uma estimativa inferior para a velocidade quando $t = 5$.

(c) Encontre uma estimativa inferior para a altura da queda quando $t = 3$.

14. Distância percorrida por um projétil Um objeto é atirado do nível do mar para cima com uma velocidade inicial de 400 pés/s.

(a) Admitindo-se que a gravidade seja a única força que atua sobre o objeto, superestime sua velocidade depois de 5 segundos. Use $g = 32$ pés/s^2 para a constante gravitacional.

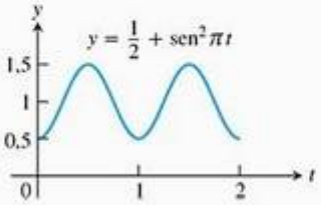
(b) Encontre uma estimativa inferior a altura atingida depois de 5 segundos.

Valor médio de uma função

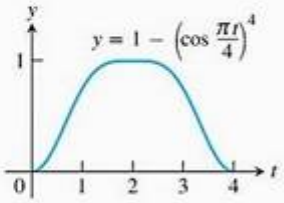
Nos exercícios 15–18, use uma soma finita para estimar o valor médio de f no intervalo dado, dividindo o intervalo em quatro subintervalos de igual comprimento e avaliando f nos pontos médios dos subintervalos.

15. $f(x) = x^3$ em $[0, 2]$ **16.** $f(x) = 1/x$ em $[1, 9]$

17. $f(t) = (1/2) + \text{sen}^2 \pi t$ em $[0, 2]$



18. $f(t) = 1 - \left(\cos \frac{\pi t}{4}\right)^4$ em $[0, 4]$



Controle da poluição

19. Poluição da água Está vazando combustível de um petroleiro avariado no mar. A tabela a seguir mostra que a avaria está piorando, pois o vazamento aumenta a cada hora.

Tempo (h)	0	1	2	3	4
Vazamento (galões/h)	50	70	97	136	190

Tempo (h)	5	6	7	8
Vazamento (galões/h)	265	369	516	720

(a) Superestime e subestime a quantidade total de petróleo vazada 5 horas depois do acidente.

(b) Repita o item (a) para estimar a quantidade total de petróleo vazada 8 horas depois do acidente.

(c) O tanque continua vazando 720 galões/h depois das primeiras 8 horas. Se o petroleiro continha 25.000 galões de combustível, aproximadamente quantas horas mais vão decorrer, na hipótese pessimista, até que todo o petróleo vaze? E na hipótese otimista?

20. Poluição do ar Uma fábrica obtém eletricidade queimando óleo. Os poluentes produzidos como resultado da combustão são removidos por limpadores colocados nas chaminés. Com o tempo, o mecanismo de remoção torna-se menos eficiente e, no final, quando a quantidade de poluentes lançada excede os parâmetros governamentais, os limpadores devem ser trocados. Conforme os registros a seguir, medições são feitas no fim de cada mês para determinar a taxa com que os poluentes são lançados na atmosfera.

Mês	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Maio	Jun.
Taxa de lançamento de poluentes (toneladas/dia)	0,20	0,25	0,27	0,34	0,45	0,52

Mês	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.
Taxa de lançamento de poluentes (toneladas/dia)	0,63	0,70	0,81	0,85	0,89	0,95

(a) Admitindo-se um mês com 30 dias e que novos limpadores permitam lançar apenas 0,05 tonelada/dia, faça uma superestimativa da quantidade total de poluentes lançada no fim de junho. Qual é a subestimativa?

(b) Na melhor das hipóteses, quando aproximadamente terão sido lançadas 125 toneladas de poluentes na atmosfera?

Área de um círculo

21. Inscreva um polígono regular de n lados dentro de um círculo de raio 1 e calcule a área do polígono para os valores de n a seguir.

(a) 4 (quadrado) (b) 8 (octógono) (c) 16

(d) Compare as áreas obtidas nos itens (a), (b) e (c) com a área do círculo.

22. (*Continuação do Exercício 21.*)

(a) Inscreva um polígono regular de n lados dentro de um círculo de raio 1 e calcule a área de um dos n triângulos congruentes formados pelos raios que cruzam os vértices do polígono.

(b) Calcule o limite da área do polígono inscrito quando $n \to \infty$.

(c) Repita os cálculos feitos nos itens (a) e (b) para um círculo de raio r.

USANDO O COMPUTADOR

Nos exercícios 23–26, use um SAC para executar os passos a seguir.

(a) Faça um gráfico das funções ao longo do intervalo dado.

(b) Divida o intervalo em $n = 100$, 200 e 1.000 subintervalos de igual comprimento e calcule a função no ponto médio de cada intervalo.

(c) Calcule o valor médio dos valores da função gerados no item (b).

(d) Resolva a equação $f(x) =$ (valor médio) para x usando o valor médio calculado no item (c) para $n =$ 1.000 partições.

23. $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $[0, \pi]$

24. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ em $[0, \pi]$

25. $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ em $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

26. $f(x) = x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$ em $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

5.2 Notação sigma e limites de somas finitas

Ao fazer estimativas com somas finitas na Seção 5.1, encontramos várias somas com muitos termos (até 1.000, na Tabela 5.1, por exemplo). Nesta seção, vamos apresentar uma notação para designar somas com grande quantidade de termos. Após descrever a notação e anunciar várias de suas propriedades, vamos examinar o que acontece com uma aproximação de soma finita quando o número de termos tende ao infinito.

Somas finitas e notação sigma

A **notação sigma** permite expressar uma soma com muitos termos em forma compacta.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

A letra grega Σ (sigma maiúscula, correspondente ao nosso S) significa "soma". O **índice do somatório** k diz onde começa a soma (no número sob o Σ) e onde ela termina (no número acima do Σ). Qualquer letra pode ser usada para denotar o índice, mas i, j, k são as mais comuns.

O índice k termina em $k = n$.

O símbolo de somatório (letra grega sigma)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

a_k é a fórmula para o k-ésimo termo.

O índice k começa em $k = 1$.

Desse modo, podemos escrever

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2$$

e

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(100) = \sum_{i=1}^{100} f(i)$$

A notação sigma usada no lado direito dessas equações é muito mais compacta que as expressões de somatório da esquerda.

EXEMPLO 1 Usando a notação sigma

A soma em notação sigma	A soma escrita, um termo para cada valor de k	O valor da soma
$\sum_{k=1}^{5} k$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1(1) + (-1)^2(2) + (-1)^3(3)$	$-1 + 2 - 3 = -2$
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$
$\sum_{k=4}^{5} \frac{k^2}{k-1}$	$\frac{4^2}{4-1} + \frac{5^2}{5-1}$	$\frac{16}{3} + \frac{25}{4} = \frac{139}{12}$

O limite inferior do somatório não precisa ser 1; pode ser qualquer número inteiro.

EXEMPLO 2 Usando diferentes valores iniciais no índice

Expresse a soma $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ em notação sigma.

SOLUÇÃO A fórmula que gera os termos muda conforme o limite inferior de somatório, mas os termos gerados permanecem os mesmos. Normalmente é mais simples começar com $k = 0$ ou $k = 1$.

Começando com $k = 0$: $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=0}^{4} (2k + 1)$$

Começando com $k = 1$: $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=1}^{5} (2k - 1)$$

Começando com $k = 2$: $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=2}^{6} (2k - 3)$$

Começando com $k = -3$: $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=-3}^{1} (2k + 7)$$

Quando temos uma soma do tipo

$$\sum_{k=1}^{3}(k + k^2)$$

podemos rearranjar os termos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(k + k^2) &= (1 + 1^2) + (2 + 2^2) + (3 + 3^2) \\ &= (1 + 2 + 3) + (1^2 + 2^2 + 3^2) \qquad \text{Termos reagrupados.} \\ &= \sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} k^2\end{aligned}$$

Isso ilustra uma regra para somas finitas:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Quatro regras desse tipo são apresentadas a seguir. Uma prova de sua validade pode ser obtida por meio da indução matemática (veja o Apêndice A.1).

Regras algébricas para somas finitas

1. *Regra da soma:* $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
2. *Regra da diferença:* $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$
3. *Regra da multiplicação por constante:* $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$ (Qualquer número c)
4. *Regra do valor constante:* $\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$ (c é qualquer valor constante)

EXEMPLO 3 Usando as regras algébricas para somas finitas

(a) $\sum_{k=1}^{n}(3k - k^2) = 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2$ — Regras da diferença e da multiplicação por constante.

(b) $\sum_{k=1}^{n}(-a_k) = \sum_{k=1}^{n}(-1) \cdot a_k = -1 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k = -\sum_{k=1}^{n} a_k$ — Regra da multiplicação por constante.

(c) $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(k + 4) &= \sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} 4 && \text{Regra da soma.} \\ &= (1 + 2 + 3) + (3 \cdot 4) && \text{Regra do valor constante.} \\ &= 6 + 12 = 18\end{aligned}$$

(d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$ — Regra do valor constante ($1/n$ é constante).

Companion Website

Biografia histórica

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Ao longo dos anos, foi descoberta uma série de fórmulas para os valores de somas finitas. As mais famosas são a fórmula para a soma dos primeiros n inteiros (conta-se que Gauss a descobriu aos 8 anos) e as fórmulas para as somas dos quadrados e cubos dos primeiros n inteiros.

EXEMPLO 4 A soma dos primeiros n inteiros

Demonstre que a soma dos primeiros n inteiros é

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUÇÃO A fórmula nos diz que a soma dos primeiros quatro inteiros é

$$\frac{(4)(5)}{2} = 10$$

Confirmamos essa previsão por adição:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Para provar essa fórmula de modo geral, escrevemos os termos da soma duas vezes, uma para a frente e outra para trás.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 1 \end{array}$$

Se somamos os dois termos da primeira coluna, temos $1 + n = n + 1$. De modo análogo, se somamos os dois termos da segunda coluna, temos $2 + (n - 1) = n + 1$. A soma dos dois termos de qualquer coluna resulta sempre em $n + 1$. Quando somamos as n colunas, obtemos n termos, todos iguais a $n + 1$, para um total de $n(n + 1)$. Como isso equivale ao dobro da quantidade buscada, a soma dos primeiros n inteiros é $(n)(n + 1)/2$.

As fórmulas para as somas dos quadrados e cubos dos primeiros n inteiros são provadas por meio de indução matemática (veja o Apêndice A.1). Vamos enunciá-las aqui.

Primeiros n quadrados: $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Primeiros n cubos: $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Limites de somas finitas

As aproximações de somas finitas que examinamos na Seção 5.1 ficavam mais precisas conforme o número de termos crescia e a largura (comprimento) dos subintervalos diminuía. O exemplo a seguir mostra como calcular um valor-limite quando a largura dos subintervalos tende a zero e seu número cresce rumo ao infinito.

EXEMPLO 5 Limite de aproximações finitas para uma área

Determine o valor-limite das aproximações de soma inferior para a área da região R, que fica sob a curva de $y = 1 - x^2$ e acima do intervalo $[0, 1]$

no eixo x, usando retângulos de mesma largura, a qual tende a zero e cujo número tende ao infinito. (Veja a Figura 5.4a.)

SOLUÇÃO Calculamos uma aproximação de soma inferior usando n retângulos de igual largura $\Delta x = (1 - 0)/n$ e, então, vemos o que acontece quando $n \to \infty$. Começamos subdividindo $[0, 1]$ em n subintervalos de igual largura

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right]$$

Cada subintervalo tem largura $1/n$. A função $1 - x^2$ é decrescente em $[0, 1]$ e seu menor valor em cada subintervalo ocorre na extremidade direita desse subintervalo. Logo, constrói-se uma soma inferior com retângulos cuja altura no subintervalo $[(k - 1)/n, k/n]$ seja $f(k/n) = 1 - (k/n)^2$, o que resultará na soma:

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

Escrevemos isso em notação sigma e simplificamos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3} && \text{Regra da diferença.} \\
&= n \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 && \text{Regras do valor constante e da multiplicação por constante.} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{n^3}\right)\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} && \text{Soma dos primeiros } n \text{ quadrados.} \\
&= 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} && \text{Numerador expandido.}
\end{aligned}$$

Obtemos uma expressão para a soma inferior que vale para qualquer n. Considerando o limite dessa expressão quando $n \to \infty$, vemos que as somas inferiores convergem quando o número de subintervalos aumenta e a largura desses subintervalos tende a zero:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}\right) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

As aproximações de soma inferior convergem para 2/3. Um cálculo similar mostrará que as aproximações de soma superior também convergem para 2/3 (Exercício 35). Aliás, conforme mencionado no resumo no final da Seção 5.1, qualquer aproximação de soma finita convergirá para o mesmo valor, 2/3. Isso acontece porque é possível demonstrar que qualquer aproximação de soma finita fica entre as aproximações de soma superior e inferior. Por essa razão, somos levados a *definir* a área da região R como esse valor-limite. Na Seção 5.3, estudamos os limites dessas aproximações finitas em um contexto mais geral.

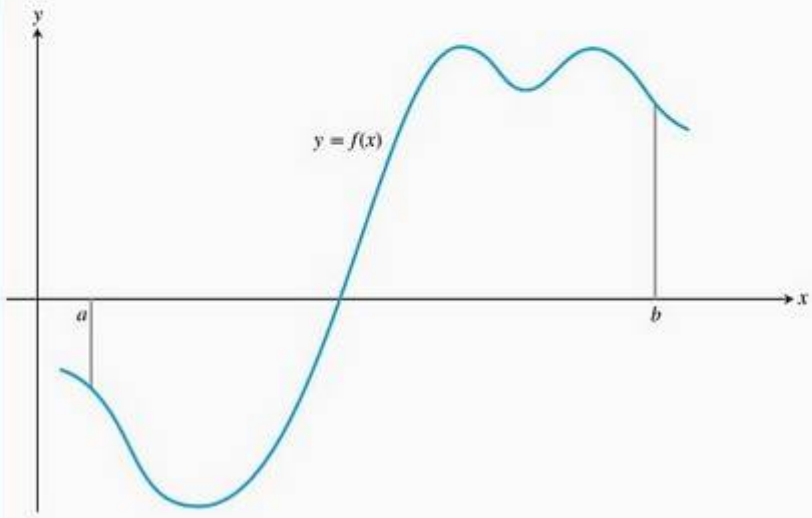


FIGURA 5.8 Uma função contínua típica $y = f(x)$ ao longo de um intervalo fechado $[a, b]$.

Somas de Riemann

Companion Website
Biografia histórica

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

O matemático alemão Bernhard Riemann deu precisão à teoria do limite das aproximações finitas. Agora, introduziremos o conceito de *soma de Riemann*, fundamental para a teoria da integral definida, a ser estudada na próxima seção.

Começamos com uma função arbitrária f definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Assim como a função traçada na Figura 5.8, ela pode ter valores negativos e positivos. Depois, subdividimos o intervalo $[a, b]$ em subintervalos, não necessariamente da mesma largura (ou comprimento), e formamos somas da mesma maneira que fizemos para as aproximações finitas da Seção 5.1. Para tanto, escolhemos $n - 1$ pontos $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}\}$, entre a e b, sujeitos à condição de que

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

Para tornar a notação coerente, denotamos a por x_0 e b por x_n, de modo que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

O conjunto

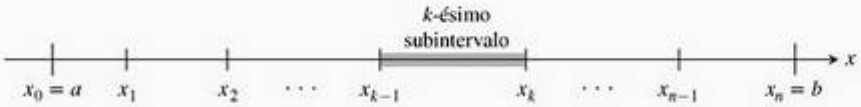
$$P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$$

é chamado **partição** de $[a, b]$.

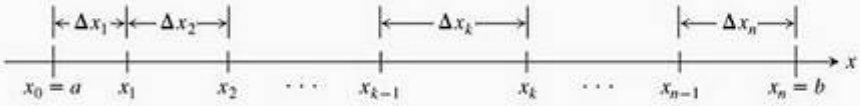
A partição P divide $[a, b]$ em n subintervalos fechados.

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

O primeiro desses subintervalos é $[x_0, x_1]$, o segundo, $[x_1, x_2]$, e o ***k*-ésimo subintervalo** de P é $[x_{k-1}, x_k]$, sendo k um inteiro entre 1 e n.



A largura do primeiro subintervalo $[x_0, x_1]$ é denotada por Δx_1, a largura do segundo, $[x_1, x_2]$, por Δx_2, e a largura do k-ésimo subintervalo é $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Se todos os n subintervalos tiverem a mesma largura, então a largura comum Δx será igual a $(b - a)/n$.



Em cada subintervalo selecionamos um ponto. Chamamos o ponto escolhido no k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de c_k. Depois, em cada subintervalo, construímos um retângulo que tem base no eixo x e toca a curva em $(c_k, f(c_k))$. Esses retângulos podem estar tanto acima como abaixo do eixo, dependendo de $f(c_k)$ ser positiva ou negativa, ou ainda sobre ele se $f(c_k) = 0$ (Figura 5.9).

Em cada subintervalo, formamos o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$. Esse produto pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo do sinal de $f(c_k)$. Quando $f(c_k) > 0$, o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ é a área de um retângulo com altura $f(c_k)$ e largura Δx_k. Quando $f(c_k) < 0$, o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ é um número negativo, o oposto da área de um retângulo com largura Δx_k que começa no eixo x e estende-se para baixo, até o número negativo $f(c_k)$.

Por fim, somamos todos esses produtos e obtemos:

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

A soma S_P é uma **soma de Riemann para f no intervalo $[a, b]$**. Existem muitas somas desse tipo, dependendo de nossas escolhas quanto à partição P e aos números c_k nos subintervalos.

No Exemplo 5, onde todos os subintervalos tinham largura $\Delta x = 1/n$, pudemos torná-los mais estreitos simplesmente aumentando o número n. Quando uma partição tem subintervalos de largura variada, podemos garantir que todos sejam estreitos controlando a largura do subintervalo mais longo (mais comprido). Definimos a **norma** de uma partição P, denotada por $= \|P\|$, como

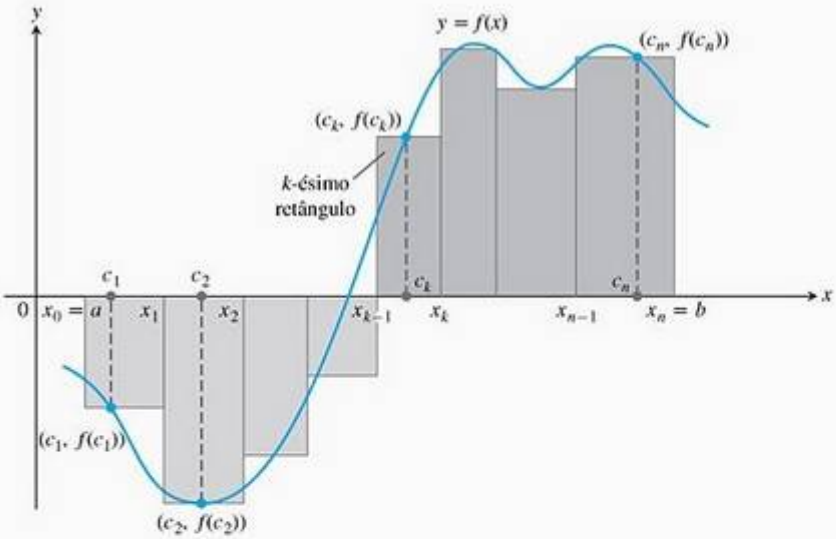


FIGURA 5.9 Os retângulos aproximam a região que fica entre a curva da função $y = f(x)$ e o eixo x.

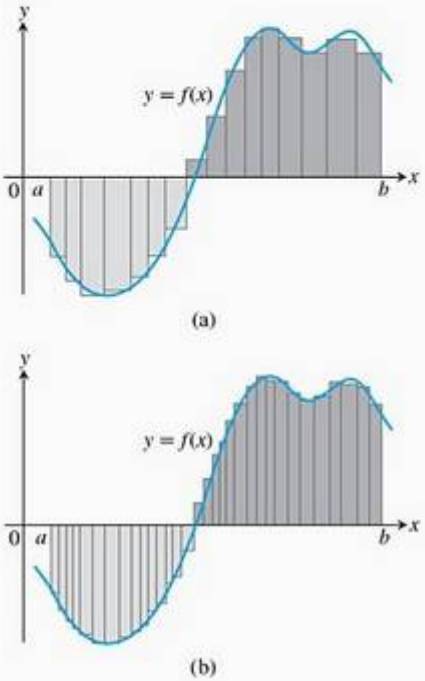
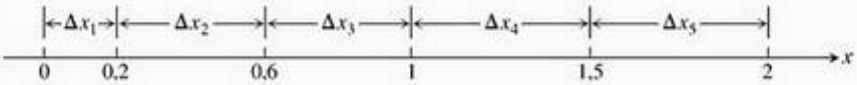


FIGURA 5.10 A curva da Figura 5.9 com retângulos obtidos de partições mais finas de $[a, b]$. Partições mais finas criam conjuntos de retângulos com bases menores que aproximam a região entre a curva de f e o eixo x com precisão cada vez maior.

a maior de todas as larguras dos subintervalos. Se $\|P\|$ é um número pequeno, então todos os subintervalos da partição P são estreitos. Vejamos um exemplo dessas idéias.

EXEMPLO 6 Particionando em um intervalo fechado

O conjunto $P = \{0; 0{,}2; 0{,}6; 1; 1{,}5; 2\}$ é uma partição de $[0, 2]$. Existem cinco subintervalos de P: $[0; 0{,}2]$, $[0{,}2; 0{,}6]$, $[0{,}6; 1]$, $[1; 1{,}5]$ e $[1{,}5; 2]$:



Os comprimentos dos subintervalos são $\Delta x_1 = 0{,}2$, $\Delta x_2 = 0{,}4$, $\Delta x_3 = 0{,}4$, $\Delta x_4 = 0{,}5$ e $\Delta x_5 = 0{,}5$. O comprimento do subintervalo mais longo é 0,5, logo a norma da partição é $\|P\| = 0{,}5$. Nesse exemplo, há dois subintervalos do mesmo comprimento.

Qualquer soma de Riemann associada a uma partição de um intervalo fechado $[a, b]$ define retângulos que aproximam a região entre o gráfico de uma função contínua f e o eixo x. Partições cuja norma tende a zero levam a conjuntos de retângulos que aproximam a região com precisão cada vez maior, conforme sugerido pela Figura 5.10. Veremos na próxima seção que, se a função f é contínua ao longo do intervalo fechado $[a, b]$, então não importa como escolhemos a partição P e os pontos c_k em seus subintervalos para construir uma soma de Riemann: a aproximação sempre chegará a um único valor-limite quando a largura dos subintervalos, controlada pela norma da partição, tender a zero.

Exercícios 5.2

Notação sigma

Escreva as somas nos exercícios 1–6 sem a notação sigma. Depois, calcule-as.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{6k}{k+1}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{k-1}{k}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos k\pi$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \operatorname{sen} k\pi$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{k}$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (-1)^k \cos k\pi$

7. Qual das seguintes alternativas expressa $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$ em notação sigma?

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} 2^{k-1}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} 2^k$ (c) $\displaystyle\sum_{k=-1}^{4} 2^{k+1}$

8. Qual das seguintes alternativas expressa $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32$ em notação sigma?

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} (-2)^{k-1}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} (-1)^k 2^k$ (c) $\displaystyle\sum_{k=-2}^{3} (-1)^{k+1} 2^{k+2}$

9. Qual das fórmulas a seguir não equivale às outras duas?

   (a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{k+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=-1}^{1} \frac{(-1)^k}{k+2}$

10. Qual das fórmulas a seguir não equivale às outras duas?

    (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (k-1)^2$ (b) $\displaystyle\sum_{k=-1}^{3} (k+1)^2$ (c) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1} k^2$

Expresse as somas nos exercícios 11–16 em notação sigma. A forma de sua resposta vai depender de sua escolha quanto ao limite inferior do somatório.

11. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

12. $1 + 4 + 9 + 16$

13. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

14. $2 + 4 + 6 + 8 + 10$

15. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

16. $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{5}{5}$

Valores de somas finitas

17. Suponha que e $\sum_{k=1}^{n} b_k = 6$. Determine os valores de

(a) $\sum_{k=1}^{n} 3a_k$ (b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{6}$ (c) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$

(d) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$ (e) $\sum_{k=1}^{n} (b_k - 2a_k)$

18. Suponha que e $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$. Determine os valores de

(a) $\sum_{k=1}^{n} 8a_k$ (b) $\sum_{k=1}^{n} 250b_k$

(c) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + 1)$ (d) $\sum_{k=1}^{n} (b_k - 1)$

Calcule as somas nos exercícios 19–28.

19. (a) $\sum_{k=1}^{10} k$ (b) $\sum_{k=1}^{10} k^2$ (c) $\sum_{k=1}^{10} k^3$

20. (a) $\sum_{k=1}^{13} k$ (b) $\sum_{k=1}^{13} k^2$ (c) $\sum_{k=1}^{13} k^3$

21. $\sum_{k=1}^{7} (-2k)$

22. $\sum_{k=1}^{5} \frac{\pi k}{15}$

23. $\sum_{k=1}^{6} (3 - k^2)$

24. $\sum_{k=1}^{6} (k^2 - 5)$

25. $\sum_{k=1}^{5} k(3k + 5)$

26. $\sum_{k=1}^{7} k(2k + 1)$

27. $\sum_{k=1}^{5} \frac{k^3}{225} + \left(\sum_{k=1}^{5} k\right)^3$

28. $\left(\sum_{k=1}^{7} k\right)^2 - \sum_{k=1}^{7} \frac{k^3}{4}$

Retângulos para somas de Riemann

Nos exercícios 29–32, esboce o gráfico de cada função $f(x)$ no intervalo dado. Divida o intervalo em quatro subintervalos de mesmo comprimento. Depois acrescente ao seu esboço os retângulos associados com a soma de Riemann $\sum_{k=1}^{4} f(c_k)\,\Delta x_k$ tomando c_k como (a) extremidade esquerda, (b) extremidade direita e (c) ponto médio do k-ésimo subintervalo. (Faça um esboço para cada conjunto de retângulos.)

29. $f(x) = x^2 - 1, \quad [0, 2]$

30. $f(x) = -x^2, \quad [0, 1]$

31. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad [-\pi, \pi]$

32. $f(x) = \operatorname{sen} x + 1, \quad [-\pi, \pi]$

33. Encontre a norma da partição $P = \{0; 1{,}2; 1{,}5; 2{,}3; 2{,}6; 3\}$.

34. Encontre a norma da partição $P = \{-2; -1{,}6; -0{,}5; 0; 0{,}8; 1\}$.

Limites de somas superiores

Para as funções nos exercícios 35–40, determine uma fórmula para a soma superior, obtida dividindo-se o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais. Em seguida, considere o limite dessas somas quando $n \to \infty$ para calcular a área sob a curva ao longo de $[a, b]$.

35. $f(x) = 1 - x^2$ ao longo do intervalo $[0, 1]$.

36. $f(x) = 2x$ ao longo do intervalo $[0, 3]$.

37. $f(x) = x^2 + 1$ ao longo do intervalo $[0, 3]$.

38. $f(x) = 3x^2$ ao longo do intervalo $[0, 1]$.

39. $f(x) = x + x^2$ ao longo do intervalo $[0, 1]$.

40. $f(x) = 3x + 2x^2$ ao longo do intervalo $[0, 1]$.

5.3 A integral definida

Na Seção 5.2, investigamos o limite de uma soma finita para a função definida em um intervalo fechado $[a, b]$ usando n subintervalos de igual largura (ou comprimento), $(b - a)/n$. Nesta seção, vamos examinar o limite de somas de Riemann mais gerais quando a norma das partições de $[a, b]$ tende a zero. Para somas de Riemann gerais, os subintervalos das partições não precisam ter a mesma largura. O processo de limite leva, então, ao conceito de *integral definida* de uma função em um intervalo fechado $[a, b]$.

Limites de somas de Riemann

O conceito de integral definida baseia-se na idéia de que, para certas funções, quando a norma das partições de $[a, b]$ tende a zero, os valores das somas

de Riemann correspondentes tendem a um valor-limite I. Essa idéia de convergência significa que uma soma de Riemann ficará próxima do número I desde que a norma de sua partição seja pequena o suficiente (pois assim todos os seus subintervalos serão estreitos o suficiente). Introduzimos o símbolo ϵ como um número positivo pequeno que especifica quão próxima de I a soma de Riemann deverá ficar, e o símbolo δ como um segundo número positivo pequeno que especifica quão pequena a norma de uma partição precisa ser para que isso aconteça. Eis uma formulação precisa.

Definição A integral definida como limite de somas de Riemann
Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Dizemos que um número I é a **integral definida de f em $[a, b]$** e que I é o limite das somas de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ se a seguinte condição é satisfeita:
Dado qualquer número $\epsilon > 0$, existe um número correspondente $\delta > 0$, tal que, para qualquer partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ com $\|P\| < \delta$ e qualquer escolha de c_k em $[x_{k-1}, x_k]$, temos

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k - I \right| < \epsilon$$

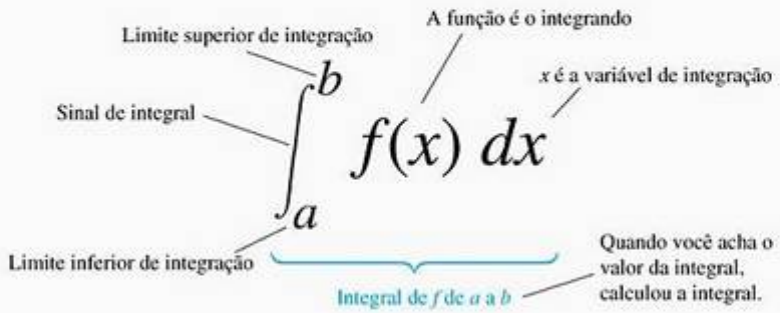
Leibniz introduziu uma notação para a integral definida que capta sua construção como um limite de somas Riemann. Ele visualizou as somas finitas $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ tornando-se uma soma infinita dos valores da função $f(x)$ multiplicados por larguras de subintervalos "infinitesimais" dx. O símbolo do somatório, $\sum$, é substituído no limite pelo símbolo da integral, $\int$, cuja origem é a letra "S". Os valores da função $f(c_k)$ são substituídos por uma seleção contínua dos valores da função $f(x)$. As larguras de subintervalo Δx_k tornam-se a diferencial dx. É como se somássemos todos os produtos da forma $f(x) \cdot dx$ conforme x se move de a para b. Embora essa notação capte o processo de construção da integral, é a definição de Riemann que dá significado preciso à integral definida.

Notação e existência das integrais definidas

O símbolo para o número I na definição da integral definida é

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

que é lido como "integral de a até b de f de x dx" ou, às vezes, como "integral de a até b de f de x em relação a x". Os outros componentes do símbolo da integral também têm nomes:



Quando a definição é satisfeita, dizemos que as somas de Riemann de f em $[a, b]$ **convergem** para a integral definida $I = \int_a^b f(x)\,dx$ e que f é **integrável** no intervalo $[a, b]$. Temos muitas opções de partição P com norma que tenda a zero, e muitas opções de pontos c_k para cada partição. A integral definida existe quando sempre obtemos o mesmo limite I, independentemente de quais escolhas tenham sido feitas. Quando o limite existe, nós o escrevemos como a integral definida

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Quando cada partição tem n subintervalos iguais, cada um com largura $\Delta x = (b - a)/n$, também escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x = I = \int_a^b f(x)\,dx$$

O limite é sempre tomado quando a norma das partições tende a zero e o número de subintervalos tende ao infinito.

O valor da integral definida de uma função em qualquer intervalo específico depende da função, e não da letra que escolhemos para representar a variável independente. Se decidirmos usar t ou u em vez de x, simplesmente escreveremos a integral como

$$\int_a^b f(t)\,dt \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(u)\,dt \quad \text{em vez de} \quad \int_a^b f(x)\,dt$$

Independentemente de como representamos a integral, o número é o mesmo, definido como o limite das somas de Riemann. Como não importa qual letra usamos para ir de a até b, a variável de integração é chamada **variável artificial**.

Como não há muitas escolhas a fazer quando se busca o limite das somas de Riemann, pode parecer difícil mostrar que tal limite existe. Acontece, porém, que, independentemente das escolhas feitas, as somas de Riemann associadas a uma função *contínua* convergem para o mesmo limite.

Teorema 1 **A existência de integrais definidas**
Uma função contínua é integrável. Isto é, se uma função f é contínua em um intervalo $[a, b]$, então sua integral definida em $[a, b]$ existe.

De acordo com o teorema do valor extremo (Teorema 1, Seção 4.1), quando f é contínua podemos escolher c_k de maneira que $f(c_k)$ forneça o valor máximo de f em $[x_{k-1}, x_k]$, o que resultará em uma **soma superior**. Também podemos escolher c_k de maneira que forneça o valor mínimo de f em $[x_{k-1}, x_k]$, o que resultará em uma **soma inferior**. Podemos escolher c_k de maneira que seja o ponto médio de $[x_{k-1}, x_k]$, o ponto mais à direita x_k, ou ainda um ponto aleatório. Podemos escolher partições de largura igual ou variada. Em todos os casos, obteremos o mesmo limite para $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ quando $\|P\| \to 0$. A idéia subjacente ao Teorema 1 é que uma soma de Riemann associada a uma partição não é superior à soma superior dessa partição, tampouco inferior à sua soma inferior. As somas superior e inferior convergem para o mesmo valor quando $\|P\| \to 0$. Todas as outras somas de Riemann ficam entre as somas inferior e superior e têm o mesmo limite. A prova do Teorema 1 envolve uma

análise cuidadosa de funções, partições e limites nessa linha de raciocínio e ficará para um texto mais avançado. Os exercícios 80 e 81 dão, porém, uma indicação dessa prova.

O Teorema 1 nada diz sobre como *calcular* integrais definidas. Um método de cálculo será apresentado na Seção 5.4, por meio de uma conexão com o cálculo das primitivas.

Funções integráveis e não integráveis

O Teorema 1 nos diz que funções contínuas em $[a, b]$ são integráveis nesse intervalo; as não contínuas podem ou não ser integráveis. Entre as funções descontínuas integráveis estão aquelas que são crescentes em $[a, b]$ (Exercício 77) e as *funções contínuas por partes*, definidas nos exercícios adicionais ao fim deste capítulo. (Essas últimas são contínuas, exceto em um número finito de pontos em $[a, b]$.) Para não ser integrável, uma função precisa ser tão descontínua a ponto de a região entre sua curva e o eixo x não poder ser bem aproximada por retângulos cada vez mais estreitos. Eis um exemplo de função não integrável.

EXEMPLO 1 Uma função não integrável em $[0, 1]$

A função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

não apresenta integral de Riemann no intervalo $[0, 1]$. Por trás disso está o fato de que entre dois números quaisquer dessa função existe um número racional e outro irracional. Logo, a função salta para cima e para baixo em $[0, 1]$ tão erraticamente que a região abaixo de sua curva e acima do eixo x não pode ser aproximada por retângulos, por mais estreitos que eles sejam. Estamos dizendo, na verdade, que as aproximações de soma superior e de soma inferior convergem para valores-limite diferentes.

Se pegamos uma partição P de $[0, 1]$ e escolhemos c_k para ser o valor máximo de f em $[x_{k-1}, x_k]$, então a soma de Riemann correspondente é

$$U = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (1)\,\Delta x_k = 1$$

pois cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ contém um número racional onde $f(c_k) = 1$. Observe que a soma do comprimento dos intervalos na partição dá 1, $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1$. Logo, cada soma de Riemann desse tipo será 1, e um limite de somas de Riemann usando essas escolhas será igual a 1.

Por outro lado, se escolhemos c_k para ser o valor mínimo de f em $[x_{k-1}, x_k]$, então a soma de Riemann é

$$L = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (0)\,\Delta x_k = 0$$

pois cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ contém um número irracional c_k onde $f(c_k) = 0$. O limite das somas de Riemann usando essas escolhas será igual a zero. Como o limite depende das escolhas de c_k, a função f não é integrável.

Propriedades das integrais definidas

Ao definir $\int_a^b f(x)\,dx$ como um limite das somas $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$, caminhamos da esquerda para a direita ao longo do intervalo $[a, b]$. O que aconteceria se trabalhássemos no sentido oposto, começando com $x_0 = b$ e terminando em $x_n = a$? Cada Δx_k na soma de Riemann mudaria de sinal, com $x_k - x_{k-1}$ agora negativo em vez de positivo. Com as mesmas escolhas de c_k em cada subintervalo, o sinal de cada soma Riemann mudaria, assim como o sinal do limite, a integral $\int_b^a f(x)\,dx$. Como até agora não explicamos o que significa integrar de trás para a frente, somos levados a definir

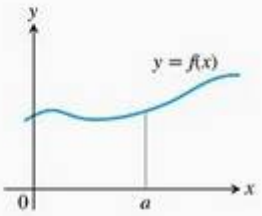
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

A integral também pode ser estendida para um intervalo de largura zero, quando $a = b$. Como $f(c_k)\,\Delta x_k$ é zero quando a largura do intervalo $\Delta x_k = 0$, definimos

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

O Teorema 2 estabelece sete propriedades das integrais, dadas como regras que elas satisfazem, incluindo as duas anteriores. Essas regras se revelam muito úteis no cálculo de integrais. Vamos recorrer a elas repetidamente para simplificar nossos cálculos.

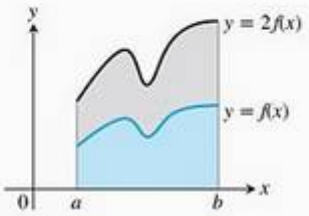
As regras 2 a 7 têm interpretações geométricas, mostradas na Figura 5.11. Os gráficos dessas figuras são de funções positivas, mas as regras se aplicam a funções integráveis em geral.



(a) *Intervalo de largura zero:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

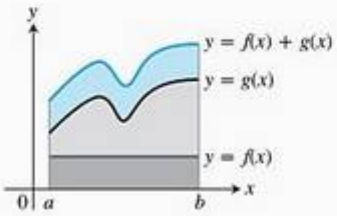
(A área sob um ponto é 0)



(b) *Multiplicação por constante:*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

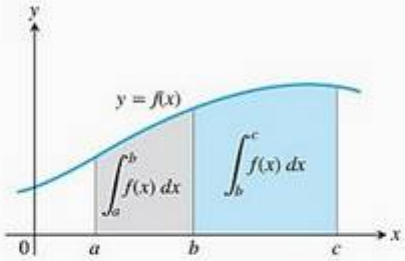
(Mostrado para $k = 2$)



(c) *Soma:*

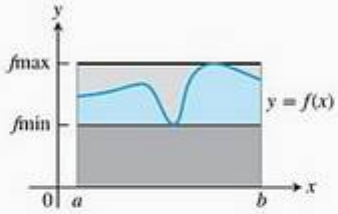
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(Soma das áreas)



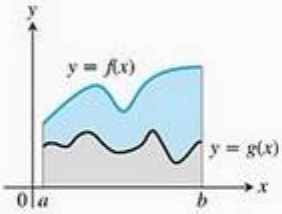
(d) *Aditividade para integrais definidas:*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



(e) *Desigualdade max-min:*

$$f\min \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le f\max \cdot (b - a)$$



(f) *Dominação:*

$$f(x) \ge g(x) \text{ em } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

FIGURA 5.11

Teorema 2
Quando f e g são integráveis no intervalo $[a, b]$, a integral definida satisfaz as regras 1 a 7 da Tabela 5.3.

TABELA 5.3 Propriedades satisfeitas pelas integrais definidas

1.	*Ordem de integração:*	$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$	Uma definição.
2.	*Intervalo de largura zero:*	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$	Também uma definição.
3.	*Multiplicação por constante:*	$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$	Qualquer número k.
		$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$	$k = -1$
4.	*Soma e subtração:*	$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$	
5.	*Aditividade:*	$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$	
6.	*Desigualdade max-min:*	Se f tem o valor máximo $\max f$ e o valor mínimo $\min f$ em $[a, b]$, então $\min f \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f \cdot (b-a)$	
7.	*Dominação:*	$f(x) \ge g(x)$ em $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$	
		$f(x) \ge 0$ em $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$	(Caso especial)

Enquanto as regras 1 e 2 são definições, as regras 3 a 7 da Tabela 5.3 precisam ser provadas. As provas baseiam-se na idéia de integral definida como um limite das somas de Riemann. A seguir, temos uma prova de uma dessas regras. Provas análogas podem ser dadas para verificar as outras propriedades mostradas na Tabela 5.3.

PROVA DA REGRA 6 A Regra 6 diz que a integral de f em $[a, b]$ nunca é menor que o valor mínimo de f vezes o comprimento do intervalo e nunca maior que o valor máximo de f vezes o comprimento do intervalo. A razão é que para cada divisão de $[a, b]$ e para cada escolha dos pontos c_k,

$$\begin{aligned}
\min f \cdot (b-a) &= \min f \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k && \sum_{k=1}^{n} = \Delta x_k = b - a \\
&= \sum_{k=1}^{n} \min f \cdot \Delta x_k && \text{Regra da multiplicação por constante.} \\
&\le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k && \min f \le f(c_k) \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \max f \cdot \Delta x_k && f(c_k) \le \max f \\
&= \max f \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k && \text{Regra da multiplicação por constante.} \\
&= \max f \cdot (b-a)
\end{aligned}$$

Resumindo, todas as somas de Riemann para f em $[a, b]$ satisfazem a desigualdade

$$\min f \cdot (b-a) \leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k \leq \max f \cdot (b-a)$$

Por isso, seu limite, a integral, também a satisfaz.

EXEMPLO 2 Usando as propriedades das integrais definidas

Suponha que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5, \qquad \int_{1}^{4} f(x)\,dx = -2, \qquad \int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 7$$

Então

1. $\displaystyle\int_{4}^{1} f(x)\,dx = -\int_{1}^{4} f(x)\,dx = -(-2) = 2$ Regra 1

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} [2f(x) + 3h(x)]\,dx = 2\int_{-1}^{1} f(x)\,dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)\,dx$ Regras 3 e 4

$$= 2(5) + 3(7) = 31$$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{4} f(x)\,dx = 5 + (-2) = 3$ Regra 5

EXEMPLO 3 Determinando limitantes para uma integral

Mostre que o valor de $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\;dx$ é menor que 3/2.

SOLUÇÃO A desigualdade max-min para integrais definidas (Regra 6) diz que o $\min f \cdot (b-a)$ é um *limitante inferior* para o valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ e que o $\max f \cdot (b-a)$ é um *limitante superior*. O valor máximo de $\sqrt{1+\cos x}$ ao longo de $[0, 1]$ é $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, portanto

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx \leq \sqrt{2}\cdot(1-0) = \sqrt{2}$$

Como $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\;dx$ está limitada superiormente por $\sqrt{2}$ (que é 1,414...), a integral é menor que 3/2.

Área sob o gráfico de uma função não negativa

Vamos agora tornar preciso o conceito da área de uma região com contorno curvo, captando a idéia de fazer uma aproximação com retângulos em número crescente. A área sob o gráfico de uma função contínua não negativa é definida como uma integral definida.

Definição Área sob uma curva (como uma integral definida)
Se $y = f(x)$ for não negativa e integrável em um intervalo fechado $[a, b]$, então a **área sob a curva $y = f(x)$ em $[a, b]$** será a integral de f de a até b:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

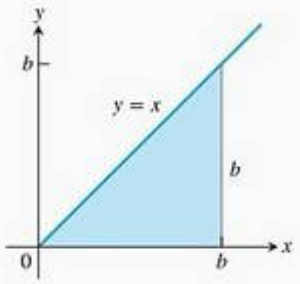


FIGURA 5.12 A região do Exemplo 4 é um triângulo.

Pela primeira vez, temos uma definição rigorosa da área de uma região cujo contorno é a curva de uma função contínua qualquer. Agora, aplicaremos tal conceito a um exemplo simples, a área sob uma reta, no qual poderemos verificar que nossa nova definição está de acordo com nossa noção prévia de área.

EXEMPLO 4 Área sob a reta $y = x$

Calcule $\int_0^b f(x)\,dx$ e determine a área A sob $y = x$ no intervalo $[0, b]$, sendo $b > 0$.

SOLUÇÃO A região em estudo é um triângulo (Figura 5.12). Calcularemos a área de duas maneiras.

(a) Para calcular a integral definida como o limite das somas de Riemann, calculamos $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ para partições cujas normas tendam a zero. O Teorema 1 nos diz que não importa quais partições ou pontos c_k escolhamos, desde que as normas tendam a zero. Todas as escolhas vão resultar exatamente no mesmo limite. Logo, consideramos a partição P, que subdivide o intervalo $[0, b]$ em n subintervalos de igual largura $\Delta x = (b - 0)/n = b/n$, e situamos c_k na extremidade direita de cada subintervalo. A partição é

$$P = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \cdots, \frac{nb}{n}\right\} \quad \text{e} \quad c_k = \frac{kb}{n}. \text{ Portanto:}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x &= \sum_{k=1}^{n} \frac{kb}{n}\cdot\frac{b}{n} && f(c_k) = c_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{kb^2}{n^2} \\
&= \frac{b^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k && \text{Regra da multiplicação por constante} \\
&= \frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} && \text{Soma dos primeiros } n \text{ inteiros.} \\
&= \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Quando $n \to \infty$ e $\|P\| \to 0$, essa última expressão à direita tem o limite $b^2/2$. Portanto:

$$\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$$

(b) Como no caso de funções não negativas a área equivale à integral definida, podemos rapidamente derivar a integral definida usando a fórmula para a área de um triângulo com base b e altura $y = b$. A área é $A = (1/2)\,b \cdot b = b^2/2$. Novamente, concluímos que $\int_0^b x\,dx b^2/2$.

O Exemplo 4 pode ser generalizado para integrarmos $f(x) = x$ em qualquer intervalo fechado $[a, b]$, sendo $0 < a < b$.

$$\int_a^b x\,dx = \int_a^0 x\,dx + \int_0^b x\,dx \qquad \text{Regra 5}$$

$$= -\int_0^a x\,dx + \int_0^b x\,dx \qquad \text{Regra 1}$$

$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \qquad \text{Exemplo 4}$$

Em conclusão, temos a seguinte regra para integrar $f(x) = x$:

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \qquad a < b \tag{1}$$

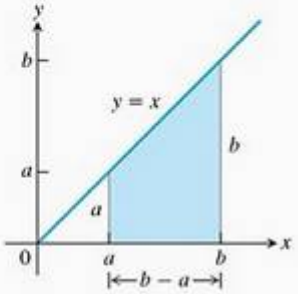


FIGURA 5.13 A área dessa região trapezoidal é $A = (b^2 - a^2)/2$.

Esse cálculo fornece a área de um trapézio (Figura 5.13). A Equação (1) continua válida quando a e b são negativos. Quando $a < b < 0$, o valor da integral definida $(b^2 - a^2)/2$ é um número negativo, o oposto da área de um trapézio que começa no eixo x e desce até a reta $y = x$. Quando $a < 0$ e $b > 0$, a Equação (1) ainda é válida e a integral definida resulta na diferença entre as duas áreas, a área sob o gráfico e acima de $[0, b]$ menos a área sob $[a, 0]$ e acima do gráfico.

Os resultados a seguir também podem ser estabelecidos usando um cálculo de soma de Riemann análogo ao do Exemplo 4 (exercícios 75 e 76).

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a), \qquad \text{sendo } c \text{ qualquer constante} \tag{2}$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \qquad a < b \tag{3}$$

Valor médio de uma função contínua revisto

Na Seção 5.1, apresentamos informalmente o valor médio de uma função contínua não negativa f no intervalo $[a, b]$, o que nos levou a definir essa média como a área sob a curva de $y = f(x)$ dividida por $b - a$. Em notação de integral, escrevemos isso como

$$\text{Média} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Podemos usar essa fórmula para dar uma definição precisa da média de qualquer função contínua (ou integrável), seja ela positiva, negativa ou ambas.

Alternativamente, podemos usar o seguinte raciocínio. Começamos com a idéia proveniente da aritmética de que a média de n números é a soma dos números dividida por n. Para uma função contínua f em $[a, b]$, pode haver infinitos valores a considerar, mas podemos amostrá-los de maneira ordenada. Dividimos $[a, b]$ em n subintervalos de larguras iguais $\Delta x = (b - a)/n$ e calculamos f em um ponto c_k em cada subintervalo (Figura 5.14). A média dos n valores amostrados é

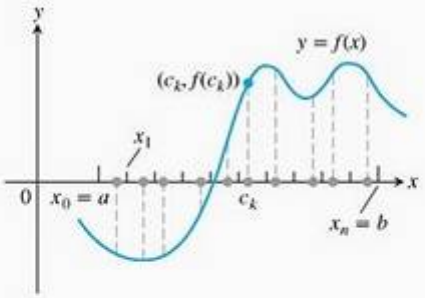


FIGURA 5.14 Uma amostra de valores de uma função em um intervalo $[a, b]$.

$$\frac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)$$

$$= \frac{\Delta x}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}, \text{ logo } \frac{1}{n} = \frac{\Delta x}{b-a}$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x$$

Obtemos a média dividindo uma soma de Riemann para f em $[a, b]$ por $(b - a)$. À medida que aumentamos o tamanho da amostra e fazemos a norma da partição aproximar-se de zero, a média deve aproximar-se de $(1/(b-a))\int_a^b f(x)\,dx$. Ambos os pontos de vista nos levam à definição a seguir.

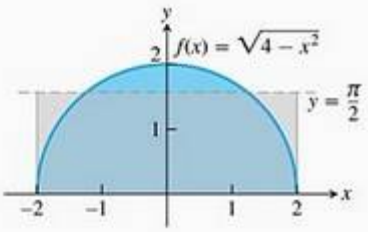


FIGURA 5.15 O valor médio de $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ em $[-2, 2]$ é $\pi/2$ (Exemplo 5).

Definição Média ou valor médio de uma função

Se f for integrável em $[a, b]$, então seu **valor médio** em $[a, b]$, também chamado sua **média**, será:

$$\mathrm{M}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

EXEMPLO 5 Determinando um valor médio

Determine o valor médio de $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ em $[-2, 2]$.

SOLUÇÃO Reconhecemos $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ como uma função cujo gráfico é o semicírculo superior de raio 2 centrado na origem (Figura 5.15).

A área entre o semicírculo e o eixo x de -2 até 2 pode ser calculada usando-se a fórmula geométrica

$$\text{Área} = \frac{1}{2}.\pi r^2 = \frac{1}{2}.\pi(2)^2 = 2\pi$$

Como f é não negativa, a área também é o valor da integral de f de -2 até 2:

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\pi$$

Portanto, o valor médio de f é

$$\mathrm{M}(f) = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$$

Exercícios 5.3

Expressando limites como integrais

Expresse os limites propostos nos exercícios 1–8 como integrais definidas.

1. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k^2\, \Delta x_k$, onde P é uma partição de $[0, 2]$
2. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} 2c_k^3\, \Delta x_k$, onde P é uma partição de $[-1, 0]$
3. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (c_k^2 - 3c_k)\, \Delta x_k$, onde P é uma partição de $[-7, 5]$
4. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{c_k}\right) \Delta x_k$, onde P é uma partição de $[1, 4]$
5. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - c_k}\, \Delta x_k$, onde P é uma partição de $[2, 3]$
6. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4 - c_k^2}\, \Delta x_k$, onde P é uma partição de $[0, 1]$
7. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\sec c_k)\, \Delta x_k$, onde P é uma partição de $[-\pi/4, 0]$
8. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{tg} c_k)\, \Delta x_k$, onde P é uma partição de $[0, -\pi/4]$

Usando propriedades e valores conhecidos para encontrar outras integrais

9. Suponha que f e g sejam contínuas e que

$$\int_1^2 f(x)\,dx = -4, \quad \int_1^5 f(x)\,dx = 6, \quad \int_1^5 g(x)\,dx = 8$$

Use as regras da Tabela 5.3 para calcular as seguintes integrais:

(a) $\int_2^2 g(x)\,dx$ (b) $\int_5^1 g(x)\,dx$

(c) $\int_1^2 3f(x)\,dx$ (d) $\int_2^5 f(x)\,dx$

(e) $\int_1^5 [f(x) - g(x)]\,dx$ (f) $\int_1^5 [4f(x) - g(x)]\,dx$

10. Suponha que f e h sejam integráveis e que

$$\int_1^9 f(x)\,dx = -1, \quad \int_7^9 f(x)\,dx = 5, \quad \int_7^9 h(x)\,dx = 4$$

Use as regras da Tabela 5.3 para obter as seguintes integrais:

(a) $\int_1^9 -2f(x)\,dx$ (b) $\int_7^9 [f(x) + h(x)]\,dx$

(c) $\int_7^9 [2f(x) - 3h(x)]\,dx$ (d) $\int_9^1 f(x)\,dx$

(e) $\int_1^7 f(x)\,dx$ (f) $\int_9^7 [h(x) - f(x)]\,dx$

11. Suponha que $\int_1^2 f(x)\,dx = 5$. Calcule:

(a) $\int_1^2 f(u)\,du$ (b) $\int_1^2 \sqrt{3} f(z)\,dz$

(c) $\int_2^1 f(t)\,dt$ (d) $\int_1^2 [-f(x)]\,dx$

12. Suponha que $\int_{-3}^0 g(t)\,dt = \sqrt{2}$. Calcule:

(a) $\int_0^{-3} g(t)\,dt$ (b) $\int_{-3}^0 g(u)\,du$

(c) $\int_{-3}^0 [-g(x)]\,dx$ (d) $\int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}}\,dr$

13. Suponha que f seja integrável e que $\int_0^3 f(z)\,dz = 3$ e $\int_0^4 f(z)\,dz = 7$. Calcule:

(a) $\int_3^4 f(z)\,dz$ (b) $\int_4^3 f(t)\,dt$

14. Suponha que h seja integrável e que $\int_{-1}^1 h(r)\,dr = 0$ e $\int_{-1}^3 h(r)\,dr = 6$. Calcule:

(a) $\int_1^3 h(r)\,dr$ (b) $-\int_3^1 h(u)\,du$

Uso da área para calcular integrais definidas

Nos exercícios 15–22, esboce o gráfico dos integrandos e use áreas para calcular as integrais.

15. $\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$
16. $\int_{1/2}^{3/2} (-2x + 4)\,dx$
17. $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$
18. $\int_{-4}^0 \sqrt{16 - x^2}\,dx$
19. $\int_{-2}^1 |x|\,dx$
20. $\int_{-1}^1 (1 - |x|)\,dx$
21. $\int_{-1}^1 (2 - |x|)\,dx$
22. $\int_{-1}^1 \left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$

Nos exercícios 23–26, use áreas para calcular as integrais.

23. $\int_0^b \frac{x}{2}\,dx, \quad b > 0$
24. $\int_0^b 4x\,dx, \quad b > 0$
25. $\int_a^b 2s\,ds, \quad 0 < a < b$
26. $\int_a^b 3t\,dt, \quad 0 < a < b$

Cálculos

Use os resultados das equações (1) e (3) para calcular as integrais dos exercícios 27–38.

27. $\int_1^{\sqrt{2}} x\,dx$ 28. $\int_{0,5}^{2,5} x\,dx$ 29. $\int_{\pi}^{2\pi} \theta\,d\theta$

30. $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r\,dr$ 31. $\int_0^{\sqrt{7}} x^2\,dx$ 32. $\int_0^{0,3} s^2\,ds$

33. $\int_0^{1/2} t^2\,dt$ 34. $\int_0^{\pi/2} \theta^2\,d\theta$ 35. $\int_a^{2a} x\,dx$

36. $\int_a^{\sqrt{3}a} x\,dx$ 37. $\int_0^{\sqrt[3]{b}} x^2\,dx$ 38. $\int_0^{3b} x^2\,dx$

Use as regras da Tabela 5.3 e as equações (1) a (3) para calcular as integrais dos exercícios 39–50.

39. $\int_3^1 7\,dx$ 40. $\int_0^{-2} \sqrt{2}\,dx$

41. $\int_0^2 5x\,dx$ 42. $\int_3^5 \frac{x}{8}\,dx$

43. $\int_0^2 (2t - 3)\,dt$ 44. $\int_0^{\sqrt{2}} \left(t - \sqrt{2}\right) dt$

45. $\int_2^1 \left(1 + \frac{z}{2}\right) dz$ 46. $\int_3^0 (2z - 3)\,dz$

47. $\int_1^2 3u^2\,du$ 48. $\int_{1/2}^1 24u^2\,du$

49. $\int_0^2 (3x^2 + x - 5)\,dx$ 50. $\int_1^0 (3x^2 + x - 5)\,dx$

Determinando a área

Nos exercícios 51–54, use uma integral definida para determinar a área da região entre a curva dada e o eixo x no intervalo $[0, b]$.

51. $y = 3x^2$ 52. $y = \pi x^2$

53. $y = 2x$ 54. $y = \frac{x}{2} + 1$

Valor médio

Nos exercícios 55–62, faça o gráfico da função e determine seu valor médio ao longo do intervalo dado.

55. $f(x) = x^2 - 1$ em $\left[0, \sqrt{3}\right]$

56. $f(x) = -\frac{x^2}{2}$ em $[0, 3]$ 57. $f(x) = -3x^2 - 1$ em $[0, 1]$

58. $f(x) = 3x^2 - 3$ em $[0, 1]$

59. $f(t) = (t - 1)^2$ em $[0, 3]$

60. $f(t) = t^2 - t$ em $[-2, 1]$

61. $g(x) = |x| - 1$ em (a) $[-1, 1]$, (b) $[1, 3]$ e (c) $[-1, 3]$

62. $h(x) = -|x|$ em (a) $[-1, 0]$, (b) $[0, 1]$ e (c) $[-1, 1]$

Teoria e exemplos

63. Que valores de a e b maximizam o valor de

$$\int_a^b (x - x^2)\,dx?$$

(*Dica*: qual é o integrando positivo?)

64. Que valores de a e b minimizam o valor de

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2)\,dx?$$

65. Use a desigualdade max-min e determine os limites superior e inferior para o valor de

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx$$

66. (*Continuação do Exercício 65.*) Use a desigualdade max-min e determine os limites superior e inferior para

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1 + x^2}\,dx \quad \text{e} \quad \int_{0,5}^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx$$

Acrescente estes para chegar a uma estimativa melhor de

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx$$

67. Demonstre que o valor de $\int_0^1 \text{sen}\,(x^2)\,dx$ não pode ser 2.

68. Demonstre que o valor de $\int_1^0 \sqrt{x + 8}\,dx$ fica entre $2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ e 3.

69. **Integrais de funções não negativas** Use a desigualdade max-min para mostrar que, se f for integrável, então

$$f(x) \geq 0 \quad \text{em} \quad [a, b] \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

70. **Integrais de funções não positivas** Mostre que, se f for integrável, então

$$f(x) \leq 0 \quad \text{em} \quad [a, b] \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq 0$$

71. Use a desigualdade sen $x \leq x$, que se aplica a $x \geq 0$, para determinar um limite superior para o valor de $\int_0^1 \text{sen}\,x\,dx$.

72. A desigualdade sec $x \geq 1 + (x^2/2)$ vale em $(-\pi/2, \pi/2)$. Use-a para determinar um limite inferior para o valor de $\int_0^1 \text{sen}\,x\,dx$.

73. Se $M(f)$ é realmente um valor típico da função integrável $f(x)$ em $[a, b]$, então o número $M(f)$ deveria ter a mesma integral que f em $[a, b]$. Isso de fato ocorre? Em outros termos,

$$\int_a^b M(f)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx?$$

Justifique sua resposta.

74. Seria bom se as médias das funções integráveis obedecessem às seguintes regras no intervalo $[a, b]$.

(a) $M(f + g) = M(f) + M(g)$

(b) $M(kf) = k\,M(f)$ (qualquer número k)

(c) $M(f) \le M(g)$ se $f(x) \le g(x)$ em $[a, b]$

Essas regras sempre se aplicam? Justifique sua resposta.

75. Como no Exemplo 4a, use limites de somas de Riemann para estabelecer a Equação (2).

76. Como no Exemplo 4a, use limites de somas de Riemann para estabelecer a Equação (3).

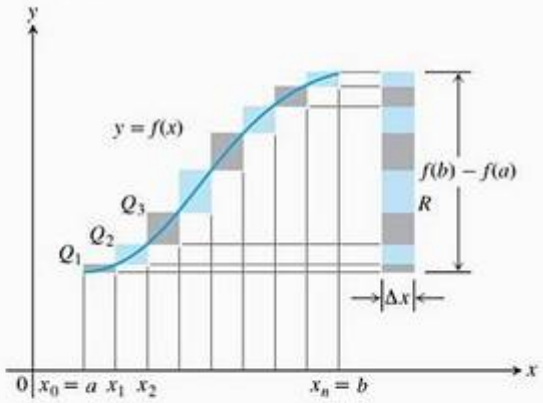
77. Somas superior e inferior para funções crescentes

(a) Suponha que a curva de uma função contínua $f(x)$ suba conforme x vai da esquerda para a direita ao longo de um intervalo $[a, b]$. Seja P uma partição de $[a, b]$ em n subintervalos de extensão $\Delta x = (b - a)/n$. Observando a figura a seguir, demonstre que a diferença entre as somas superior e inferior para f nessa partição pode ser representada graficamente como a área de um retângulo R cujas dimensões sejam $[f(b) - f(a)]$ por Δx. (*Dica*: A diferença $U - L$ é a soma das áreas de retângulos cujas diagonais $Q_0Q_1, Q_1Q_2, \ldots, Q_{n-1}Q_n$ situam-se ao longo da curva. Não há sobreposição quando esses retângulos são transladados horizontalmente para R.)

(b) Suponha que, em vez de serem iguais, as extensões Δx_k dos subintervalos da partição de $[a, b]$ variem em tamanho. Demonstre que

$$U - L \le |f(b) - f(a)|\,\Delta x_{\max}$$

quando $\Delta x_{\max}$ é a norma de P, e que portanto $\lim_{\|P\| \to 0}(U - L) = 0$.



78. Somas superior e inferior para funções decrescentes (*Continuação do Exercício 77.*)

(a) Desenhe uma figura como a do Exercício 77 para uma função contínua $f(x)$ cujos valores despenquem conforme x vai da esquerda para a direita ao longo de um intervalo $[a, b]$. Seja P uma partição de $[a, b]$ em subintervalos de igual comprimento. Encontre uma expressão para $U - L$ análoga àquela que você encontrou para $U - L$ no Exercício 77a.

(b) Suponha que, em vez de serem iguais, os comprimentos Δx_k dos subintervalos de P variem em tamanho. Demonstre que a desigualdade

$$U - L \le |f(b) - f(a)|\,\Delta x_{\max}$$

do Exercício 77b ainda é válida e que portanto $\lim_{\|P\| \to 0}(U - L) = 0$.

79. Use a fórmula

$$\operatorname{sen} h + \operatorname{sen} 2h + \operatorname{sen} 3h + \ldots + \operatorname{sen} mh = \frac{\cos(h/2) - \cos((m + (1/2))h)}{2 \operatorname{sen}(h/2)}$$

para determinar a área sob a curva $y = \operatorname{sen} x$ de $x = 0$ até $x = \pi/2$. Faça duas etapas:

(a) Divida o intervalo $[0, \pi/2]$ em n subintervalos de igual comprimento e calcule a correspondente soma superior U; depois

(b) Determine o limite de U quando $n \to \infty$ e $\Delta x = (b - a)/n \to 0$.

80. Suponha que f seja contínua e não negativa ao longo de $[a, b]$, como na figura a seguir. Inserindo pontos

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n-1}$$

como mostrado, divida $[a, b]$ em n subintervalos de extensões $\Delta x_1 = x_1 - a, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = b - x_{n-1}$, não necessariamente iguais.

(a) Se $m_k = \min\{f(x)$ para x no k-ésimo subintervalo$\}$, explique a relação entre a *soma inferior*

$$L = m_1\,\Delta x_1 + m_2\,\Delta x_2 + \cdots + m_n\,\Delta x_n$$

e a região sombreada na primeira parte da figura.

(b) Se $M_k = \max\{f(x)$ para x no k-ésimo subintervalo$\}$, explique a relação entre a *soma superior*

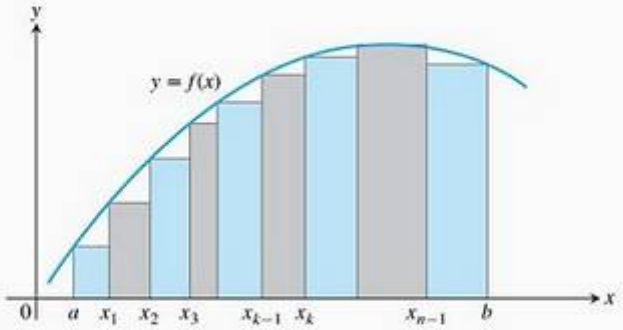
$$U = M_1\,\Delta x_1 + M_2\,\Delta x_2 + \cdots + M_n\,\Delta x_n$$

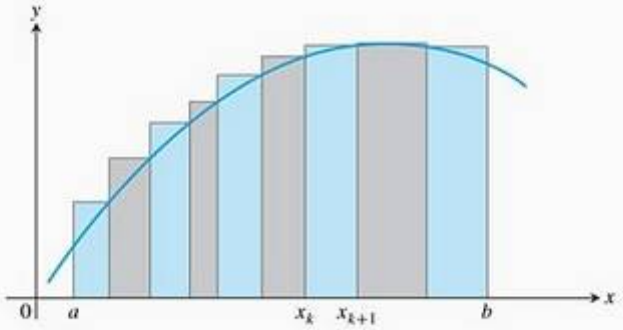
e a região sombreada na segunda parte da figura.

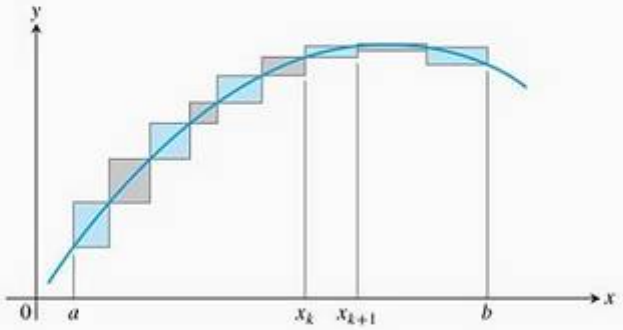
(c) Explique a relação entre $U - L$ e as regiões sombreadas ao longo da curva na terceira parte da figura.

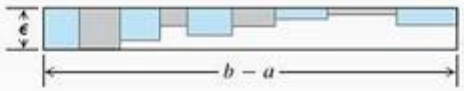
81. Dizemos que f é **uniformemente contínua** em $[a, b]$ se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, se x_1, x_2 estão em $[a, b]$ e $|x_1 - x_2| < \delta$, então $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. É possível demonstrar que uma função contínua em $[a, b]$ é uniformemente contínua. Use a figura a seguir para mostrar que, se f é contínua e $\epsilon > 0$ é dado, é possível fazer $U - L \le \epsilon \cdot (b - a)$, tornando o maior dos Δx_k pequeno o suficiente.

82. Se você tem uma velocidade média de 30 mi/h em uma viagem de 150 milhas e depois percorre as mesmas 150









milhas com média de 50 mi/h, qual é a velocidade média para a viagem inteira? Justifique sua resposta. (*Fonte*: David H. Pleacher, *The Mathematics Teacher*, v. 85, n. 6, set. 1992, p. 445-446).

USANDO O COMPUTADOR

Determinando somas de Riemann

Se seu SAC pode desenhar retângulos associados a somas de Riemann, então use-o para desenhar retângulos associados a somas de Riemann que convirjam para as integrais dos exercícios 83–88. Utilize $n = 4$, 10, 20 e 50 com subintervalos de igual extensão em cada caso.

83. $\int_0^1 (1 - x)\,dx = \frac{1}{2}$

84. $\int_0^1 (x^2 + 1)\,dx = \frac{4}{3}$

85. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = 0$

86. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = 1$

87. $\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 1$

88. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ (O valor aproximado da integral é 0,693.)

Valor médio

Nos exercícios 89–96, use um SAC para realizar os seguintes passos:

(a) Trace os pontos das funções no plano cartesiano ao longo do intervalo dado.

(b) Divida o intervalo em $n = 100$, 200 e 1.000 subintervalos de igual extensão e calcule a função no ponto médio de cada subintervalo.

(c) Calcule a média dos valores da função gerados no item **(b)**.

(d) Determine x na equação $f(x)$ = (valor médio) usando a média calculada no item **(c)** para $n = 1.000$.

89. $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $[0, \pi]$

90. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ em $[0, \pi]$

91. $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ em $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

92. $f(x) = x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$ em $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

93. $f(x) = xe^{-x}$ em $[0, 1]$

94. $f(x) = e^{-x^2}$ em $[0, 1]$

95. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ em $[2, 5]$

96. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

5.4 O teorema fundamental do cálculo

Companion Website

Biografia histórica

Sir Isaac Newton (1642-1727)

Esta seção apresenta o teorema fundamental do cálculo, o mais importante do cálculo integral. Relacionando integração e diferenciação, ele nos permite calcular integrais usando uma primitiva do integrando, sem que precisemos achar limites das somas de Riemann, como fizemos na Seção 5.3. Leibniz e Newton investigaram essa relação e deram início a avanços da matemática que alimentaram a revolução científica nos 200 anos seguintes.

Paralelamente, apresentamos a versão integral do teorema do valor médio, que é outro importante teorema do cálculo integral e serve para provar o teorema fundamental.

Teorema do valor médio para integrais definidas

Na seção anterior, definimos o valor médio de uma função contínua ao longo de um intervalo fechado $[a, b]$ como a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ dividida pelo comprimento ou largura $b - a$ do intervalo. O teorema do valor médio para integrais definidas afirma que esse valor médio é *sempre* assumido pelo menos uma vez pela função f no intervalo.

O gráfico da Figura 5.16 mostra uma função contínua *positiva* $y = f(x)$ definida no intervalo $[a, b]$. Geometricamente, o teorema do valor médio diz que existe um número c em $[a, b]$ tal que o retângulo com altura igual ao valor médio $f(c)$ da função e base $b - a$ tem exatamente a mesma área que a região sob a curva de f entre a e b.

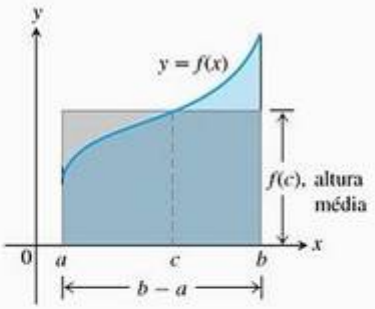


FIGURA 5.16 O valor $f(c)$ no teorema do valor médio é, de certo modo, a altura média de f em $[a, b]$. Quando $f \geq 0$, a área do retângulo sombreado é a área sob a curva de f de a até b,

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema 3 O teorema do valor médio para integrais definidas
Se f for contínua em $[a, b]$, então em algum ponto c em $[a, b]$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

PROVA Se dividirmos os dois lados da desigualdade max-min (Tabela 5.3, Regra 6) por $(b - a)$, obteremos

$$\min f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \max f$$

Como f é contínua, o teorema do valor intermediário para funções contínuas (Seção 2.6) diz que f deve assumir todos os valores entre o $\min f$ e o $\max f$. Portanto, deve assumir o valor $(1/(b - a)) \int_a^b f(x)\,dx$ em algum ponto c em $[a, b]$.

Aqui, a continuidade de f é importante. Uma função descontínua pode não assumir seu valor médio (Figura 5.17).

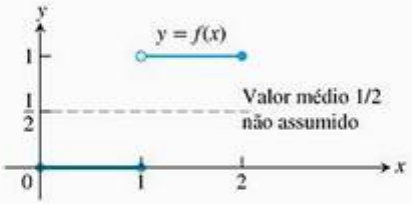


FIGURA 5.17 Uma função descontínua não precisa assumir o valor médio.

EXEMPLO 1 Aplicando o teorema do valor médio para integrais

Determine o valor médio de $f(x) = 4 - x$ em $[0, 3]$ e em que ponto do domínio dado f realmente assume esse valor.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} M(f) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{3-0}\int_0^3 (4-x)\,dx = \frac{1}{3}\left(\int_0^3 4\,dx - \int_0^3 x\,dx\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(4(3-0) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)\right) \qquad \text{Seção 5.3, equações (1) e (2)} \\ &= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

O valor médio de $f(x) = 4 - x$ ao longo de $[0, 3]$ é $5/2$. A função assume esse valor quando $4 - x = 5/2$ ou $x = 3/2$, que é o ponto c no Teorema 3 (Figura 5.18).

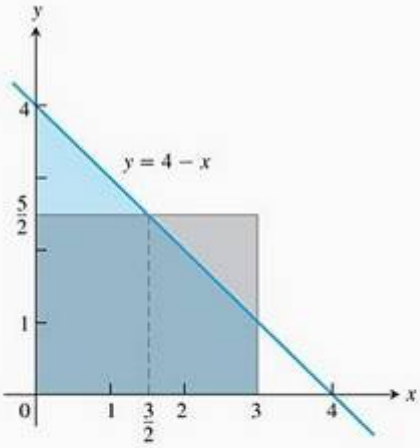


FIGURA 5.18 O retângulo com base $[0, 3]$ e altura $5/2$ (o valor médio da função $f(x) = (4 - x)$) tem área igual à área entre o gráfico de f e o eixo x de 0 a 3 (Exemplo 1).

No Exemplo 1, encontramos de fato um ponto c onde f assumiu o valor médio fazendo $f(x)$ igual ao valor médio calculado e determinando o valor de x. Mas nem sempre é tão fácil achar o valor c. O que mais podemos aprender do Teorema 2? Segue-se um exemplo.

EXEMPLO 2

Mostre que, se f é contínua em $[a, b]$, sendo $a \neq b$, e se

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

então $f(x) = 0$ pelo menos uma vez em $[a, b]$.

SOLUÇÃO O valor médio de f em $[a, b]$ é

$$M(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot 0 = 0$$

Pelo teorema do valor médio, f assume esse valor em algum ponto $c \in [a, b]$.

Teorema fundamental, parte 1

Se $f(t)$ for uma função integrável em um intervalo finito I, então a integral de qualquer número fixo $a \in I$ até outro número $x \in I$ definirá uma nova função F cujo valor em x será

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

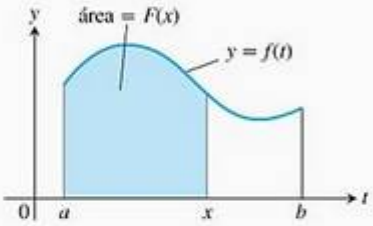


FIGURA 5.19 A função $F(x)$ definida pela Equação (1) fornece a área sob a curva de f de a até x quando f é não negativa e $x > a$.

Por exemplo, se f é não negativa e x fica à direita de a, $F(x)$ é a área sob a curva de a até x (Figura 5.19). A variável x é o limite superior de integração de uma integral, mas F é como qualquer outra função real de uma variável real. Para cada valor da variável independente x, existe um valor bem-definido da função, nesse caso, a integral de f de a até x.

A Equação (1) fornece um caminho para definir novas funções, mas a importância de a mencionarmos agora está na relação que ela estabelece entre integrais e derivadas. Se f for qualquer função contínua, então o teorema

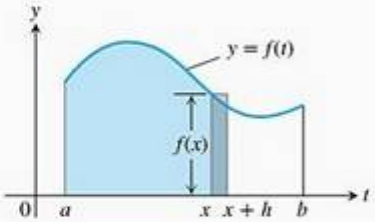


FIGURA 5.20 Na Equação (1), $F(x)$ é a área à esquerda de x. Além disso, $F(x + h)$ é a área à esquerda de $x + h$. O quociente de diferença $[F(x+h) - F(x)]/h$ é, assim, aproximadamente igual a $f(x)$, a altura do retângulo mostrado aqui.

fundamental afirma que F será uma função derivável de x cuja derivada é a própria f. Em cada valor de x,

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Para entender melhor o que esse resultado representa, vamos examinar os argumentos geométricos por trás dele.

Se $f \geq 0$ em $[a, b]$, então, para calcular $F'(x)$, segundo a definição da derivada, temos de tomar o limite da razão incremental quando $h \to 0$.

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h}$$

Para $h > 0$, obtemos o numerador subtraindo duas áreas, logo ele é a área sob a curva de f de x até $x + h$ (Figura 5.20). Se h é pequeno, essa área é aproximadamente igual à área do retângulo de altura $f(x)$ e largura h, como se vê na Figura 5.20. Ou seja,

$$F(x + h) - F(x) \approx hf(x)$$

Dividindo os dois lados dessa aproximação por h e considerando $h \to 0$, é razoável esperar que

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Esse resultado, que vale mesmo que a função f não seja positiva, forma a primeira parte do teorema fundamental do cálculo.

Teorema 4 O teorema fundamental do cálculo, parte 1
Se f é contínua em $[a, b]$, então $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e sua derivada é $f(x)$.

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad (2)$$

Antes de provar o Teorema 4, examinaremos alguns exemplos para entender melhor o que ele diz.

EXEMPLO 3 Aplicando o teorema fundamental

Use o teorema fundamental para determinar

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x \cos t\,dt$ **(b)** $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1 + t^2}\,dt$

(c) $\dfrac{dy}{dx}$ se $y = \displaystyle\int_x^5 3t \operatorname{sen} t\,dt$ **(d)** $\dfrac{dy}{dx}$ se $y = \displaystyle\int_1^{x^2} \cos t\,dt$

(e) $\dfrac{dy}{dx}$ se $y = \displaystyle\int_{1+3x^2}^4 \frac{1}{2 + e^t}\,dt$

SOLUÇÃO

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x \cos t\,dt = \cos x$ Equação 2 com $f(t) = \cos t$

(b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{1+x^2}$ Equação 2 com $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

(c) A Regra 1 das integrais (Tabela 5.3, Seção 5.3) reorganiza essas funções para podermos usar o teorema fundamental.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_x^5 3t \operatorname{sen} t\,dt &= \frac{d}{dx}\left(-\int_5^x 3t \operatorname{sen} t\,dt\right) \quad \text{Regra 1}\\ &= -\frac{d}{dx}\int_5^x 3t \operatorname{sen} t\,dt\\ &= -3x \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

(d) O limite superior de integração não é x, mas x^2. Isso torna y um misto de duas funções:

$$y = \int_1^u \cos t\,dt \qquad \text{e} \qquad u = x^2$$

Portanto, devemos aplicar a regra da cadeia quando encontrarmos dy/dx.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \left(\frac{d}{du}\int_1^u \cos t\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \cos u\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \cos(x^2)\cdot 2x\\ &= 2x\cos x^2\end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{1+3x^2}^4 \frac{1}{2+e^t}\,dt &= \frac{d}{dx}\left(-\int_4^{1+3x^2}\frac{1}{2+e^t}\,dt\right) \quad \text{Regra 1}\\ &= -\frac{d}{dx}\int_4^{1+3x^2}\frac{1}{2+e^t}\,dt\\ &= -\frac{1}{2+e^{(1+3x^2)}}\frac{d}{dx}(1+3x^2) \quad \text{Equação (2) e regra da cadeia.}\\ &= -\frac{6x}{2+e^{(1+3x^2)}}\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Construindo uma função com derivada e valor determinados

Determine uma função $y = f(x)$ no domínio $(-\pi/2, \pi/2)$ com derivada

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x$$

que satisfaça a condição $f(3) = 5$.

SOLUÇÃO O teorema fundamental facilita a construção de uma função com derivada tg x que seja igual a 0 em $x = 3$:

$$y = \int_3^x \operatorname{tg} t\, dt$$

Como $y(3) = \int_3^3 \operatorname{tg} t\, dt = 0$, somente precisamos adicionar 5 a essa função para construir outra com a derivada tg x com valor 5 em $x = 3$:

$$f(x) = \int_3^x \operatorname{tg} t\, dt + 5$$

Embora a solução para o problema do Exemplo 4 satisfaça as duas condições requisitadas, você pode perguntar se ela está em uma forma útil. A resposta é sim, pois hoje temos computadores e calculadoras capazes de aproximar integrais. Na Seção 5.5, aprenderemos a escrever a solução do Exemplo 4 exatamente como

$$y = \ln\left|\frac{\cos 3}{\cos x}\right| + 5$$

Daremos agora uma prova do teorema fundamental para uma função contínua arbitrária.

PROVA DO TEOREMA 4 Provamos o teorema fundamental aplicando a definição de derivada diretamente à função $F(x)$, quando x e $x + h$ estão em (a, b). Isso significa escrever a razão incremental

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} \tag{3}$$

e mostrar que seu limite quando $h \to 0$ é o número $f(x)$ para cada x em (a, b). Logo:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt \qquad \text{Tabela 5.3, Regra 5} \end{aligned}$$

De acordo com o teorema do valor médio para integrais definidas, o valor antes do limite na última expressão é um dos valores assumidos por f no intervalo entre x e $x + h$. Isto é, para algum número c nesse intervalo,

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(c) \tag{4}$$

Quando $h \to 0$, $x + h$ aproxima-se de x, empurrando c também na direção de x (pois c fica entre x e $x + h$). Como f é contínua em x, $f(c)$ aproxima-se de $f(x)$:

$$\lim_{h \to 0} f(c) = f(x) \tag{5}$$

Em conclusão, temos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt \\ &= \lim_{h \to 0} f(c) && \text{Equação (4)} \\ &= f(x) && \text{Equação (5)} \end{aligned}$$

Se $x = a$ ou b, então o limite da Equação (3) é interpretado como um limite lateral com $h \to 0^+$ ou $h \to 0^-$, respectivamente. Assim, o Teorema 1 da Seção 3.1 demonstra que F é contínua para qualquer ponto de $[a, b]$. Isso encerra a demonstração.

Teorema fundamental, parte 2 (o teorema de cálculo)

Vamos agora à segunda parte do teorema fundamental do cálculo. Essa parte descreve como calcular integrais definidas sem ter de calcular limites de somas de Riemann. Em vez disso, encontramos e calculamos uma primitiva nos limites de integração superior e inferior.

Teorema 4 (continuação) **O teorema fundamental do cálculo, parte 2**
Se f é contínua em qualquer ponto de $[a, b]$ e se F é qualquer primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

PROVA A parte 1 do teorema fundamental nos diz que existe uma primitiva de f, isto é,

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Assim, se F for *qualquer* primitiva de f, então $F(x) = G(x) + C$ para alguma constante C, sendo $a < x < b$ (pelo Corolário 2 do teorema do valor médio para derivadas, Seção 4.2). Uma vez que tanto F quanto G são contínuas em $[a, b]$, vemos que $F(x) = G(x) + C$ também se aplica quando $x = a$ e $x = b$, considerando-se limites laterais (quando $x \to a^+$ e $x \to b^-$).

Calculando $F(b) - F(a)$, temos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^a f(t)\, dt \\ &= \int_a^b f(t)\, dt - 0 \\ &= \int_a^b f(t)\, dt \end{aligned}$$

O teorema diz que para calcular a integral definida de f em $[a, b]$, tudo o que precisamos fazer é:

1. Determinar uma primitiva F de f.
2. Calcular o número $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

A notação usual para $F(b) - F(a)$ é

$$F(x)\Big]_a^b \quad \text{ou} \quad [F(x)]_a^b,$$

dependendo de F ter um ou mais termos.

EXEMPLO 5 Calculando integrais

(a) $$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0 - 0 = 0$$

(b) $$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} x\Big]_0^{1/2} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2} - \operatorname{sen}^{-1} 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

(c) $$\int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right) dx = \left[x^{3/2} - 2\ln x\right]_1^4 = [4^{3/2} - 2\ln 4] - [1^{3/2} - 2\ln 1]$$
$$= [8 - \ln 16] - [1 - 0] = 7 - \ln 16$$

O processo usado no Exemplo 5 é muito mais fácil que um cálculo com soma de Riemann.

As conclusões do teorema fundamental nos dizem várias coisas. A Equação (2) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{dF}{dx} = f(x)$$

o que sugere que, se você primeiro integrar a função f e depois derivar o resultado, vai obter a função f de volta. De modo análogo, a equação

$$\int_a^x \frac{dF}{dt}\,dt = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

diz que, se você primeiro derivar a função F e depois integrar o resultado, vai obter a função F de volta (ajustada por uma constante de integração). De certa forma, os processos de integração e derivação são o "inverso" um do outro. O teorema fundamental também afirma que qualquer função contínua f tem uma primitiva F e que a equação diferencial $dy/dx = f(x)$ tem uma solução (especificamente, a função $y = F(x)$) para qualquer função contínua f.

Área total

A soma de Riemann contém termos do tipo $f(c_k)\,\Delta_k$ que fornecem a área de um retângulo quando $f(c_k)$ é positiva. Quando $f(c_k)$ é negativa, o produto $f(c_k)\,\Delta_k$ é a área do retângulo com sinal negativo. Quando somamos tais termos para uma função negativa, obtemos o oposto da área entre a curva e o eixo x. Se tamamos, então, o valor absoluto, obtemos a área positiva correta.

EXEMPLO 6 Determinando áreas com primitivas

Calcule a área delimitada pelo eixo x e pela parábola $y = 6 - x - x^2$.

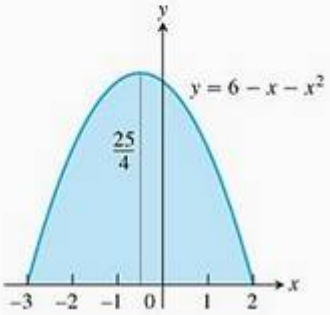


FIGURA 5.21 A área deste arco parabólico é calculada com uma integral definida (Exemplo 6).

SOLUÇÃO Para determinar onde a curva cruza o eixo x, estabelecemos

$$y = 0 = 6 - x - x^2 = (3 + x)(2 - x)$$

o que dá

$$x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

A curva é esboçada na Figura 5.21 e é não negativa em $[-3, 2]$.

A área é

$$\int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)\, dx = \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{2}$$
$$= \left(12 - 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(-18 - \frac{9}{2} + \frac{27}{3}\right) = 20\tfrac{5}{6}$$

A curva da Figura 5.21 é um arco de parábola, e é interessante notar que a área sob esse arco é exatamente igual a dois terços da base vezes a altura:

$$\frac{2}{3}(5)\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{125}{6} = 20\tfrac{5}{6}$$

Ao calcular a área da região delimitada pela curva de uma função $y = f(x)$ e o eixo x, é preciso cautela especial se a função assume valores positivos e negativos. Precisamos tomar o cuidado de dividir o intervalo $[a, b]$ em subintervalos nos quais a função não mude de sinal. Do contrário, podemos estar cancelando áreas positivas e negativas entre si, o que levará a um total incorreto. Obtemos a área total correta somando o valor absoluto da integral definida em cada subintervalo onde $f(x)$ não muda de sinal. O termo "área" será usado como sinônimo de *área total*.

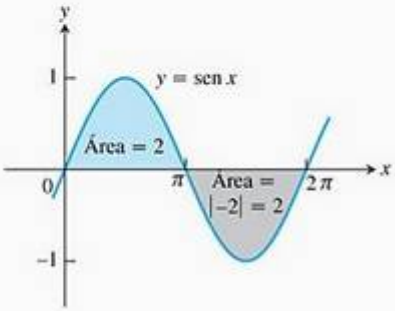


FIGURA 5.22 A área total entre $y = \text{sen}\, x$ e o eixo x para $0 \le x \le 2\pi$ é a soma dos valores absolutos de duas integrais (Exemplo 7).

EXEMPLO 7 Cancelando áreas

A Figura 5.22 mostra o gráfico da função $f(x) = \text{sen}\, x$ entre $x = 0$ e $x = 2\pi$. Calcule

(a) a integral definida de $f(x)$ em $[0, 2\pi]$.

(b) a área entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo x em $[0, 2\pi]$.

SOLUÇÃO A integral definida para $f(x) = \text{sen}\, x$ é dada por

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}\, x\, dx = -\cos x\Big]_0^{2\pi} = -[\cos 2\pi - \cos 0] = -[1 - 1] = 0$$

A integral definida é zero, pois as partes do gráfico acima e abaixo do eixo x se cancelam mutuamente.

Calculamos a área entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo de x em $[0, 2\pi]$ dividindo o domínio de sen x em duas partes: o intervalo $[0, \pi]$, ao longo do qual ela é não negativa, e $[\pi, 2\pi]$, ao longo do qual ela é não positiva.

$$\int_0^{\pi} \text{sen}\, x\, dx = -\cos x\Big]_0^{\pi} = -[\cos \pi - \cos 0] = -[-1 - 1] = 2$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}\, x\, dx = -\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi} = -[\cos 2\pi - \cos \pi] = -[1 - (-1)] = -2$$

A segunda integral fornece um valor negativo. Obtemos a área entre o gráfico e o eixo somando os valores absolutos.

$$\text{Área} = |2| + |-2| = 4$$

Resumo

Para determinar a área entre o gráfico de $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo $[a, b]$, faça o seguinte.

1. Subdivida $[a, b]$ nas raízes de f.
2. Integre f em cada subintervalo.
3. Some os valores absolutos das integrais.

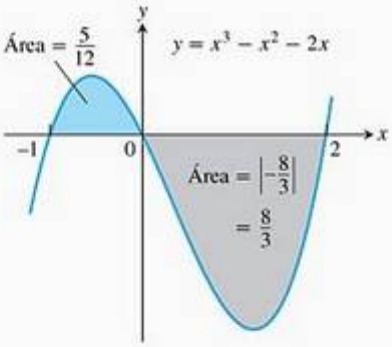


FIGURA 5.23 A região entre a curva $y = x^3 - x^2 - 2x$ e o eixo x (Exemplo 8).

EXEMPLO 8 Determinando áreas com primitivas

Determine a área da região entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, sendo $-1 \le x \le 2$.

SOLUÇÃO Primeiro determine as raízes de f. Como

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x + 1)(x - 2)$$

as raízes são $x = 0, -1$ e 2 (Figura 5.23). As raízes dividem $[-1, 2]$ em dois subintervalos: $[-1, 0]$, em que $f \ge 0$, e $[0, 2]$, em que $f \le 0$. Integramos f ao longo de cada subintervalo e somamos os valores absolutos das integrais calculadas.

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{5}{12}$$

$$\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} = \left[4 - \frac{8}{3} - 4\right] - 0 = -\frac{8}{3}$$

A área total incluída é obtida somando-se os valores absolutos das integrais calculadas.

$$\text{Área total incluída} = \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}$$

Exercícios 5.4

Calculando integrais

Calcule as integrais nos exercícios 1–32.

1. $\int_{-2}^{0} (2x + 5)\,dx$
2. $\int_{-3}^{4} \left(5 - \frac{x}{2}\right) dx$
3. $\int_{0}^{4} \left(3x - \frac{x^3}{4}\right) dx$
4. $\int_{-2}^{2} (x^3 - 2x + 3)\,dx$
5. $\int_{0}^{1} \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx$
6. $\int_{0}^{5} x^{3/2}\,dx$
7. $\int_{1}^{32} x^{-6/5}\,dx$
8. $\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^2}\,dx$
9. $\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$
10. $\int_{0}^{\pi} (1 + \cos x)\,dx$
11. $\int_{0}^{\pi/3} 2\sec^2 x\,dx$
12. $\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \operatorname{cosec}^2 x\,dx$
13. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{cosec}\theta \operatorname{cotg}\theta\,d\theta$
14. $\int_{0}^{\pi/3} 4\sec u \operatorname{tg} u\,du$
15. $\int_{\pi/2}^{0} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt$
16. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1 - \cos 2t}{2}\,dt$
17. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (8y^2 + \operatorname{sen} y)\,dy$
18. $\int_{-\pi/3}^{-\pi/4} \left(4\sec^2 t + \frac{\pi}{t^2}\right) dt$

19. $\int_{1}^{-1} (r+1)^2\, dr$

20. $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t+1)(t^2+4)\, dt$

21. $\int_{\sqrt{2}}^{1} \left(\frac{u^7}{2} - \frac{1}{u^5}\right) du$

22. $\int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{v^3} - \frac{1}{v^4}\right) dv$

23. $\int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{s^2 + \sqrt{s}}{s^2}\, ds$

24. $\int_{9}^{4} \frac{1 - \sqrt{u}}{\sqrt{u}}\, du$

25. $\int_{-4}^{4} |x|\, dx$

26. $\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos x + |\cos x|)\, dx$

27. $\int_{0}^{\ln 2} e^{3x}\, dx$

28. $\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{x} - e^{-x}\right) dx$

29. $\int_{0}^{1} \frac{4}{1+x^2}\, dx$

30. $\int_{2}^{5} \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2}}$

31. $\int_{2}^{4} x^{\pi - 1}\, dx$

32. $\int_{-1}^{0} \pi^{x-1}\, dx$

Nos exercícios 33 e 34, adivinhe uma primitiva do integrando. Verifique sua hipótese com derivação e, depois, calcule a integral definida dada. (*Dica*: ao adivinhar, tenha em mente a regra da cadeia. Você aprenderá como determinar primitivas desse tipo na próxima seção.)

33. $\int_{0}^{1} xe^{x^2}\, dx$

34. $\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x}\, dx$

Derivadas de integrais

Determine as derivadas nos exercícios 35–40

(a) calculando a integral e derivando o resultado.

(b) derivando a integral diretamente.

35. $\frac{d}{dx}\int_{0}^{\sqrt{x}} \cos t\, dt$

36. $\frac{d}{dx}\int_{1}^{\operatorname{sen} x} 3t^2\, dt$

37. $\frac{d}{dt}\int_{0}^{t^4} \sqrt{u}\, du$

38. $\frac{d}{d\theta}\int_{0}^{\operatorname{tg}\theta} \sec^2 y\, dy$

39. $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x^3} e^{-t}\, dt$

40. $\frac{d}{dt}\int_{0}^{\sqrt{t}} \left(x^4 + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$

Determine dy/dx nos exercícios 41–50.

41. $y = \int_{0}^{x} \sqrt{1+t^2}\, dt$

42. $y = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}\, dt, \quad x > 0$

43. $y = \int_{\sqrt{x}}^{0} \operatorname{sen}(t^2)\, dt$

44. $y = \int_{0}^{x^2} \cos\sqrt{t}\, dt$

45. $y = \int_{0}^{\operatorname{sen} x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$

46. $y = \int_{\operatorname{tg} x}^{0} \frac{dt}{1+t^2}$

47. $y = \int_{0}^{e^{x^2}} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$

48. $y = \int_{2^x}^{1} \sqrt[3]{t}\, dt$

49. $y = \int_{0}^{\operatorname{sen}^{-1} x} \cos t\, dt$

50. $y = \int_{-1}^{x^{1/\pi}} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt$

Área

Nos exercícios 51–56, determine a área total da região entre a curva e o eixo x.

51. $y = -x^2 - 2x, \quad -3 \le x \le 2$

52. $y = 3x^2 - 3, \quad -2 \le x \le 2$

53. $y = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad 0 \le x \le 2$

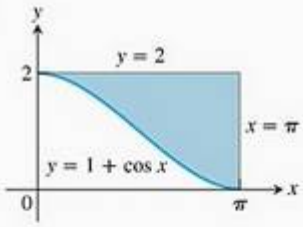
54. $y = x^3 - 4x, \quad -2 \le x \le 2$

55. $y = x^{1/3}, \quad -1 \le x \le 8$

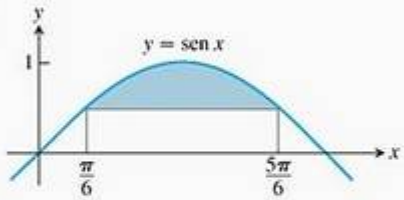
56. $y = x^{1/3} - x, \quad -1 \le x \le 8$

Determine as áreas das regiões sombreadas nos exercícios 57–60.

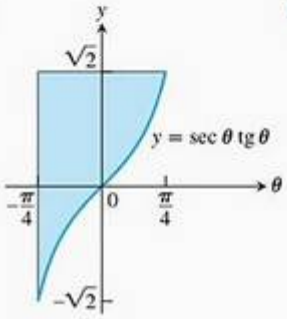
57.



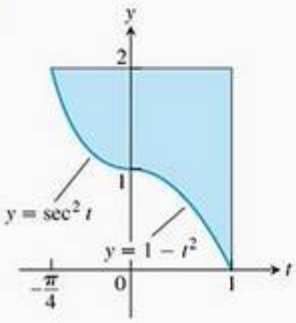
58.



59.



60.



Problemas de valor inicial

Cada uma das funções a seguir resolve um dos problemas de valor inicial dos exercícios 61–64. Qual função resolve qual problema? Justifique brevemente suas respostas.

(a) $y = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}\, dt - 3$

(b) $y = \int_{0}^{x} \sec t\, dt + 4$

(c) $y = \int_{-1}^{x} \sec t\, dt + 4$

(d) $y = \int_{\pi}^{x} \frac{1}{t}\, dt - 3$

61. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad y(\pi) = -3$

62. $y' = \sec x, \quad y(-1) = 4$

63. $y' = \sec x, \quad y(0) = 4$

64. $y' = \frac{1}{x}, \quad y(1) = -3$

Expresse em termos de integrais as soluções dos problemas de valor inicial nos exercícios 65–68.

65. $\frac{dy}{dx} = \sec x, \quad y(2) = 3$

66. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + x^2}, \quad y(1) = -2$

67. $\frac{ds}{dt} = f(t), \quad s(t_0) = s_0$

68. $\frac{dv}{dt} = g(t), \quad v(t_0) = v_0$

Aplicações

69. **Fórmula da área para parábolas de Arquimedes** Arquimedes (287-212 a.C.), inventor, engenheiro militar, médico e o maior matemático dos tempos clássicos no mundo ocidental, descobriu que a área sob um arco parabólico é dois terços da base vezes a altura. Esboce o arco parabólico $y = h - (4h/b^2)x^2$, sendo $-b/2 \le x \le b/2$, admitindo que h e b sejam positivos. Depois, use o cálculo para encontrar a área da região compreendida entre o arco e o eixo x.

70. **Receita a partir da receita marginal** Suponha que a receita marginal de uma empresa pela fabricação e venda de batedeiras seja

$$\frac{dr}{dx} = 2 - 2/(x + 1)^2$$

onde r é medido em milhares de dólares e x em milhares de unidades. Quanto dinheiro a companhia deve esperar de uma produção de $x = 3$ mil batedeiras? Para descobrir, integre o rendimento marginal de $x = 0$ a $x = 3$.

71. **Custo a partir do custo marginal** O custo marginal da impressão de um pôster quando x pôsteres são impressos é

$$\frac{dc}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

dólares. Determine $c(100) - c(1)$, o custo para imprimir os pôsteres 2–100.

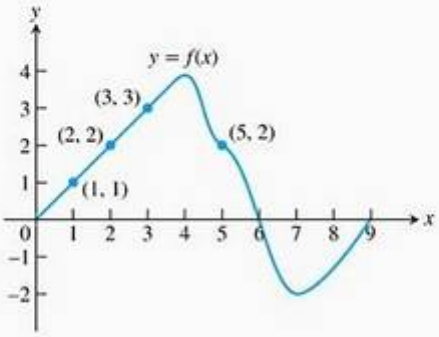
72. (*Continuação do Exercício 71.*) Determine $c(400) - c(100)$, o custo para imprimir os pôsteres 101–400.

Tirando conclusões sobre movimento a partir de gráficos

73. Suponha que f seja a função derivável mostrada no gráfico a seguir e que a posição no instante t (segundos) de uma partícula que se desloca ao longo do eixo das coordenadas seja

$$s = \int_0^t f(x)\,dx$$

metros. Use o gráfico para responder às perguntas a seguir. Justifique suas respostas.



(a) Qual é a velocidade da partícula no instante $t = 5$?

(b) A aceleração da partícula no instante $t = 5$ é positiva ou negativa?

(c) Qual é a posição da partícula no instante $t = 3$?

(d) Em que instante, durante os primeiros 9 s, s tem o maior valor?

(e) Aproximadamente quando a aceleração é zero?

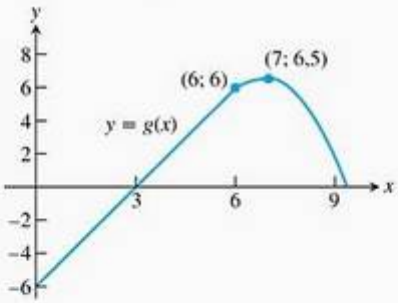
(f) Quando a partícula está se deslocando para a origem? E afastando-se da origem?

(g) De que lado da origem a partícula situa-se no instante $t = 9$?

74. Suponha que g seja a função derivável apresentada no gráfico a seguir e que a posição no instante t (segundos) de uma partícula deslocando-se ao longo de um eixo coordenado

$$s = \int_0^t g(x)\,dx$$

metros. Use o gráfico para responder às perguntas a seguir. Justifique suas respostas.



(a) Qual é a velocidade da partícula em $t = 3$?

(b) A aceleração no instante $t = 3$ é positiva ou negativa?

(c) Qual é a posição da partícula no instante $t = 3$?

(d) Quando a partícula passa pela origem?

(e) Quando a aceleração é zero?

(f) Quando a partícula está se afastando da origem? E aproximando-se da origem?

(g) De que lado da origem a partícula situa-se em $t = 9$?

Teoria e exemplos

75. Demonstre que, se k é uma constante positiva, a área entre o eixo de x e um arco da curva $y = \text{sen } kx$ é $2/k$.

76. Determine

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4 + 1}\, dt$$

77. Suponha que $\int_1^x f(t)\, dt = x^2 - 2x + 1$. Determine $f(x)$.

78. Determine $f(4)$ se $\int_0^x f(t)dt = x \cos \pi x$.

79. Determine a linearização de

$$f(x) = 2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1 + t}\, dt$$

em $x = 1$.

80. Determine a linearização de

$$g(x) = 3 + \int_1^{x^2} \sec(t - 1)\, dt$$

em $x = 1$.

81. Suponha que f tenha uma derivada positiva para todos os valores de x e que $f(1) = 0$. Qual das afirmações a seguir deve ser verdadeira para esta função?

$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

Justifique suas respostas.

(a) g é uma função derivável de x.

(b) g é uma função contínua de x.

(c) O gráfico de g tem uma tangente horizontal em $x = 1$.

(d) g tem um máximo local em $x = 1$.

(e) g tem um mínimo local em $x = 1$.

(f) O gráfico de g tem um ponto de inflexão em $x = 1$.

(g) O gráfico de dg/dx cruza o eixo x em $x = 1$.

82. Suponha que f tenha uma derivada negativa para todos os valores de x e que $f(1) = 0$. Qual das afirmações a seguir deve ser verdadeira para esta função?

$$h(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

Justifique suas respostas.

(a) h é uma função duplamente derivável de x.

(b) h e dh/dx são ambas contínuas.

(c) O gráfico de h tem uma tangente horizontal em $x = 1$.

(d) h tem um máximo local em $x = 1$.

(e) h tem um mínimo local em $x = 1$.

(f) O gráfico de h tem um ponto de inflexão em $x = 1$.

(g) O gráfico de dh/dx cruza o eixo x em $x = 1$.

83. **O teorema fundamental** Se f for contínua, esperamos que

T

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

seja igual a $f(x)$, como na demonstração da parte 1 do teorema fundamental. Por exemplo, se $f(t) = \cos t$, então

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \cos t\, dt = \frac{\text{sen}\,(x + h) - \text{sen}\, x}{h} \qquad (6)$$

O lado direito da Equação (6) é a razão incremental para a derivada do seno e esperamos que seu limite, quando $h \to 0$, seja $\cos x$.

Trace o gráfico de $\cos x$ para $-\pi \le x \le 2\pi$. Depois, se possível, use uma cor diferente e trace o gráfico do lado direito da Equação (6) em função de x para $h = 2$; 1; 0,5 e 0,1. Veja como as últimas curvas convergem para o gráfico de cosseno quando $h \to 0$.

84. Repita o Exercício 83 para $f(t) = 3t^2$. O que é

T

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} 3t^2\, dt = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}?$$

Trace o gráfico de $f(x) = 3x^2$ para $-1 \le x \le 1$. Então trace o gráfico do quociente $((x + h)^3 - x^3)/h$ em função de x para $h = 1$; 0,5; 0,2 e 0,1. Veja como as últimas curvas convergem para o gráfico de $3x^2$ quando $h \to 0$.

USANDO O COMPUTADOR

Nos exercícios 85–88, seja $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ para a função especificada f e o intervalo $[a, b]$. Use um SAC para executar os passos a seguir e responda às questões propostas.

(a) Faça um gráfico das funções f e F juntas ao longo de $[a, b]$.

(b) Resolva a equação $F'(x) = 0$. O que se pode afirmar sobre os gráficos de f e F nos pontos onde $F'(x) = 0$? Sua observação está baseada na parte 1 do teorema fundamental e também nas informações fornecidas pela derivada? Explique sua resposta.

(c) Ao longo de quais intervalos (aproximadamente) a função F é decrescente e crescente? O que se pode afirmar sobre f ao longo desses intervalos?

(d) Calcule a derivada f' e faça seu gráfico junto com o de F. O que se pode afirmar sobre o gráfico de F nos pontos

onde $f'(x) = 0$? Sua observação está baseada na parte 1 do teorema fundamental? Explique sua resposta.

85. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad [0, 4]$

86. $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 46x^2 - 43x + 12, \quad \left[0, \frac{9}{2}\right]$

87. $f(x) = \text{sen } 2x \cos \frac{x}{3}, \quad [0, 2\pi]$

88. $f(x) = x \cos \pi x, \quad [0, 2\pi]$

Nos exercícios 89–92, seja $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\, dt$ para a, u, f especificados. Use um SAC para executar os passos a seguir e responder às questões propostas.

(a) Determine o domínio de F.

(b) Calcule $F'(x)$ e determine suas raízes. Ao longo de que intervalos F é crescente? E decrescente?

(c) Calcule $F''(x)$ e determine sua raiz. Identifique os extremos locais e os pontos de inflexão de F.

(d) Usando a informação dos itens (a) a (c), esboce $y = F(x)$ ao longo de seu domínio. Depois trace o gráfico de $F(x)$ em seu SAC para apoiar seu esboço.

89. $a = 1, \quad u(x) = x^2, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

90. $a = 0, \quad u(x) = x^2, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

91. $a = 0, \quad u(x) = 1 - x, \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

92. $a = 0, \quad u(x) = 1 - x^2, \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

Nos exercícios 93 e 94, pressuponha que f seja contínua e $u(x)$ seja duplamente derivável.

93. Calcule $\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)\, dt$ e verifique sua resposta usando um SAC.

94. Calcule $\frac{d^2}{dx^2}\int_a^{u(x)} f(t)\, dt$ e verifique sua resposta usando um SAC.

5.5 Integrais indefinidas e a regra da substituição

Uma integral definida é um número que definimos encontrando o limite das somas de Riemann associadas a partições de um intervalo fechado finito cujas normas tendam a zero. Segundo o teorema fundamental do cálculo, poderemos calcular facilmente uma integral definida de uma função contínua se encontrarmos uma primitiva dessa função. Em geral, é mais difícil encontrar primitivas do que derivadas. No entanto, vale a pena aprender técnicas para calculá-las.

Relembre que, na Seção 4.8, vimos que o conjunto de *todas* as primitivas da função f é denominado **integral indefinida** de f em relação a x e simbolizado por

$$\int f(x)\, dx$$

A relação entre primitivas e a integral definida estabelecida no teorema fundamental agora explica essa notação. Quando estiver buscando a integral indefinida de uma função f, lembre-se de que ela sempre inclui uma constante arbitrária C.

Precisamos fazer uma distinção cuidadosa entre integrais definidas e indefinidas. Uma integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ é um *número*. Uma integral indefinida $\int f(x)\, dx$ é uma *função* mais uma constante arbitrária C.

Até agora, só aprendemos como encontrar primitivas de funções que fossem claramente reconhecíveis como derivadas. Nesta seção, começaremos a desenvolver técnicas mais gerais para encontrar primitivas. As primeiras técnicas de integração que apresentaremos são obtidas invertendo-se as regras usadas para encontrar derivadas, tais como a regra da potenciação e a regra da cadeia.

A regra da potenciação na forma integral

Quando u é uma função derivável de x e n é um número racional diferente de -1, a regra da cadeia nos diz que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n \frac{du}{dx}$$

Essa mesma equação, de outro ponto de vista, diz que $u^{n+1}/(n+1)$ é uma das primitivas da função $u^n(du/dx)$. Portanto,

$$\int \left(u^n \frac{du}{dx}\right) dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

A integral no lado esquerdo dessa equação geralmente é escrita na forma "diferencial" mais simples,

$$\int u^n \, du$$

obtida tratando-se os dx como diferenciais que se cancelam. Temos, então, a seguinte regra:

Se u é uma função derivável qualquer, então

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1, n \text{ qualquer número}). \qquad (1)$$

Para derivar a Equação (1), supusemos que u era uma função derivável da variável x, mas o nome da variável não importa e, portanto, não aparece na fórmula final. Poderíamos ter representado a variável com θ, t, y ou qualquer outra letra. A Equação (1) diz que se pudermos calcular uma integral na forma

$$\int u^n \, du \qquad (n \neq -1)$$

sendo u uma função derivável e du sua diferencial, poderemos calcular a integral como $[u^{n+1}/(n+1)] + C$.

EXEMPLO 1 Usando a regra da potenciação

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+y^2} \cdot 2y \, dy &= \int \sqrt{u} \cdot \left(\frac{du}{dy}\right) dy && \text{Seja } u = 1 + y^2,\ du/dy = 2y \\
&= \int u^{1/2} \, du \\
&= \frac{u^{(1/2)+1}}{(1/2)+1} + C && \text{Integre, usando a Equação (1) com } n = 1/2 \\
&= \frac{2}{3} u^{3/2} + C && \text{Forma simplificada.} \\
&= \frac{2}{3}(1+y^2)^{3/2} + C && \text{Troque } u \text{ por } 1 + y^2
\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Ajustando o integrando com uma constante

$$\int \sqrt{4t-1}\,dt = \int \frac{1}{4}\cdot\sqrt{4t-1}\cdot 4\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \sqrt{u}\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)dt \qquad \text{Seja } u = 4t-1,\ du/dt = 4$$

$$= \frac{1}{4}\int u^{1/2}\,du \qquad \text{Com o 1/4 à frente, a integral está agora na forma-padrão.}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C \qquad \text{Integre, usando a Equação (1) com } n = 1/2$$

$$= \frac{1}{6}u^{3/2} + C \qquad \text{Forma simplificada.}$$

$$= \frac{1}{6}(4t-1)^{3/2} + C \qquad \text{Troque } u \text{ por } 4t-1$$

Substituição: usando a regra da cadeia inversamente

As substituições nos exemplos 1 e 2 são casos particulares da regra a seguir.

Teorema 5 **A regra da substituição**
Se $u = g(x)$ é uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f é contínua em I, então

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

PROVA A regra é verdadeira porque, segundo a regra da cadeia, $F(g(x))$ será uma primitiva de $f(g(x))\cdot g'(x)$ sempre que F for uma primitiva de f:

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\cdot g'(x) \qquad \text{Regra da cadeia.}$$

$$= f(g(x))\cdot g'(x). \qquad \text{Pois } F' = f$$

Se fizermos a substituição u = $g(x)$, então

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}F(g(x))\,dx$$

$$= F(g(x)) + C \qquad \text{Teorema fundamental.}$$

$$= F(u) + C \qquad u = g(x)$$

$$= \int F'(u)\,du \qquad \text{Teorema fundamental.}$$

$$= \int f(u)\,du \qquad F' = f$$

A regra da substituição fornece o seguinte método para calcular a integral

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

quando f e g' são funções contínuas:

1. Substitua $u = g(x)$ e $du = g'(x)\,dx$ para obter a integral
$$\int f(u)\,du$$
2. Integre em relação a u.
3. Troque u por $g(x)$ no resultado.

EXEMPLO 3 Usando substituição

$$\int \cos(7\theta + 5)\, d\theta = \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\, du$$ Seja $u = 7\theta + 5$, $du = 7\, d\theta$, $(1/7)\, du = d\theta$

$$= \frac{1}{7}\int \cos u\, du$$ Com o (1/7) à frente, a integral está agora na forma-padrão.

$$= \frac{1}{7}\operatorname{sen} u + C$$ Integre em relação a u (Tabela 4.2).

$$= \frac{1}{7}\operatorname{sen}(7\theta + 5) + C$$ Troque u por $7\theta + 5$

Podemos comprovar essa solução derivando e verificando se, assim, obtemos a função $\cos(7\theta + 5)$.

EXEMPLO 4 Usando substituição

$$\int x^2 e^{x^3}\, dx = \int e^{x^3} \cdot x^2\, dx$$

$$= \int e^u \cdot \frac{1}{3}\, du$$ Seja $u = x^3$, $du = 3x^2\, dx$, $(1/3)\, du = x^2\, dx$

$$= \frac{1}{3}\int e^u\, du$$

$$= \frac{1}{3}e^u + C$$ Integre em relação a u.

$$= \frac{1}{3}e^{x^3} + C$$ Troque u por x^3.

EXEMPLO 5 Multiplicando por uma forma de 1

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x\, dx}{e^{2x} + 1}$$ Multiplique por $(e^x/e^x) = 1$

$$= \int \frac{du}{u^2 + 1}$$ Seja $u = e^x$, $u^2 = e^{2x}$, $du = e^x\, dx$

$$= \operatorname{tg}^{-1} u + C$$ Integre em relação a u.

$$= \operatorname{tg}^{-1}(e^x) + C$$ Troque u por e^x.

EXEMPLO 6 Simplificando o integrando

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\, dx = \int \frac{2\ln x}{x}\, dx$$ Regra da potenciação para logaritmos.

$$= \int 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \int 2u\, du$$ Seja $u = \ln x$, $du = (1/x)\, dx$

$$= u^2 + C$$ Integre em relação a u.

$$= (\ln x)^2 + C$$ Troque u por $\ln x$.

EXEMPLO 7 Usando identidades e substituição

$$\int \frac{1}{\cos^2 2x}\,dx = \int \sec^2 2x\,dx \qquad \frac{1}{\cos 2x} = \sec 2x$$

$$= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{2}\,du \qquad u = 2x,\ du = 2\,dx,\ dx = (1/2)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tg} u + C \qquad \frac{d}{du}\operatorname{tg} u = \sec^2 u$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x + C \qquad u = 2x$$

O sucesso do método de substituição depende de que seja encontrada uma substituição que transforme uma integral que não podemos calcular diretamente em outra que podemos. Se a primeira substituição falha, podemos tentar simplificar o integrando adiante com mais uma ou duas substituições (veja os exercícios 55 e 56.) Outra possibilidade é começar de novo. Pode haver mais de um bom caminho para começar, como no próximo exemplo.

EXEMPLO 8 Usando substituições diferentes

Calcule

$$\int \frac{18\operatorname{tg}^2 x \sec^2 x}{(2+\operatorname{tg}^3 x)^2}\,dx$$

SOLUÇÃO Podemos usar o método da substituição na integração como ferramenta de investigação: substitua a parte mais problemática do integrando e veja o que acontece. Para essa integral, poderíamos experimentar $u = z^2 + 1$ ou ainda arriscar e considerar u a raiz cúbica inteira. Veja o que acontece em cada caso.

1. Substitua $u = z^2 + 1$.

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} = \int \frac{du}{u^{1/3}} \qquad \text{Seja } u = z^2 + 1,\ du = 2z\,dz$$

$$= \int u^{-1/3}\,du \qquad \text{Na forma } \int u^n\,du$$

$$= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C \qquad \text{Integre em relação a } u.$$

$$= \frac{3}{2}u^{2/3} + C$$

$$= \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C \qquad \text{Troque } u \text{ por } z^2 + 1$$

2. Agora, substitua $u = \sqrt[3]{z^2+1}$.

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} = \int \frac{3u^2\,du}{u}$$ Seja $u = \sqrt[3]{z^2+1}$, $u^3 = z^2+1$, $3u^2\,du = 2z\,dz$

$$= 3\int u\,du$$

$$= 3\cdot\frac{u^2}{2} + C$$ Integre em relação a u.

$$= \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C$$ Troque u por $(z^2+1)^{1/3}$

As integrais de $\text{sen}^2\,x$ e de $\cos^2 x$

Às vezes, podemos usar identidades trigonométricas para transformar integrais que não sabemos como calcular em integrais que sabemos calcular pela regra da substituição. A seguir, temos um exemplo que fornece as fórmulas das integrais de $\text{sen}^2\,x$ e de $\cos^2 x$, freqüentemente encontradas em aplicações práticas.

EXEMPLO 9

(a) $$\int \text{sen}^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$ $\text{sen}^2\,x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\text{sen}\,2x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\,2x}{4} + C$$

(b) $$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$ $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\text{sen}\,2x}{4} + C$$ Como no item (a), mas com uma mudança de sinal.

EXEMPLO 10 Área sob a curva $y = \text{sen}^2\,x$

A Figura 5.24 mostra o gráfico de $g(x) = \text{sen}^2\,x$ ao longo do intervalo $[0, 2\pi]$. Determine

(a) a integral definida de $g(x)$ em $[0, 2\pi]$.

(b) a área entre o gráfico da função e o eixo x em $[0, 2\pi]$.

SOLUÇÃO

(a) De acordo com o Exemplo 7(a), a integral definida é

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2\,x\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\,2x}{4}\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{2\pi}{2} - \frac{\text{sen}\,4\pi}{4}\right] - \left[\frac{0}{2} - \frac{\text{sen}\,0}{4}\right]$$

$$= [\pi - 0] - [0 - 0] = \pi.$$

(b) A função $\text{sen}^2\,x$ é não negativa, portanto a área é igual à integral definida, ou π.

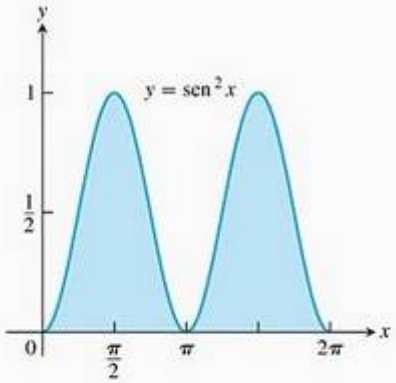


FIGURA 5.24 A área sob a curva $y = \text{sen}^2\,x$ ao longo de $[0, 2\pi]$ é igual a π unidades quadradas (Exemplo 10).

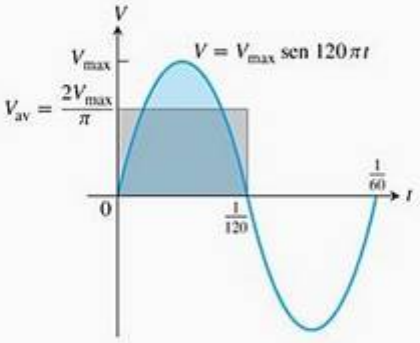


FIGURA 5.25 O gráfico da voltagem $V = V_{max}$ sen $120\pi t$ ao longo de um ciclo inteiro. O valor médio ao longo de meio ciclo é $2V_{max}/\pi$. Seu valor médio ao longo de um ciclo inteiro é zero (Exemplo 11).

EXEMPLO 11 Eletricidade doméstica

Podemos modelar a voltagem das instalações elétricas domésticas com a função seno

$$V = V_{max} \text{ sen } 120\pi t$$

que expressa a voltagem V (em volts) em função do tempo t (em segundos). A função realiza 60 ciclos a cada segundo (sua freqüência é 60 hertz, ou 60 Hz). A constante positiva V_{max} é a **voltagem do pico**.

O valor médio de V ao longo de meio ciclo, de 0 a 1/120 segundos (veja a Figura 5.25), é

$$\begin{aligned} V_M &= \frac{1}{(1/120) - 0}\int_0^{1/120} V_{max} \text{ sen } 120\pi t\, dt \\ &= 120V_{max}\left[-\frac{1}{120\pi}\cos 120\pi t\right]_0^{1/120} \\ &= \frac{V_{max}}{\pi}[-\cos\pi + \cos 0] \\ &= \frac{2V_{max}}{\pi} \end{aligned}$$

Como podemos ver na Figura 5.25, o valor médio da voltagem ao longo de um ciclo inteiro é zero. (Veja também o Exercício 69.) Se medirmos a voltagem com um galvanômetro-padrão, de bobina móvel, o medidor deverá indicar zero.

Para medir a voltagem efetivamente, usamos um instrumento que mede a raiz quadrada do valor médio do quadrado da voltagem, isto é

$$V_{rms} = \sqrt{(V^2)_M}$$

O subscrito "rms" quer dizer "root mean square' (raiz da média quadrática). Como o valor médio de $V^2 = (V_{max})^2 \text{ sen}^2\, 120\pi t$ ao longo de um ciclo é

$$(V^2)_M = \frac{1}{(1/60) - 0}\int_0^{1/60} (V_{max})^2 \text{ sen}^2\, 120\pi t\, dt = \frac{(V_{max})^2}{2}$$

(Exercício 69, item (c)), a voltagem rms é

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{(V_{max})^2}{2}} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$

Os valores dados para correntes e voltagens domésticas são sempre valores rms. Assim, "115 volts ac" significa que a voltagem rms é 115. O pico de voltagem

$$V_{max} = \sqrt{2}\, V_{rms} = \sqrt{2}\cdot 115 \approx 163 \text{ volts}$$

obtido da última equação, é consideravelmente maior.

Exercícios 5.5

Calculando integrais

Calcule as integrais indefinidas nos exercícios 1–12 usando as substituições dadas para reduzir as integrais à forma-padrão.

1. $\int \operatorname{sen} 3x\, dx, \quad u = 3x$
2. $\int x \operatorname{sen}(2x^2)\, dx, \quad u = 2x^2$
3. $\int \sec 2t \operatorname{tg} 2t\, dt, \quad u = 2t$
4. $\int \left(1 - \cos\frac{t}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\frac{t}{2}\, dt, \quad u = 1 - \cos\frac{t}{2}$
5. $\int 28(7x - 2)^{-5}\, dx, \quad u = 7x - 2$
6. $\int x^3(x^4 - 1)^2\, dx, \quad u = x^4 - 1$
7. $\int \frac{9r^2\, dr}{\sqrt{1 - r^3}}, \quad u = 1 - r^3$
8. $\int 12(y^4 + 4y^2 + 1)^2(y^3 + 2y)\, dy, \quad u = y^4 + 4y^2 + 1$
9. $\int \sqrt{x} \operatorname{sen}^2(x^{3/2} - 1)\, dx, \quad u = x^{3/2} - 1$
10. $\int \frac{1}{x^2}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad u = -\frac{1}{x}$
11. $\int \operatorname{cosec}^2 2\theta \operatorname{cotg} 2\theta\, d\theta$
    (a) Usando $u = \operatorname{cotg} 2\theta$ (b) Usando $u = \operatorname{cosec} 2\theta$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x + 8}}$
    (a) Usando $u = 5x + 8$ (b) Usando $u = \sqrt{5x + 8}$

Calcule as integrais nos exercícios 13–54.

13. $\int \sqrt{3 - 2s}\, ds$
14. $\int (2x + 1)^3\, dx$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{5s + 4}}\, ds$
16. $\int \frac{3\, dx}{(2 - x)^2}$
17. $\int \theta\sqrt[4]{1 - \theta^2}\, d\theta$
18. $\int \frac{4y\, dy}{\sqrt{2y^2 + 1}}$
19. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}\, dx$
20. $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\, dx$
21. $\int \cos(3z + 4)\, dz$
22. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\, dx$
23. $\int \operatorname{tg} x\, dx$
24. $\int \operatorname{tg}^7 \frac{x}{2} \sec^2 \frac{x}{2}\, dx$
25. $\int r^2\left(\frac{r^3}{18} - 1\right)^5 dr$
26. $\int r^4\left(7 - \frac{r^5}{10}\right)^3 dr$
27. $\int x^{1/2} \operatorname{sen}(x^{3/2} + 1)\, dx$
28. $\int x^{1/3} \operatorname{sen}(x^{4/3} - 8)\, dx$
29. $\int \frac{\operatorname{sen}(2t + 1)}{\cos^2(2t + 1)}\, dt$
30. $\int \frac{6\cos t}{(2 + \operatorname{sen} t)^3}\, dt$
31. $\int \frac{1}{\theta^2} \operatorname{sen}\frac{1}{\theta} \cos\frac{1}{\theta}\, d\theta$
32. $\int \frac{\sec z \operatorname{tg} z}{\sqrt{\sec z}}\, dz$
33. $\int \frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t} - 1\right) dt$
34. $\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\operatorname{sen}^2\sqrt{\theta}}\, d\theta$
35. $\int (s^3 + 2s^2 - 5s + 5)(3s^2 + 4s - 5)\, ds$
36. $\int t^3(1 + t^4)^3\, dt$
37. $\int \sqrt{\frac{x - 1}{x^5}}\, dx$
38. $\int x^3\sqrt{x^2 + 1}\, dx$
39. $\int (\cos x)\, e^{\operatorname{sen} x}\, dx$
40. $\int (\operatorname{sen} 2\theta)\, e^{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$
41. $\int \frac{1}{\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}} \sec^2(e^{\sqrt{x}} + 1)\, dx$
42. $\int \frac{1}{x^2} e^{1/x} \sec(1 + e^{1/x}) \operatorname{tg}(1 + e^{1/x})\, dx$
43. $\int \frac{dx}{x \ln x}$
44. $\int \frac{\ln\sqrt{t}}{t}\, dt$
45. $\int \frac{dz}{1 + e^z}$
46. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 - 1}}$
47. $\int \frac{5}{9 + 4r^2}\, dr$
48. $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2\theta} - 1}}\, d\theta$
49. $\int \frac{e^{\operatorname{sen}^{-1} x}\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
50. $\int \frac{e^{\cos^{-1} x}\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
51. $\int \frac{(\operatorname{sen}^{-1} x)^2\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
52. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^{-1} x}\, dx}{1 + x^2}$
53. $\int \frac{dy}{(\operatorname{tg}^{-1} y)(1 + y^2)}$
54. $\int \frac{dy}{(\operatorname{sen}^{-1} y)\sqrt{1 - y^2}}$

Simplificando integrais gradativamente

Se você não souber qual substituição deve fazer, tente reduzir a integral passo a passo, usando uma primeira substituição para simplificar um pouco a integral e depois outra para simplificar um pouco mais. Você verá o que queremos dizer experimentando as seqüências de substituições nos exercícios 55 e 56.

55. $\int \frac{18 \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x}{(2 + \operatorname{tg}^3 x)^2}\, dx$
    (a) $u = \operatorname{tg} x$ seguida por $v = u^3$ e depois por $w = 2 + v$
    (b) $u = \operatorname{tg}^3 x$ seguida por $v = 2 + u$
    (c) $u = 2 + \operatorname{tg}^3 x$
56. $\int \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(x - 1)} \operatorname{sen}(x - 1) \cos(x - 1)\, dx$
    (a) $u = x - 1$, seguida por $v = \operatorname{sen} u$ e depois por $w = 1 + v^2$
    (b) $u = \operatorname{sen}(x - 1)$, seguida por $v = 1 + u^2$

(c) $u = 1 + \text{sen}^2(x - 1)$

Calcule as integrais nos exercícios 57 e 58.

57. $\displaystyle\int \frac{(2r - 1)\cos\sqrt{3(2r - 1)^2 + 6}}{\sqrt{3(2r - 1)^2 + 6}}\,dr$

58. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta\cos^3\sqrt{\theta}}}\,d\theta$

Problemas de valor inicial

Resolva os problemas de valor inicial nos exercícios 59–64.

59. $\dfrac{ds}{dt} = 12t(3t^2 - 1)^3, \quad s(1) = 3$

60. $\dfrac{dy}{dx} = 4x(x^2 + 8)^{-1/3}, \quad y(0) = 0$

61. $\dfrac{ds}{dt} = 8\,\text{sen}^2\left(t + \dfrac{\pi}{12}\right), \quad s(0) = 8$

62. $\dfrac{dr}{d\theta} = 3\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right), \quad r(0) = \dfrac{\pi}{8}$

63. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -4\,\text{sen}\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right), \quad s'(0) = 100, \quad s(0) = 0$

64. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4\sec^2 2x\,\text{tg}\,2x, \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = -1$

65. A velocidade de uma partícula em movimento de um lado para outro em uma reta é $v = ds/dt = 6\,\text{sen}\,2t$ m/s para qualquer t. Se $s = 0$ quando $t = 0$, determine o valor de s quando $t = \pi/2$ s.

66. A aceleração de uma partícula em movimento de um lado para outro em uma reta é $a = d^2s/dt^2 = \pi^2\cos\pi t$ m/s^2 para qualquer t. Se $s = 0$ e $v = 8$ m/s quando $t = 0$, determine s quando $t = 1$ s.

Teoria e exemplos

67. Parece que podemos integrar $2\,\text{sen}\,x\cos x$ em relação a x de três maneiras diferentes:

(a) $\displaystyle\int 2\,\text{sen}\,x\cos x\,dx = \int 2u\,du \qquad u = \text{sen}\,x,$
$\displaystyle = u^2 + C_1 = \text{sen}^2 x + C_1$

(b) $\displaystyle\int 2\,\text{sen}\,x\cos x\,dx = \int -2u\,du \qquad u = \cos x,$
$\displaystyle = -u^2 + C_2 = -\cos^2 x + C_2$

(c) $\displaystyle\int 2\,\text{sen}\,x\cos x\,dx = \int \text{sen}\,2x\,dx \qquad 2\,\text{sen}\,x\cos x = \text{sen}\,2x$
$\displaystyle = -\frac{\cos 2x}{2} + C_3$

Poderiam as três integrações estar corretas? Justifique sua resposta.

68. A substituição $u = \text{tg}\,x$ resulta em

$$\int \sec^2 x\,\text{tg}\,x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\text{tg}^2 x}{2} + C$$

A substituição $u = \sec x$ resulta em

$$\int \sec^2 x\,\text{tg}\,x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sec^2 x}{2} + C$$

Poderiam ambas as integrações estar corretas? Justifique sua resposta.

69. (*Continuação do Exemplo 11.*)

(a) Mostre, calculando a integral na expressão

$$\frac{1}{(1/60) - 0}\int_0^{1/60} V_{\max}\,\text{sen}\,120\,\pi t\,dt$$

que o valor médio de $V = V_{\max}\,\text{sen}\,120\pi t$ ao longo de um ciclo inteiro é zero.

(b) O circuito que faz seu forno elétrico funcionar é padronizado para 240 volts rms. Qual é o valor do pico de voltagem permissível?

(c) Mostre que

$$\int_0^{1/60} (V_{\max})^2\,\text{sen}^2\,120\,\pi t\,dt = \frac{(V_{\max})^2}{120}$$

5.6 Substituição e área entre curvas

Existem dois métodos para calcular uma integral definida por substituição. O primeiro é encontrar por substituição uma primitiva e, depois, calcular a integral definida usando o teorema fundamental. Utilizamos esse método nos exemplos 10 e 11 da seção anterior. O segundo método é ampliar o processo de substituição e aplicá-lo diretamente a integrais *definidas*. Nesta seção, usaremos essa nova fórmula para resolver o problema de calcular a área entre duas curvas.

Fórmula de substituição

Na fórmula a seguir, os limites de integração mudam quando a variável de integração é mudada por substituição.

Teorema 6 Substituição em integrais definidas
Se g' é contínua no intervalo $[a, b]$ e f é contínua na imagem de g, então

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

PROVA Façamos com que F denote qualquer primitiva de f. Então

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx &= F(g(x))\Big]_{x=a}^{x=b} && \frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) \\
&= F(g(b)) - F(g(a)) \\
&= F(u)\Big]_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\
&= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du && \text{Teorema fundamental, parte 2}
\end{aligned}$$

Para usar a fórmula, faça a mesma substituição $u = g(x)$ e $du = g'(x)\, dx$ que você usaria para calcular a integral indefinida correspondente. Depois integre a integral transformada em relação a u desde o valor $g(a)$ (aquele que u tem em $x = a$) até o valor $g(b)$ (aquele que u tem em $x = b$).

EXEMPLO 1 Substituindo pelos dois métodos

Calcule $\int_{-1}^{1} 3x^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx$

SOLUÇÃO Temos duas opções.

1. Transforme a integral e calcule a integral transformada com os limites transformados dados no Teorema 6.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} 3x^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx &&& \text{Faça } u = x^3 + 1,\ du = 3x^2\, dx \\
&&& \text{Quando } x = -1,\ u = (-1)^3 + 1 = 0 \\
&&& \text{Quando } x = 1,\ u = (1)^3 + 1 = 2 \\
= \int_0^2 \sqrt{u}\, du \\
= \frac{2}{3} u^{3/2}\Big]_0^2 && \text{Calcule a nova integral definida.} \\
= \frac{2}{3}\left[2^{3/2} - 0^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

2. Transforme a integral em uma integral indefinida, integre, mude novamente para x e use os limites originais de x.

$$\begin{aligned}
\int 3x^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx &= \int \sqrt{u}\, du && \text{Faça } u = x^3 + 1,\ du = 3x^2\, dx \\
&= \frac{2}{3} u^{3/2} + C && \text{Integre em relação a } u. \\
&= \frac{2}{3} (x^3 + 1)^{3/2} + C && \text{Troque } u \text{ por } x^3 + 1
\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}\Big]_{-1}^{1}$$

Use a integral recém-encontrada com limites de integração para x.

$$= \frac{2}{3}\left[((1)^3+1)^{3/2} - ((-1)^3+1)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[2^{3/2} - 0^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Qual método é melhor: calcular a integral transformada com limites transformados usando o Teorema 6, ou transformar a integral, integrar e transformar novamente para os limites originais de integração? No Exemplo 1, o primeiro método parece mais fácil, mas nem sempre é assim. Como regra, é bom conhecer os dois métodos e usar aquele que parecer melhor em cada caso.

EXEMPLO 2 Usando a fórmula de substituição

(a) $$\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx = \int_0^{\ln 8} e^u \cdot \frac{1}{3}\,du$$

$u = 3x$, $\frac{1}{3}du = dx$, $u(0) = 0$, $u(\ln 2) = 3\ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\ln 8} e^u\,du$$

$$= \frac{1}{3}e^u\Big]_0^{\ln 8}$$

$$= \frac{1}{3}[8-1] = \frac{7}{3}$$

(b) $$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$$

$u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$

$$= \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u}$$

Quando $x = -\pi/4$, $u = \sqrt{2}/2$

Quando $x = \pi/4$, $u = \sqrt{2}/2$

$$= -\ln|u|\Big]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} = 0$$

Integre, intervalo de largura zero.

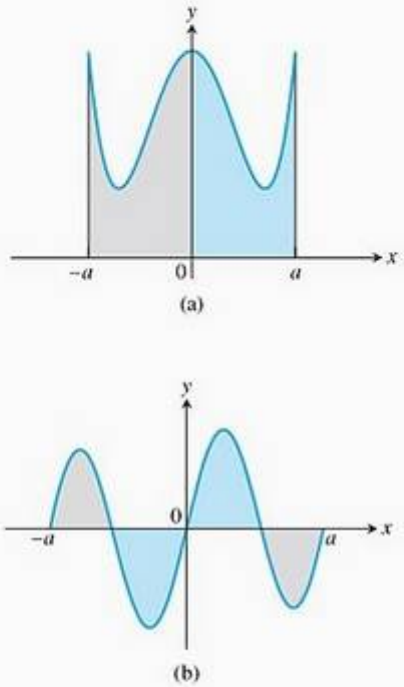


FIGURA 5.26 (a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ (b) f ímpar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Integrais definidas de funções simétricas

A fórmula da substituição do Teorema 6 simplifica o cálculo de integrais definidas de funções pares e ímpares (Seção 1.2) em um intervalo simétrico $[-a, a]$ (Figura 5.26).

Teorema 7
Seja f contínua no intervalo simétrico $[-a, a]$.

(a) Se f é par, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

(b) Se f é ímpar, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

PROVA DA PARTE (A)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

Regra da aditividade para integrais definidas.

$$= -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \qquad \text{Regra da ordem de integração.}$$

$$= -\int_0^a f(-u)(-du) + \int_0^a f(x)\,dx \qquad \begin{array}{l}\text{Seja } u = -x,\ du = -dx\\ \text{Quando } x = 0,\ u = 0\\ \text{Quando } x = -a,\ u = a\end{array}$$

$$= \int_0^a f(-u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx \qquad \begin{array}{l}f \text{ é par, logo}\\ f(-u) = f(u)\end{array}$$

$$= 2\int_0^a f(x)\,dx$$

A prova da parte (b) é totalmente análoga, e você terá de apresentá-la no Exercício 114.

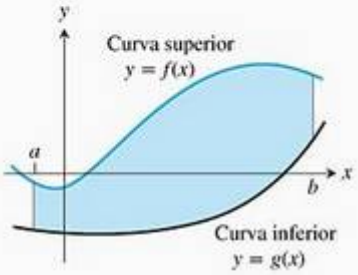


FIGURA 5.27 A região entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$.

As assertivas do Teorema 7 permanecem verdadeiras quando f é uma função integrável (e não quando tem a propriedade mais forte de ser contínua), mas a prova é um pouco mais difícil, por isso é melhor deixá-la para um curso avançado.

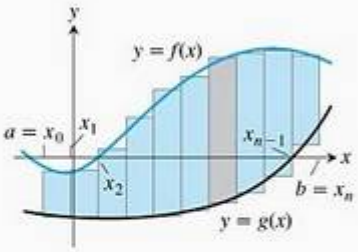


FIGURA 5.28 Fazemos uma aproximação dividindo a região com retângulos perpendiculares ao eixo x.

EXEMPLO 3 Integral de uma função par

Calcule $\int_{-2}^{2}(x^4 - 4x^2 + 6)\,dx$

SOLUÇÃO Como $f(x) = x^4 - 4x^2 + 6$ satisfaz a condição $f(-x) = f(x)$, é par no intervalo simétrico $[-2, 2]$, portanto

$$\int_{-2}^{2}(x^4 - 4x^2 + 6)\,dx = 2\int_0^2 (x^4 - 4x^2 + 6)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 6x\right]_0^2$$

$$= 2\left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3} + 12\right) = \frac{232}{15}$$

Área entre curvas

Suponha que queiramos encontrar a área de uma região limitada superiormente pela curva $y = f(x)$, inferiormente pela curva $y = g(x)$ e à esquerda e à direita, respectivamente, pelas retas $x = a$ e $x = b$ (Figura 5.27). A região pode ter uma forma cuja área podemos determinar geometricamente, mas se f e g forem funções contínuas arbitrárias, em geral teremos de encontrar a área com uma integral.

Para vermos qual deve ser a integral, primeiro aproximamos a região com n retângulos verticais com bases em uma partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ (Figura 5.28). A área do k-ésimo retângulo (Figura 5.29) é

$$\Delta A_k = \text{altura} \times \text{largura} = [f(c_k) - g(c_k)]\,\Delta x_k.$$

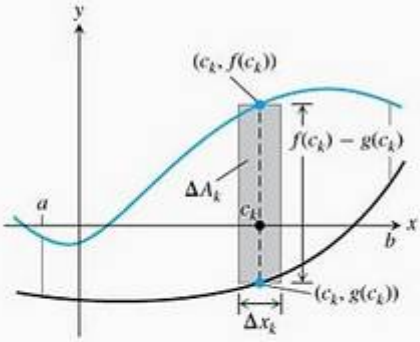


FIGURA 5.29 A área ΔA_k do k-ésimo retângulo é o produto entre sua altura, $f(c_k) - g(c_k)$, e sua largura, Δx_k.

Depois fazemos uma aproximação para a área da região somando as áreas dos n retângulos:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\,\Delta x_k \qquad \text{Soma de Riemann.}$$

Conforme $\|P\| \to 0$, as somas à direita aproximam-se do limite $\int_a^b [f(x) = g(x)]\,dx$ porque f e g são contínuas. Tomamos a área da região como o valor dessa integral. Ou seja,

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\, \Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Definição Área entre curvas

Se f e g são contínuas com $f(x) \geq g(x)$ ao longo de $[a, b]$, então a **área da região entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ de a até b** é a integral de $(f - g)$ desde a até b:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Ao aplicar essa definição, convém esboçar as curvas. O gráfico revelará qual delas é a curva superior, f, e qual é a inferior, g. Também ajudará a achar os limites de integração, caso eles ainda não sejam conhecidos. Para encontrar esses limites, talvez seja necessário determinar onde as curvas se cruzam, e isso pode envolver a resolução da equação $f(x) = g(x)$ para valores de x. Depois, você pode integrar a função $f - g$ para descobrir a área entre as interseções.

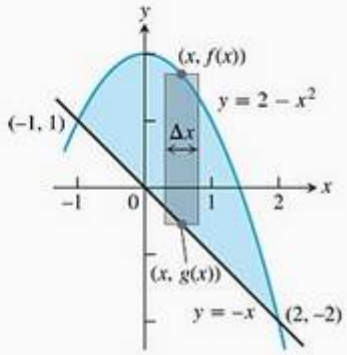


FIGURA 5.30 A região do Exemplo 4 com um retângulo de aproximação típico.

EXEMPLO 4 Área entre curvas que se cruzam

Determine a área da região compreendida entre a parábola $y = 2 - x^2$ e a reta $y = -x$.

SOLUÇÃO Primeiro, esboce as duas curvas (Figura 5.30). Determinamos os limites de integração resolvendo x simultaneamente em $y = 2 - x^2$ e $y = -x$.

$2 - x^2 = -x$	Equacione $f(x)$ e $g(x)$
$x^2 - x - 2 = 0$	Reescreva.
$(x + 1)(x - 2) = 0$	Fatore.
$x = -1, \quad x = 2$	Resolva.

A região vai de $x = -1$ até $x = 2$. Os limites de integração são $a = -1$, $b = 2$.

A área entre as curvas é

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-1}^{2} [(2 - x^2) - (-x)]\, dx \\ &= \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\, dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Se a fórmula para uma curva fronteira muda em um ou mais pontos, subdividimos a região em sub-regiões que correspondam às mudanças da fórmula; depois aplicamos essa fórmula à área entre as curvas em cada sub-região.

EXEMPLO 5 Mudando a integral para combinar com uma mudança de fronteira

Determine a área da região do primeiro quadrante que é limitada acima por $y = \sqrt{x}$ e abaixo pelo eixo x e pela reta $y = x - 2$.

Companion Website

Biografia histórica

Richard Dedekind (1831-1916)

SOLUÇÃO O esboço (Figura 5.31) mostra que a fronteira superior é o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$. A fronteira inferior muda de $g(x) = 0$ com $0 \le x \le 2$ para $g(x) = x - 2$ com $2 \le x \le 4$ (existe uma concordância em $x = 2$). Em $x = 2$, subdividimos a região nas sub-regiões A e B, conforme mostra a Figura 5.31.

Os limites de integração para a região A são $a = 0$ e $b = 2$. O limite à esquerda para a região B é $a = 2$. Para encontrar o limite à direita, resolvemos simultaneamente as equações $y = \sqrt{x}$ e $y = x - 2$ para obter x:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} &= x - 2 && \text{Iguale } f(x) \text{ e } g(x)\\
x &= (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 && \text{Eleve ao quadrado ambos os lados.}\\
x^2 - 5x + 4 &= 0 && \text{Reescreva.}\\
(x-1)(x-4) &= 0 && \text{Fatore.}\\
x &= 1, \quad x = 4 && \text{Resolva.}
\end{aligned}$$

Somente o valor $x = 4$ satisfaz a equação $\sqrt{x} = x - 2$. O valor $x = 1$ é uma raiz estranha introduzida ao elevarmos ao quadrado. O limite à direita é $b = 4$.

Para $0 \le x \le 2$: $\quad f(x) - g(x) = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$

Para $2 \le x \le 4$: $\quad f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (x - 2) = \sqrt{x} - x + 2$

Somamos as áreas das sub-regiões A e B para encontrar a área total:

$$\text{Área total} = \underbrace{\int_0^2 \sqrt{x}\,dx}_{\text{Área de } A} + \underbrace{\int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\,dx}_{\text{Área de } B}$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4$$

$$= \frac{2}{3}(2)^{3/2} - 0 + \left(\frac{2}{3}(4)^{3/2} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3}(2)^{3/2} - 2 + 4\right)$$

$$= \frac{2}{3}(8) - 2 = \frac{10}{3}$$

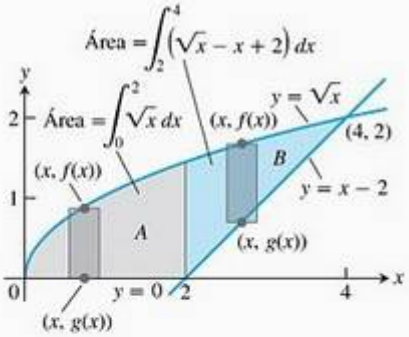
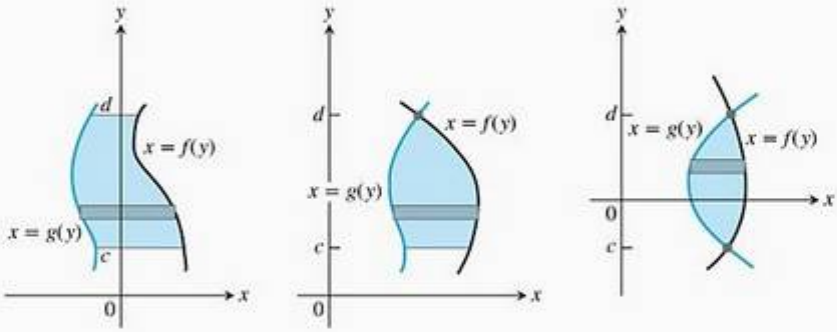


FIGURA 5.31 Quando a fórmula para uma curva fronteira muda, a integral que dá a área também muda, tornando-se a soma das integrais correspondentes, uma integral para cada uma das regiões sombreadas mostradas aqui (Exemplo 5).

Integração em relação a y

Se as curvas que formam as fronteiras de uma região são descritas por funções de y, os retângulos de aproximação são horizontais, e não verticais, e a fórmula básica tem y no lugar de x.

Para regiões como estas



use a fórmula

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

Nessa equação, f sempre denota a curva à direita e g a curva à esquerda, logo $f(y) - g(y)$ é não negativa.

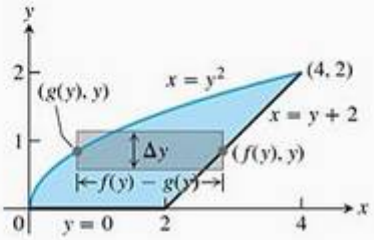


FIGURA 5.32 Se integrarmos em relação a x, serão necessárias duas integrações para achar a área dessa região. Se integrarmos em relação a y, será necessária apenas uma (Exemplo 6).

EXEMPLO 6

Determine a área da região do Exemplo 5 integrando em relação a y.

SOLUÇÃO Primeiro esboçamos a região e um retângulo *horizontal* típico, com base em uma partição de um intervalo de valores de y (Figura 5.32). A fronteira direita da região é a reta $x = y + 2$, portanto $f(y) = y + 2$. A fronteira esquerda é a curva $x = y^2$, logo $g(y) = y^2$. O limite inferior de integração é $y = 0$. Determinamos o limite superior resolvendo y simultaneamente em $x = y + 2$ e $x = y^2$:

$y + 2 = y^2$	Iguale $f(y) = y + 2$ e $g(y) = y^2$
$y^2 - y - 2 = 0$	Reescreva.
$(y + 1)(y - 2) = 0$	Fatore.
$y = -1, \quad y = 2$	Resolva.

O limite de integração superior é $b = 2$. (O valor de $y = -1$ fornece um ponto de interseção *abaixo* do eixo x.)

A área da região é

$$\begin{aligned} A = \int_a^b [f(y) - g(y)]\, dy &= \int_0^2 [y + 2 - y^2]\, dy \\ &= \int_0^2 [2 + y - y^2]\, dy \\ &= \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 \\ &= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

É o mesmo resultado do Exemplo 5, encontrado com menos trabalho.

Combinando integrais com fórmulas da geometria

Combinar cálculo e geometria pode ajudar a determinar uma área mais rapidamente.

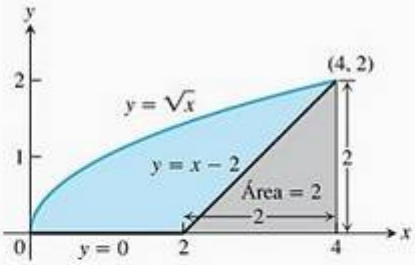


FIGURA 5.33 A área da região sombreada é a área sob a parábola $y = \sqrt{x}$ menos a área do triângulo (Exemplo 7).

EXEMPLO 7 A área da região do Exemplo 5 encontrada mais rapidamente

Determine a área da região do Exemplo 5.

SOLUÇÃO A área que queremos é a área entre a curva $y = \sqrt{x}$, sendo $0 \le x \le 4$, e o eixo x, *menos* a área de um triângulo com base 2 e altura 2 (Figura 5.33):

$$\text{Área} = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx - \frac{1}{2}(2)(2)$$
$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^4 - 2$$
$$= \frac{2}{3}(8) - 0 - 2 = \frac{10}{3}$$

CONCLUSÃO EXTRAÍDA DOS EXEMPLOS 5 A 7 Às vezes é mais fácil determinar a área entre duas curvas integrando em relação a y, e não a x. Além disso, uma combinação entre geometria e cálculo também pode ajudar. Após esboçar a região, reflita alguns instantes sobre o melhor caminho a seguir.

Exercícios 5.6

Calculando integrais definidas

Use a fórmula de substituição do Teorema 6 para calcular as integrais nos exercícios 1–46.

1. (a) $\int_0^3 \sqrt{y+1}\,dy$ (b) $\int_{-1}^0 \sqrt{y+1}\,dy$

2. (a) $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$ (b) $\int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$

3. (a) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \sec^2 x\,dx$ (b) $\int_{-\pi/4}^0 \operatorname{tg} x \sec^2 x\,dx$

4. (a) $\int_0^{\pi} 3\cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx$ (b) $\int_{2\pi}^{3\pi} 3\cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx$

5. (a) $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$ (b) $\int_{-1}^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$

6. (a) $\int_0^{\sqrt{7}} t(t^2+1)^{1/3}\,dt$ (b) $\int_{-\sqrt{7}}^0 t(t^2+1)^{1/3}\,dt$

7. (a) $\int_{-1}^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,dr$ (b) $\int_0^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,dr$

8. (a) $\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv$ (b) $\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv$

9. (a) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ (b) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

10. (a) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$ (b) $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$

11. (a) $\int_0^{\pi/6} (1-\cos 3t)\operatorname{sen} 3t\,dt$ (b) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\cos 3t)\operatorname{sen} 3t\,dt$

12. (a) $\int_{-\pi/2}^0 \left(2+\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$ (b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2+\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$

13. (a) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\operatorname{sen} z}}\,dz$ (b) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\operatorname{sen} z}}\,dz$

14. (a) $\int_{-\pi/2}^0 \frac{\operatorname{sen} w}{(3+2\cos w)^2}\,dw$ (b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} w}{(3+2\cos w)^2}\,dw$

15. $\int_0^1 \sqrt{t^5+2t}\,(5t^4+2)\,dt$

16. $\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}\,(1+\sqrt{y})^2}$

17. $\int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2\theta \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta$

18. $\int_{\pi}^{3\pi/2} \operatorname{cotg}^5\left(\frac{\theta}{6}\right)\sec^2\left(\frac{\theta}{6}\right)d\theta$

19. $\int_0^{\pi} 5(5-4\cos t)^{1/4}\operatorname{sen} t\,dt$

20. $\int_0^{\pi/4} (1-\operatorname{sen} 2t)^{3/2}\cos 2t\,dt$

21. $\int_0^1 (4y-y^2+4y^3+1)^{-2/3}(12y^2-2y+4)\,dy$

22. $\int_0^1 (y^3+6y^2-12y+9)^{-1/2}(y^2+4y-4)\,dy$

23. $\int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{\theta}\cos^2(\theta^{3/2})\,d\theta$

24. $\int_{-1}^{-1/2} t^{-2}\operatorname{sen}^2\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$

25. $\int_0^{\pi/4} (1+e^{\operatorname{tg}\theta})\sec^2\theta\,d\theta$

26. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1+e^{\operatorname{cotg}\theta})\operatorname{cosec}^2\theta\,d\theta$

27. $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{2-\cos t}\,dt$

28. $\int_0^{\pi/3} \frac{4\operatorname{sen}\theta}{1-4\cos\theta}\,d\theta$

29. $\int_1^2 \frac{2\ln x}{x}\,dx$

30. $\int_2^4 \frac{dx}{x\ln x}$

31. $\int_2^4 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

32. $\int_2^{16} \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$

33. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx$

34. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cotg} t\,dt$

35. $\int_{\pi/2}^{\pi} 2\operatorname{cotg}\frac{\theta}{3}\,d\theta$

36. $\int_0^{\pi/12} 6\operatorname{tg} 3x\,dx$

37. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\cos\theta\,d\theta}{1+(\operatorname{sen}\theta)^2}$

38. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\operatorname{cosec}^2 x\,dx}{1+(\operatorname{cotg} x)^2}$

39. $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$

40. $\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4\,dt}{t(1+\ln^2 t)}$

41. $\int_0^1 \frac{4\,ds}{\sqrt{4-s^2}}$

42. $\int_0^{3\sqrt{2}/4} \frac{ds}{\sqrt{9-4s^2}}$

43. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sec^2(\sec^{-1}x)\,dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

44. $\int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{\cos(\sec^{-1}x)\,dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

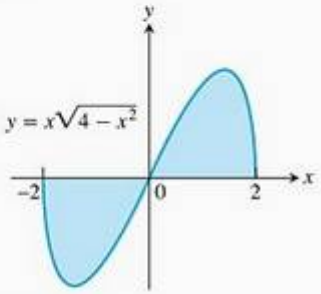
45. $\int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \frac{dy}{y\sqrt{4y^2-1}}$

46. $\int_{-2/3}^{-\sqrt{2}/3} \frac{dy}{y\sqrt{9y^2-1}}$

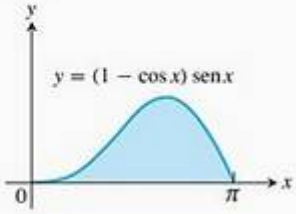
Área

Determine as áreas totais das regiões sombreadas nos exercícios 47–62.

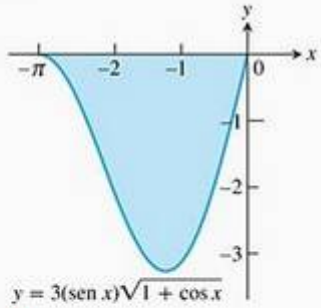
47.



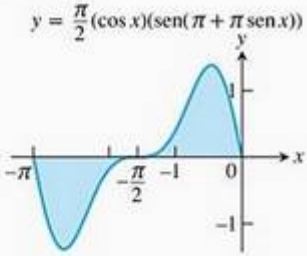
48.



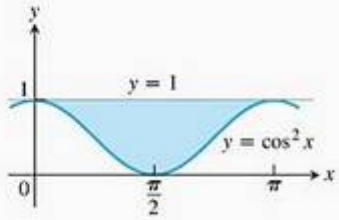
49.



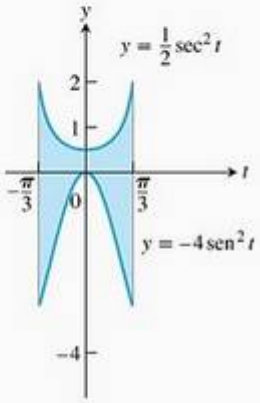
50.



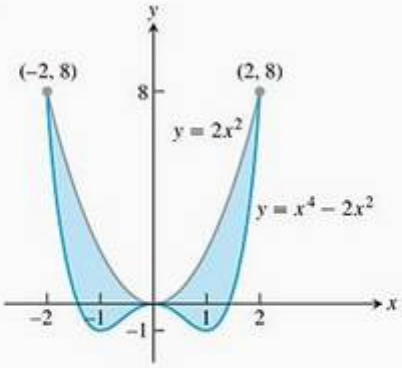
51.



52.

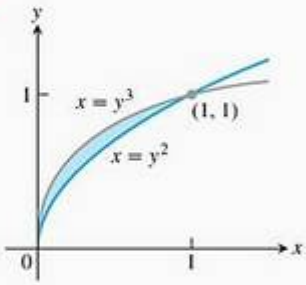


53.

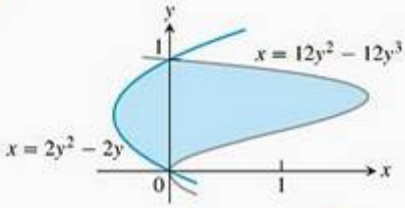


FORA DE ESCALA

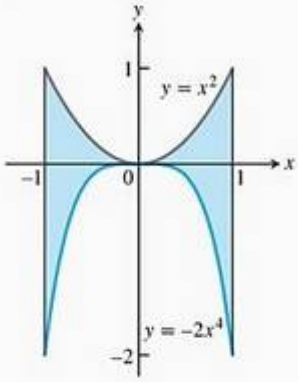
54.



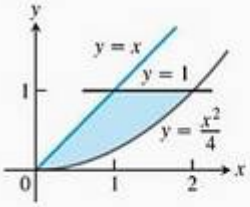
55.



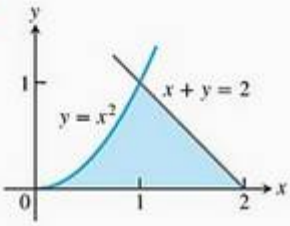
56.



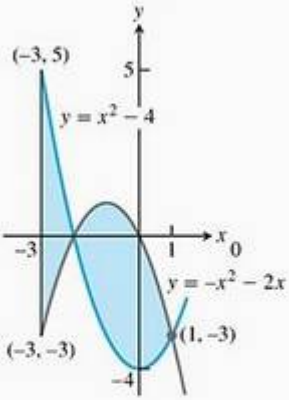
57.



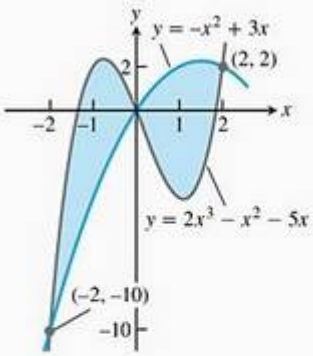
58.



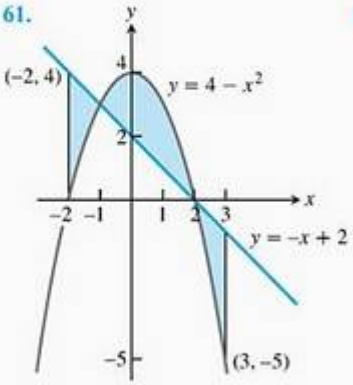
59.



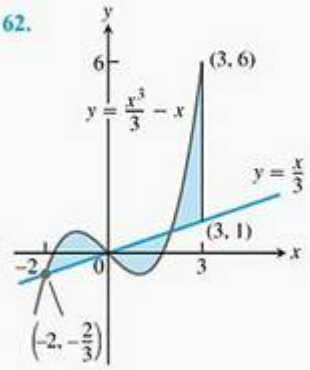
60.



61.



62.



Determine as áreas das regiões compreendidas entre as retas e curvas nos exercícios 63–72.

63. $y = x^2 - 2$ e $y = 2$

64. $y = 2x - x^2$ e $y = -3$

65. $y = x^4$ e $y = 8x$

66. $y = x^2 - 2x$ e $y = x$

67. $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$

68. $y = 7 - 2x^2$ e $y = x^2 + 4$

69. $y = x^4 - 4x^2 + 4$ e $y = x^2$

70. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$ e $y = 0$

71. $y = \sqrt{|x|}$ e $5y = x + 6$ (Quantos pontos de interseção existem?)

72. $y = |x^2 - 4|$ e $y = (x^2/2) + 4$

Determine as áreas das regiões compreendidas entre as retas e curvas nos exercícios 73–80.

73. $x = 2y^2$, $x = 0$ e $y = 3$

74. $x = y^2$ e $x = y + 2$

75. $y^2 - 4x = 4$ e $4x - y = 16$

76. $x - y^2 = 0$ e $x + 2y^2 = 3$

77. $x + y^2 = 0$ e $x + 3y^2 = 2$

78. $x - y^{2/3} = 0$ e $x + y^4 = 2$

79. $x = y^2 - 1$ e $x = |y|\sqrt{1 - y^2}$

80. $x = y^3 - y^2$ e $x = 2y$

Determine as áreas das regiões compreendidas entre as curvas nos exercícios 81–84.

81. $4x^2 + y = 4$ e $x^4 - y = 1$

82. $x^3 - y = 0$ e $3x^2 - y = 4$

83. $x + 4y^2 = 4$ e $x + y^4 = 1$, para $x \geq 0$

84. $x + y^2 = 3$ e $4x + y^2 = 0$

Determine as áreas das regiões compreendidas entre as retas e curvas nos exercícios 85–92.

85. $y = 2 \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} 2x$, $0 \leq x \leq \pi$

86. $y = 8 \cos x$ e $y = \sec^2 x$, $-\pi/3 \leq x \leq \pi/3$

87. $y = \cos(\pi x/2)$ e $y = 1 - x^2$

88. $y = \operatorname{sen}(\pi x/2)$ e $y = x$

89. $y = \sec^2 x$, $y = \operatorname{tg}^2 x$, $x = -\pi/4$ e $x = \pi/4$

90. $x = \operatorname{tg}^2 y$ e $x = -\operatorname{tg}^2 y$, $-\pi/4 \leq y \leq \pi/4$

91. $x = 3 \operatorname{sen} y \sqrt{\cos y}$ e $x = 0$, $0 \leq y \leq \pi/2$

92. $y = \sec^2(\pi x/3)$ e $y = x^{1/3}$, $-1 \leq x \leq 1$

Área entre curvas

93. Determine a área da região em forma de hélice compreendida entre a curva $x - y^3 = 0$ e a reta $x - y = 0$.

94. Determine a área da região em forma de hélice compreendida entre a curva $x - y^{1/3} = 0$ e a reta $x - y^{1/5} = 0$.

95. Determine a área da região no primeiro quadrante delimitada pelas retas $y = x$ e $x = 2$, a curva $y = 1/x^2$ e o eixo x.

96. Determine a área da região "triangular" no primeiro quadrante, limitada à esquerda pelo eixo y e à direita pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$.

97. Determine a área da região entre as curvas $y = \ln x$ e $y = \ln 2x$ de $x = 1$ até $x = 5$.

98. Determine a área da região entre a curva $y = \operatorname{tg} x$ e o eixo x de $x = -\pi/4$ até $x = \pi/3$.

99. Determine a área da região "triangular" no primeiro quadrante, limitada acima pela curva $y = e^{2x}$, abaixo pela curva $y = e^x$ e à direita pela reta $x = \ln 3$.

100. Determine a área da região "triangular" no primeiro quadrante, limitada acima pela curva $y = e^{x/2}$, abaixo pela curva $y = e^{-x/2}$ e à direita pela reta $x = 2 \ln 2$.

101. Determine a área da região entre a curva $y = 2x/(1 + x^2)$ e o intervalo $-2 \leq x \leq 2$ do eixo x.

102. Determine a área da região entre a curva $y = 2^{1-x}$ e o intervalo $-1 \leq x \leq 1$ do eixo x.

103. A região limitada abaixo pela parábola $y = x^2$ e acima pela reta $y = 4$ será dividida pela reta horizontal $y = c$ em duas subseções de mesma área.

(a) Esboce a região e desenhe uma reta $y = c$ dividindo-a em partes mais ou menos iguais. Em termos de c, quais são as coordenadas dos pontos onde a reta e a parábola se cruzam? Adicione-os à sua figura.

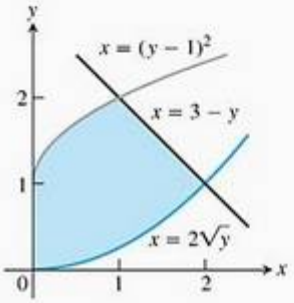
(b) Determine c integrando em relação a y. (Isso colocará c nos limites de integração.)

(c) Determine c integrando em relação a x. (Isso colocará c nos limites de integração.)

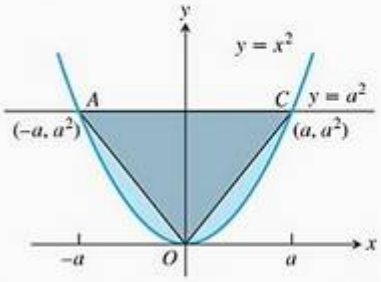
104. Determine a área da região entre a curva $y = 3 - x^2$ e a reta $y = -1$ integrando em relação a **(a)** x e **(b)** y.

105. Determine a área da região no primeiro quadrante limitada à esquerda pelo eixo y, abaixo pela reta $y = x/4$, acima e à esquerda pela curva $y = 1 = \sqrt{x}$ e acima e à direita pela curva $y = 2/\sqrt{x}$.

106. Determine a área da região no primeiro quadrante limitada à esquerda pelo eixo y, abaixo pela curva $x = 2\sqrt{y}$, acima e à esquerda pela curva $x = (y - 1)^2$ e acima e à direita pela reta $x = 3 - y$.



107. A figura abaixo mostra o triângulo AOC inscrito na região que vai da parábola $y = x^2$ até a reta $y = a^2$. Determine o limite da razão entre a área do triângulo e a área da região parabólica quando a tende a zero.

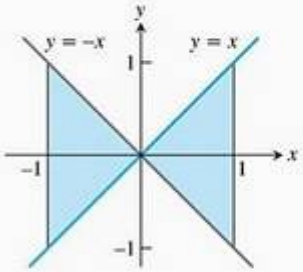


108. Suponha que a área da região entre o gráfico de uma função contínua positiva f e o eixo x de $x = a$ até $x = b$ seja 4 unidades quadradas. Determine a área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = 2f(x)$ de $x = a$ até $x = b$.

109. Quais das integrais a seguir, se houver alguma, serve para calcular a área da região sombreada mostrada a seguir? Justifique sua resposta.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x - (-x))\, dx = \int_{-1}^{1} 2x\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (-x - (x))\, dx = \int_{-1}^{1} -2x\, dx$



110. A afirmação a seguir é verdadeira sempre, às vezes ou nunca? A área da região entre os gráficos das funções contínuas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e as retas verticais $x = a$ e $x = b$ $(a < b)$ é

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Justifique sua resposta.

Teoria e exemplos

111. Suponha que $F(x)$ seja uma primitiva de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$, $x > 0$. Expresse

$$\int_1^3 \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\, dx$$

em função de F.

112. Mostre que, se f é contínua, então

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(1 - x)\, dx$$

113. Suponha que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 3$$

Determine

$$\int_{-1}^0 f(x)\, dx$$

se **(a)** f é ímpar, **(b)** f é par.

114. **(a)** Mostre que, se f é ímpar em $[-a, a]$, então

$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0$$

(b) Teste o resultado do item **(a)** com $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $a = \pi/2$.

115. Se f é uma função contínua, determine o valor da integral

$$I = \int_0^a \frac{f(x)\, dx}{f(x) + f(a - x)}$$

fazendo a substituição $u = a - x$ e somando a integral resultante a I.

116. Usando substituição, prove que, para quaisquer números positivos x e y,

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^y \frac{1}{t}\, dt$$

A propriedade de translação para integrais definidas

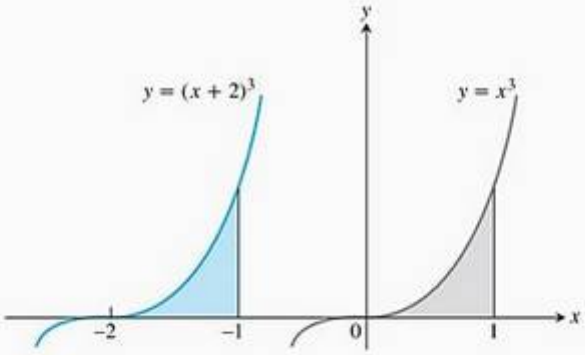
Uma propriedade básica das integrais definidas é sua invariabilidade mesmo sob translação, conforme expresso pela equação

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\,dx \qquad (1)$$

A equação aplica-se sempre que f seja integrável e definida pelos valores necessários de x. Por exemplo, na figura a seguir, demonstre que

$$\int_{-2}^{-1} (x+2)^3\,dx = \int_0^1 x^3\,dx$$

porque as áreas das regiões sombreadas são congruentes.



117. Use uma substituição para verificar a Equação (1).

118. Para cada uma das funções a seguir, faça o gráfico de $f(x)$ ao longo de $[a, b]$ e $f(x + c)$ ao longo de $[a - c, b - c]$ para convencer a si mesmo(a) de que a Equação (1) é razoável.

(a) $f(x) = x^2, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad c = 1$
(b) $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = 0, \quad b = \pi, \quad c = \pi/2$
(c) $f(x) = \sqrt{x-4}, \quad a = 4, \quad b = 8, \quad c = 5$

USANDO O COMPUTADOR

Nos exercícios 119–122, você encontrará a área entre curvas no plano cujos pontos de interseção não é possível achar usando a álgebra simples. Use um SAC para executar os seguintes passos:

(a) Trace as curvas conjuntamente para ver seu aspecto e quantos pontos de interseção elas têm.

(b) Use o comando para resolver equações numéricas em seu SAC e determine todos os pontos de interseção.

(c) Integre $|f(x) - g(x)|$ ao longo dos pares consecutivos de valores de interseção.

(d) Some todas as integrais determinadas no item **(c)**.

119. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{1}{3}, \quad g(x) = x - 1$

120. $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - 3x^3 + 10, \quad g(x) = 8 - 12x$

121. $f(x) = x + \operatorname{sen}(2x), \quad g(x) = x^3$

122. $f(x) = x^2 \cos x, \quad g(x) = x^3 - x$

Questões de revisão

1. Como você poderia eventualmente estimar grandezas como distância percorrida, área, volume e valor médio usando somas finitas? Por que você faria isso?

2. O que é a notação sigma? Que vantagens ela oferece? Exemplifique.

3. O que é uma soma de Riemann? Por que você poderia considerar esse tipo de soma?

4. O que é a norma de partição de um intervalo fechado?

5. O que é a integral definida de uma função f em um intervalo fechado $[a, b]$? Quando você pode ter certeza de que ela existe?

6. Qual é a relação entre integrais definidas e área? Descreva algumas outras interpretações sobre integrais definidas.

7. O que é o valor médio de uma função integrável ao longo de um intervalo fechado? A função necessariamente assume esse valor médio? Explique.

8. Descreva as regras para se trabalhar com integrais definidas (Tabela 5.3). Exemplifique.

9. O que é o teorema fundamental do cálculo? Por que ele é tão importante? Ilustre cada parte do teorema com um exemplo.

10. Como o teorema fundamental fornece solução para um problema de valor inicial $dy/dx = f(x)$, $y(x_0) = y_0$ quando f é contínua?

11. Como a integração por substituição está relacionada com a regra da cadeia?

12. Como você poderia eventualmente calcular integrais indefinidas por substituição? Exemplifique.

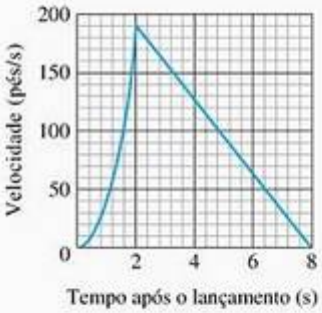
13. Como o método da substituição funciona para integrais definidas? Exemplifique.

14. Como você define e calcula a área de uma região entre os gráficos de duas funções contínuas? Exemplifique.

Exercícios práticos

Somas finitas e estimativas

1. A figura a seguir mostra o gráfico da velocidade (em pés/s) de um foguete experimental nos primeiros 8 segundos após o lançamento. O foguete é acelerado para cima nos dois segundos iniciais e depois plana até alcançar sua altura máxima em $t = 8$ s.

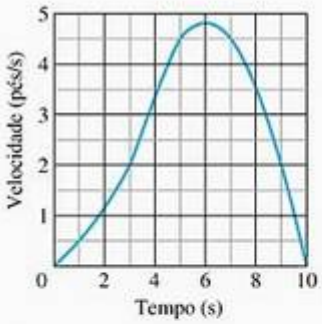


(a) Admitindo que o foguete tenha sido lançado a partir do solo, que altitude aproximadamente ele atingiu? (Este é o mesmo foguete da Seção 3.3, Exercício 17, mas você não precisa resolvê-lo para fazer este exercício.)

(b) Esboce um gráfico da altura atingida pelo foguete em função do tempo para $0 \le t \le 8$.

2. (a) A figura a seguir mostra a velocidade (em m/s) de um corpo que se desloca ao longo do eixo s durante um intervalo de tempo de $t = 0$ até $t = 10$ s. Aproximadamente que distância o corpo percorreu durante esses 10 segundos?

(b) Esboce o gráfico da posição s do corpo em função de t para $0 \le t \le 10$ admitindo $s(0) = 0$.



3. Suponha que $\sum_{k=1}^{10} a_k = -2$ e $\sum_{k=1}^{10} b_k = 25$. Determine o valor de

(a) $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{4}$ (b) $\sum_{k=1}^{10} (b_k - 3a_k)$

(c) $\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k - 1)$ (d) $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{5}{2} - b_k\right)$

4. Suponha que $\sum_{k=1}^{20} a_k = 0$ e $\sum_{k=1}^{20} b_k = 7$. Determine os valores de

(a) $\sum_{k=1}^{20} 3a_k$ (b) $\sum_{k=1}^{20} (a_k + b_k)$

(c) $\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{2} - \frac{2b_k}{7}\right)$ (d) $\sum_{k=1}^{20} (a_k - 2)$

Integrais definidas

Nos exercícios 5–8, expresse cada limite como uma integral definida. Depois calcule a integral para encontrar o valor do limite. Em cada caso, P é uma partição do intervalo dado e os números c_k são escolhidos a partir dos subintervalos de P.

5. $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (2c_k - 1)^{-1/2} \Delta x_k$, onde P é uma partição de $[1, 5]$

6. $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k(c_k^2 - 1)^{1/3} \Delta x_k$, onde P é uma partição de $[1, 3]$

7. $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(\frac{c_k}{2}\right)\right) \Delta x_k$, onde P é uma partição de $[-\pi, 0]$

8. $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{sen} c_k)(\cos c_k) \Delta x_k$, onde P é uma partição de $[0, \pi/2]$

9. Se $\int_{-2}^{2} 3f(x)\,dx = 12$, $\int_{-2}^{5} 3f(x)\,dx = 6$ e $\int_{-2}^{5} 3g(x)\,dx = 2$, determine os valores a seguir.

(a) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ (b) $\int_{2}^{5} f(x)\,dx$

(c) $\int_{5}^{-2} g(x)\,dx$ (d) $\int_{-2}^{5} (-\pi g(x))\,dx$

(e) $\int_{-2}^{5} \left(\frac{f(x) + g(x)}{5}\right) dx$

10. Se $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \pi$, $\int_{0}^{2} 7g(x)\,dx = 7$ e $\int_{0}^{1} g(x)\,dx = 2$, determine os valores a seguir.

(a) $\int_{0}^{2} g(x)\,dx$ (b) $\int_{1}^{2} g(x)\,dx$

(c) $\int_{2}^{0} f(x)\,dx$ (d) $\int_{0}^{2} \sqrt{2}\, f(x)\,dx$

(e) $\int_{0}^{2} (g(x) - 3f(x))\,dx$

Área

Nos exercícios 11–14, determine a área total da região compreendida entre o gráfico de f e o eixo x.

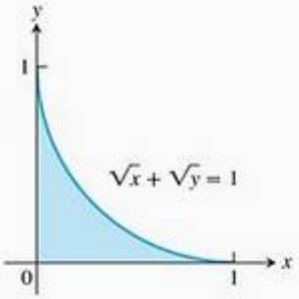
11. $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad 0 \le x \le 3$

12. $f(x) = 1 - (x^2/4), \quad -2 \le x \le 3$

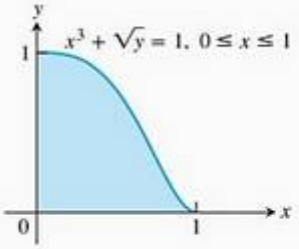
13. $f(x) = 5 - 5x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 8$
14. $f(x) = 1 - \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4$

Determine as áreas das regiões compreendidas entre as curvas e as retas nos exercícios 15–26.

15. $y = x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$
16. $y = x, \quad y = 1/\sqrt{x}, \quad x = 2$
17. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$



18. $x^3 + \sqrt{y} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0,$ para $0 \le x \le 1$



19. $x = 2y^2, \quad x = 0, \quad y = 3$
20. $x = 4 - y^2, \quad x = 0$
21. $y^2 = 4x, \quad y = 4x - 2$
22. $y^2 = 4x + 4, \quad y = 4x - 16$
23. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = x, \quad 0 \le x \le \pi/4$
24. $y = |\operatorname{sen} x|, \quad y = 1, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2$
25. $y = 2 \operatorname{sen} x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \le x \le \pi$
26. $y = 8 \cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad -\pi/3 \le x \le \pi/3$

27. Determine a área da região "triangular" limitada à esquerda por $x + y = 2$, à direita por $y = x^2$ e acima por $y = 2$.

28. Determine a área da região "triangular" limitada à esquerda por $y = \sqrt{x}$, à direita por $y = 6 - x$ e acima por $y = 1$.

29. Determine os valores extremos de $f(x) = x^3 - 3x^2$ e a área da região compreendida entre o gráfico de f e o eixo x.

30. Determine a área da região delimitada no primeiro quadrante pela curva $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$.

31. Determine a área total da região delimitada pela curva $x = y^{2/3}$ e pelas retas $x = y$ e $y = -1$.

32. Determine a área total da região entre as curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ para $0 \le x \le 3\pi/2$.

33. **Área** Determine a área entre a curva $y = 2(\ln x)/x$ e o eixo x, de $x = 1$ a $x = e$.

34. (a) Demonstre que a área entre a curva $y = 1/x$ e o eixo x de $x = 10$ a $x = 20$ é a mesma que entre a curva e o eixo x de $x = 1$ até $x = 2$.

(b) Demonstre que a área entre a curva $y = 1/x$ e o eixo x, de ka a kb, é a mesma que a área entre a curva e o eixo x de $x = a$ até $x = b$ $(0 < a < b, k > 0)$.

Problemas de valor inicial

35. Mostre que $y + x^2 + \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ resolve o problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - \frac{1}{x^2}; \quad y'(1) = 3, \quad y(1) = 1$$

36. Mostre que $y = \int_0^x (1 + 2\sqrt{\sec t})\,dt$ resolve o problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{\sec x}\,\operatorname{tg} x; \quad y'(0) = 3, \quad y(0) = 0$$

Expresse as soluções dos problemas de valor inicial nos exercícios 37 e 38 em termos de integrais.

37. $\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad y(5) = -3$

38. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2 - \operatorname{sen}^2 x}, \quad y(-1) = 2$

Resolva os problemas de valor inicial dos exercícios 39–42.

39. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad y(0) = 0$

40. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1} - 1, \quad y(0) = 1$

41. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1; \quad y(2) = \pi$

42. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad y(0) = 2$

Calculando integrais indefinidas

Calcule as integrais nos exercícios 43–72.

43. $\int 2(\cos x)^{-1/2} \operatorname{sen} x\,dx$
44. $\int (\operatorname{tg} x)^{-3/2} \sec^2 x\,dx$
45. $\int (2\theta + 1 + 2\cos(2\theta + 1))\,d\theta$
46. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2\theta - \pi}} + 2\sec^2(2\theta - \pi)\right) d\theta$
47. $\int \left(t - \frac{2}{t}\right)\left(t + \frac{2}{t}\right) dt$
48. $\int \frac{(t + 1)^2 - 1}{t^4}\,dt$

49. $\int \sqrt{t}\,\text{sen}\,(2t^{3/2})\,dt$

50. $\int \sec\theta\,\text{tg}\,\theta\,\sqrt{1+\sec\theta}\,d\theta$

51. $\int e^x \sec^2(e^x - 7)\,dx$

52. $\int e^y \,\text{cosec}\,(e^y + 1)\,\text{cotg}\,(e^y + 1)\,dy$

53. $\int \sec^2(x) e^{\text{tg}\,x}\,dx$

54. $\int \text{cosec}^2 x\, e^{\text{cotg}\,x}\,dx$

55. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3x-4}$

56. $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

57. $\int_0^4 \frac{2t}{t^2-25}\,dt$

58. $\int \frac{\text{tg}\,(\ln v)}{v}\,dv$

59. $\int \frac{(\ln x)^{-3}}{x}\,dx$

60. $\int \frac{1}{r}\,\text{cosec}^2(1+\ln r)\,dr$

61. $\int x3^{x^2}\,dx$

62. $\int 2^{\text{tg}\,x}\sec^2 x\,dx$

63. $\int \frac{3\,dr}{\sqrt{1-4(r-1)^2}}$

64. $\int \frac{6\,dr}{\sqrt{4-(r+1)^2}}$

65. $\int \frac{dx}{2+(x-1)^2}$

66. $\int \frac{dx}{1+(3x+1)^2}$

67. $\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2-4}}$

68. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{(x+3)^2-25}}$

69. $\int \frac{e^{\text{sen}^{-1}\sqrt{x}}\,dx}{2\sqrt{x-x^2}}$

70. $\int \frac{\sqrt{\text{sen}^{-1} x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

71. $\int \frac{dy}{\sqrt{\text{tg}^{-1} y}\,(1+y^2)}$

72. $\int \frac{(\text{tg}^{-1} x)^2\,dx}{1+x^2}$

Calculando integrais definidas

Calcule as integrais nos exercícios 73–112.

73. $\int_{-1}^{1} (3x^2 - 4x + 7)\,dx$

74. $\int_0^1 (8s^3 - 12s^2 + 5)\,ds$

75. $\int_1^2 \frac{4}{v^2}\,dv$

76. $\int_1^{27} x^{-4/3}\,dx$

77. $\int_1^4 \frac{dt}{t\sqrt{t}}$

78. $\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{u})^{1/2}}{\sqrt{u}}\,du$

79. $\int_0^1 \frac{36\,dx}{(2x+1)^3}$

80. $\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt[3]{(7-5r)^2}}$

81. $\int_{1/8}^{1} x^{-1/3}(1-x^{2/3})^{3/2}\,dx$

82. $\int_0^{1/2} x^3(1+9x^4)^{-3/2}\,dx$

83. $\int_0^{\pi} \text{sen}^2\,5r\,dr$

84. $\int_0^{\pi/4} \cos^2\left(4t - \frac{\pi}{4}\right)dt$

85. $\int_0^{\pi/3} \sec^2\theta\,d\theta$

86. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \text{cosec}^2 x\,dx$

87. $\int_{\pi}^{3\pi} \text{cotg}^2 \frac{x}{6}\,dx$

88. $\int_0^{\pi} \text{tg}^2 \frac{\theta}{3}\,d\theta$

89. $\int_{-\pi/3}^{0} \sec x\,\text{tg}\,x\,dx$

90. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \text{cosec}\,z\,\text{cotg}\,z\,dz$

91. $\int_0^{\pi/2} 5(\text{sen}\,x)^{3/2}\cos x\,dx$

92. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 15\,\text{sen}^4\,3x\cos 3x\,dx$

93. $\int_0^{\pi/2} \frac{3\,\text{sen}\,x\cos x}{\sqrt{1+3\,\text{sen}^2 x}}\,dx$

94. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{(1+7\,\text{tg}\,x)^{2/3}}\,dx$

95. $\int_1^4 \left(\frac{x}{8} + \frac{1}{2x}\right)dx$

96. $\int_1^8 \left(\frac{2}{3x} - \frac{8}{x^2}\right)dx$

97. $\int_{-2}^{-1} e^{-(x+1)}\,dx$

98. $\int_{-\ln 2}^{0} e^{2w}\,dw$

99. $\int_0^{\ln 5} e^r(3e^r+1)^{-3/2}\,dr$

100. $\int_0^{\ln 9} e^{\theta}(e^{\theta}-1)^{1/2}\,d\theta$

101. $\int_1^e \frac{1}{x}(1+7\ln x)^{-1/3}\,dx$

102. $\int_1^3 \frac{(\ln(v+1))^2}{v+1}\,dv$

103. $\int_1^8 \frac{\log_4\theta}{\theta}\,d\theta$

104. $\int_1^e \frac{8\ln 3\,\log_3\theta}{\theta}\,d\theta$

105. $\int_{-3/4}^{3/4} \frac{6\,dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

106. $\int_{-1/5}^{1/5} \frac{6\,dx}{\sqrt{4-25x^2}}$

107. $\int_{-2}^{2} \frac{3\,dt}{4+3t^2}$

108. $\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dt}{3+t^2}$

109. $\int \frac{dy}{y\sqrt{4y^2-1}}$

110. $\int \frac{24\,dy}{y\sqrt{y^2-16}}$

111. $\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dy}{|y|\sqrt{9y^2-1}}$

112. $\int_{-2/\sqrt{5}}^{-\sqrt{6}/\sqrt{5}} \frac{dy}{|y|\sqrt{5y^2-3}}$

Valores médios

113. Determine o valor médio de $f(x) = mx + b$

(a) em $[-1, 1]$

(b) em $[-k, k]$

114. Determine o valor médio de

(a) $y = 3\sqrt{x}$ em $[0, 3]$

(b) $y = \sqrt{ax}$ em $[0, a]$

115. Seja f uma função derivável em $[a, b]$. No Capítulo 2, definimos a taxa média de variação de f ao longo de $[a, b]$ como

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e a taxa instantânea de variação de f em x como $f'(x)$. Neste capítulo, definimos o valor médio de uma função. Para que a nova definição de média seja coerente com a anterior, deveríamos ter

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{valor médios de } f \text{ em } [a, b]$$

Isso ocorre de fato? Justifique sua resposta.

116. É verdade que o valor médio de uma função integrável ao longo de um intervalo de comprimento 2 é a metade da integral da função ao longo do intervalo? Justifique sua resposta.

117. **(a)** Mostre que $\int \ln x\, dx = x \ln x = x + C$.

(b) Determine o valor médio de $\ln x$ em $[1, e]$.

118. Determine o valor médio de $f(x) = 1/x$ em $[1, 2]$.

119. Calcule o valor médio da função temperatura

T

$$f(x) = 37 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right) + 25$$

para um ano de 365 dias. Essa é uma maneira para estimar a temperatura média anual do ar em Fairbanks, no Alasca. O Serviço Nacional de Meteorologia apresenta uma média numérica oficial da temperatura diária do ar para o ano, 25,7 °F, ligeiramente maior que o valor médio de $f(x)$. A Figura 3.33 mostra por quê.

120. A capacidade térmica C_v é a quantidade de calor necessária

T

para aumentar de 1 °C à temperatura de dada massa de gás, a um volume constante, medida em cal/°C.mol (calorias por grau centígrado, por mol). A capacidade térmica do oxigênio depende de sua temperatura T e satisfaz a fórmula

$$C_v = 8{,}27 + 10^{-5}(26T - 1{,}87T^2)$$

Determine o valor médio de C_v para $20° \le T \le 675$ °C e a temperatura em que é atingido.

Derivando integrais

Nos exercícios 121–128, determine dy/dx.

121. $y = \int_2^x \sqrt{2 + \cos^3 t}\, dt$

122. $y = \int_2^{7x^2} \sqrt{2 + \cos^3 t}\, dt$

123. $y = \int_x^1 \frac{6}{3 + t^4}\, dt$

124. $y = \int_{\sec x}^2 \frac{1}{t^2 + 1}\, dt$

125. $y = \int_{\ln x^2}^0 e^{\cos t}\, dt$

126. $y = \int_1^{e^{\sqrt{x}}} \ln(t^2 + 1)\, dt$

127. $y = \int_0^{\operatorname{sen}^{-1} x} \frac{dt}{\sqrt{1 - 2t^2}}$

128. $y = \int_{\operatorname{tg}^{-1} x}^{\pi/4} e^{\sqrt{t}}\, dt$

Teoria e exemplos

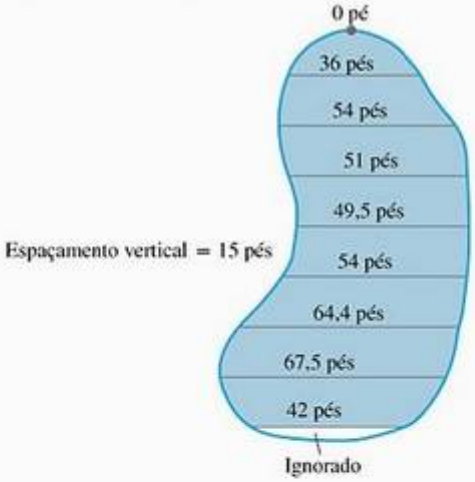
129. É verdade que qualquer função $y = f(x)$ derivável em $[a, b]$ é ela mesma a derivada de alguma função em $[a, b]$? Justifique sua resposta.

130. Suponha que $F(x)$ seja uma primitiva de $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$. Expresse $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx$ em termos de F e justifique sua resposta.

131. Determine dy/dx se $y = \int_x^1 \sqrt{1 = t^2}\, dt$. Explique as principais etapas do seu cálculo.

132. Determine dy/dx se $y = \int_{\cos x}^0 (1/(1 - t^2))\, dt$. Explique as principais etapas do seu cálculo.

133. **Um novo estacionamento** Para atender à demanda por vagas, sua cidade destinou a área apresentada aqui. Como você é o engenheiro da cidade, a Câmara lhe pediu que calculasse se o estacionamento pode ser construído com a soma de \$ 10.000. O custo para limpar a área será de \$ 0,10 por pé², e custará \$ 2,00 por pé² para pavimentar o estacionamento. O trabalho pode ser feito com \$ 10.000? Use uma estimativa de soma inferior. (As respostas podem variar ligeiramente, dependendo da estimativa usada.)



134. Os pára-quedistas A e B estão em um helicóptero pairando a 6.400 pés. O pára-quedista A salta e, depois de 4 segundos, abre o pára-quedas. Em seguida, o helicóptero sobe para 7.000 pés e permanece lá. Quarenta e cinco segundos depois que A deixou a aeronave, B salta e, depois de 13 segundos, também abre o pára-quedas. Ambos os pára-quedistas descem a 16 pés/s com seus pára-quedas abertos. Admita que os pára-quedistas caiam livremente (sem resistência significativa do ar) antes que os pára-quedas se abram.

(a) Em que altitude o pára-quedas de A se abre?

(b) Em que altitude o pára-quedas de B se abre?

(c) Qual pára-quedista aterrissa primeiro?

Estoque diário médio

O valor médio é usado na economia para estudar coisas como o estoque diário médio. Se $I(t)$ é o número de rádios, pneus, sapatos ou qualquer outro produto que uma empresa tenha no dia t (chamamos I de **função estoque**), o valor médio de I ao longo de um intervalo de tempo $[0, T]$ é chamado estoque diário médio da empresa para o período.

$$\textbf{Estoque diário médio} = \mathrm{M}(I) = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\, dt$$

Se h é o custo (em dólares) de estocagem de um item por dia, o produto médio $(I) \cdot h$ é o custo **diário médio de estocagem** para o período.

135. Como atacadista, a Tracey Burr Distribuidores (TBD) recebe um carregamento de 1.200 caixas de barras de chocolate a cada 30 dias. A TBD vende o chocolate para varejistas a uma taxa fixa e, t dias depois que um carregamento chega, seu estoque de caixas disponíveis é $I(t) = 1.200 - 40t$, $0 \le t \le 30$. Qual é o estoque diário médio da TBD para 30 dias? Qual será o custo diário de estocagem se o custo de estocagem de uma caixa for de \$ 0,03 por dia?

136. A Rich Wholesale Foods, uma fábrica de biscoitos, armazena suas caixas de biscoitos em um depósito refrigerado para serem embarcadas a cada 14 dias. A Rich tenta manter 600 caixas de reserva para atender a eventuais picos de demanda, portanto uma função estoque típica para 14 dias é $I(t) = 600 + 600t$, $0 \le t \le 14$. O custo diário de estocagem de cada caixa é de \$ 0,04 por dia. Determine o estoque diário médio da Rich e o custo diário médio de estocagem.

137. A Solon Container recebe 450 tambores com bolinhas plásticas a cada 30 dias. A função estoque (tambores disponíveis em função dos dias) é $I(t) = 450 - t^2/2$. Determine o estoque diário médio. Se o custo de estocagem de um tambor é de \$ 0,02 por dia, determine o custo diário médio de estocagem.

138. A Mitchell Mailorder recebe um carregamento de 600 caixas com meias esportivas a cada 60 dias. O número de caixas disponíveis t dias depois de o carregamento chegar é $I(t) = 600 - 20\sqrt{15t}$. Determine o estoque diário médio. Se o custo de estocagem para uma caixa é de \$ 0,005 por dia, determine o custo diário médio de estocagem.

Exercícios adicionais

Teoria e exemplos

1. (a) Se $\int_0^1 7f(x)\,dx = 7$, $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$?

   (b) Se $\int_0^1 f(x)\,dx = 4$ e $f(x) \ge 0$,

   $$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{4} = 2?$$

   Justifique suas respostas.

2. Suponha que $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 4$, $\int_{2}^{5} f(x)\,dx = 3$, $\int_{-2}^{5} g(x)\,dx = 2$

   Entre as afirmações a seguir há alguma verdadeira? Qual?

   (a) $\int_5^2 f(x)\,dx = -3$ (b) $\int_{-2}^{5} (f(x) + g(x)) = 9$

   (c) $f(x) \le g(x)$ no intervalo $-2 \le x \le 5$

3. **Problema de valor inicial** Mostre que

   $$y = \frac{1}{a}\int_0^x f(t)\,\text{sen}\,a(x - t)\,dt$$

   resolve o problema de valor inicial

   $$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = f(x), \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{e} \quad y = 0 \text{ quando } x = 0$$

   (*Dica*: $\text{sen}\,(ax - at) = \text{sen}\,ax \cos at - \cos ax\,\text{sen}\,at$.)

4. **Proporcionalidade** Suponha que x e y estejam relacionados pela equação

   $$x = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}\,dt$$

   Mostre que d^2y/dx^2 é proporcional a y e determine a constante de proporcionalidade.

5. Determine $f(4)$ se

   (a) $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x \cos \pi x$ (b) $\int_0^{f(x)} t^2\,dt = x \cos \pi x$

6. Determine $f(\pi/2)$ a partir das informações a seguir:

   i. f é positiva e contínua.

   ii. A área sob a curva $y = f(x)$ de $x = 0$ até $x = a$ é

   $$\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}\,\text{sen}\,a + \frac{\pi}{2}\cos a$$

7. No plano xy, a área da região compreendida entre o eixo x, a curva $y = f(x)$, $f(x) \ge 0$, e as retas $x = 1$ e $x = b$ são iguais a $\sqrt{b^2 + 1} - \sqrt{2}$ para qualquer $b > 1$. Determine $f(x)$.

8. Demonstre que

   $$\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt \right) du = \int_0^x f(u)(x - u)\,du$$

   (*Dica*: Expresse a integral do lado direito da igualdade como a diferença entre duas integrais. Depois mostre que os dois lados da equação têm a mesma derivada em relação a x).

9. **Determinando uma curva** Determine a equação para a curva, no plano xy, que passa pelo ponto $(1, -1)$ se o coeficiente angular em x é sempre $3x^2 + 2$.

10. **Removendo terra com uma pá** Você arremessa com uma pá a terra do fundo de um buraco com velocidade

inicial de 32 pés/s. A terra deve ser atirada até 17 pés acima do ponto de descarga para cair fora do buraco. Essa velocidade é suficiente para tirar a terra ou seria melhor você se abaixar?

Funções contínuas por partes

Embora estejamos interessados basicamente em funções contínuas, em aplicações práticas muitas funções são contínuas por partes. Uma função $f(x)$ é **contínua por partes no intervalo fechado I** se f tem apenas um número finito de descontinuidades em I, os limites

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to c^+} f(x)$$

existem e são finitos em todos os pontos interiores de I, e os limites laterais adequados existem e são finitos nas extremidades de I. Todas as funções contínuas por partes são integráveis. Os pontos de descontinuidade dividem I em subintervalos abertos e semi-abertos em que f é contínua, e o critério de limite acima garante que f tenha uma extensão contínua para o fecho de cada subintervalo. Para integrar uma função contínua por partes, integramos as extensões individuais e somamos os resultados. A integral de

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -1 \le x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 2 \\ -1, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

(Figura 5.34) em $[-1, 3]$ é

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{3} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{0} (1 - x)\,dx + \int_{0}^{2} x^2\,dx + \int_{2}^{3} (-1)\,dx \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} + \left[-x\right]_{2}^{3} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{8}{3} - 1 = \frac{19}{6} \end{aligned}$$

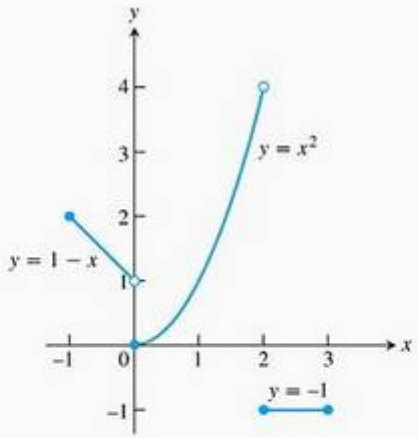


FIGURA 5.34 Funções contínuas por partes como esta são integradas parte por parte.

O teorema fundamental se aplica às funções contínuas por partes com a restrição esperada de que $(d/dx) \int_a^x f(t)\,dt$ seja igual a $f(x)$ somente nos valores de x em que f é contínua. Há uma restrição similar na regra de Leibniz, apresentada no último tópico desta seção de exercícios.

Esboce o gráfico das funções nos exercícios 11–16 e integre-as ao longo de seus domínios.

11. $f(x) = \begin{cases} x^{2/3}, & -8 \le x < 0 \\ -4, & 0 \le x \le 3 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & -4 \le x < 0 \\ x^2 - 4, & 0 \le x \le 3 \end{cases}$

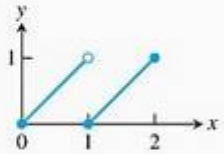
13. $g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ \operatorname{sen} \pi t, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$

14. $h(z) = \begin{cases} \sqrt{1 - z}, & 0 \le z < 1 \\ (7z - 6)^{-1/3}, & 1 \le z \le 2 \end{cases}$

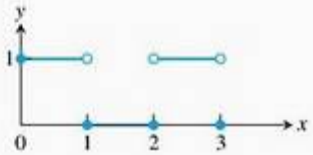
15. $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \le x < -1 \\ 1 - x^2, & -1 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

16. $h(r) = \begin{cases} r, & -1 \le r < 0 \\ 1 - r^2, & 0 \le r < 1 \\ 1, & 1 \le r \le 2 \end{cases}$

17. Determine o valor médio da função traçada na figura a seguir.



18. Determine o valor médio da função traçada na figura a seguir.



Limites

Determine os limites nos exercícios 19–22.

19. $\lim_{b \to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

20. $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \operatorname{tg}^{-1} t\,dt$

21. $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$

22. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(e^{1/n} + e^{2/n} + \cdots + e^{(n-1)/n} + e^{n/n} \right)$

Aproximando somas finitas com integrais

Em muitas aplicações práticas de cálculo, as integrais são usadas para aproximar somas finitas — o inverso do procedi-

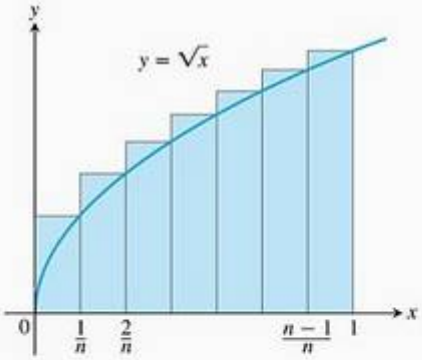
mento usual de usar somas finitas para aproximar integrais.

Por exemplo, vamos estimar a soma das raízes quadradas dos primeiros n inteiros positivos, $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \quad + \sqrt{n}$. A integral

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

é o limite das somas superiores

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$
$$= \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}$$



Portanto, quando n for grande, S_n ficará próximo de 2/3 e teremos

$$\text{Soma de raízes} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} = S_n \cdot n^{3/2} \approx \frac{2}{3}n^{3/2}$$

A tabela a seguir mostra qual precisão podemos esperar da aproximação.

Nº	Soma de raízes	$(2/3)n^{3/2}$	Erro relativo
10	22,468	21,082	1,386/22,468 ≈ 6%
50	239,04	235,70	1,4%
100	671,46	666,67	0,7%
1.000	21.097	21.082	0,07%

23. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5}{n^6}$$

mostrando que o limite é

$$\int_0^1 x^5\,dx$$

e calculando a integral.

24. Reveja o Exercício 23. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)$$

25. Seja $f(x)$ uma função contínua. Expresse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

como uma integral definida.

26. Use o resultado do Exercício 25 para calcular

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(2 + 4 + 6 + \ldots + 2n)$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{16}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \ldots + n^{15})$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\text{sen}\frac{\pi}{n} + \text{sen}\frac{2\pi}{n} + \text{sen}\frac{3\pi}{n} + \text{sen} + \ldots + \text{sen}\frac{n\pi}{n}\right)$.

O que podemos dizer sobre os limites a seguir?

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{17}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \ldots + n^{15})$

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{15}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \ldots + n^{15})$

27. (a) Mostre que a área A_n de um polígono regular de lados n em um círculo de raio r é

$$A_n = \frac{nr^2}{2}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}$$

(b) Determine o limite de A_n quando $n \to \infty$. Essa resposta é coerente com o que você sabe sobre a área de um círculo?

28. Seja

$$S_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3}.$$

Para calcular $\lim_{n\to\infty} S_n$, demonstre que

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

e interprete S_n como uma soma que aproxima a integral

$$\int_0^1 x^2\,dx.$$

(*Dica*: Divida [0, 1] em n intervalos de igual comprimento e escreva a soma usando os retângulos inscritos.)

Teoria e exemplos

29. Determine as áreas entre as curvas $y = 2(\log_2 x)/x$ e $y = 2(\log_4 x)/x$ e o eixo x de $x = 1$ até $x = e$. Qual é a razão entre a área maior e a menor?

30. Para qual $x > 0$ a seguinte igualdade é verdadeira: $x^{(x^x)} = (x^x)^x$? Justifique sua resposta.

31. Determine $f'(2)$ se $f(x) = e^{g(x)}$ e $g(x) = \int_2^x \frac{t}{1+t^4}\,dt$

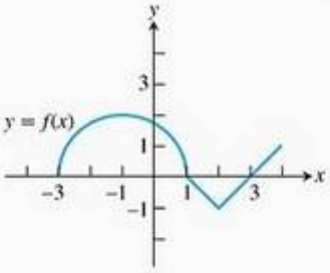
32. **(a)** Determine df/dx se

$$f(x) = \int_1^{e^x} \frac{2 \ln t}{t}\, dt$$

(b) Determine $f(0)$.

(c) O que você conclui sobre o gráfico de f? Justifique sua resposta.

33. **Uma função definida por uma integral** O gráfico de uma função f consiste em um semicírculo e dois segmentos de reta, como se vê a seguir. Seja $g(x) = \int_1^x f(t)\, dt$.



(a) Determine $g(1)$.

(b) Determine $g(3)$.

(c) Determine $g(-1)$.

(d) Determine todos os valores de x no intervalo aberto $(-3, 4)$ em que g tem um máximo relativo.

(e) Escreva uma equação para a reta tangente ao gráfico de g em $x = -1$.

(f) Determine a coordenada x de cada ponto de inflexão do gráfico de g no intervalo aberto $(-3, 4)$.

(g) Determine a imagem de g.

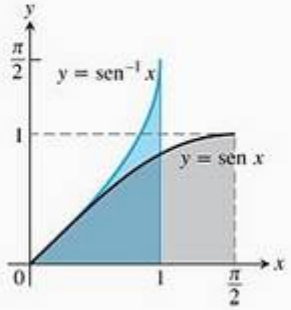
34. **Uma equação diferencial** Demonstre que $y = \operatorname{sen} x + \int_x^{\pi} \cos 2t\, dt + 1$ satisfaz simultaneamente as duas condições a seguir:

i. $y'' = -\operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x$

ii. $y = 1$ e $y' = -2$ quando $x = \pi$.

35. Use a figura a seguir para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$$

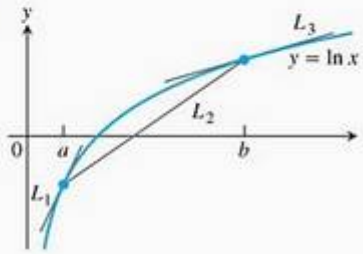


36. **A desigualdade de Napier** Eis duas provas pictóricas de que

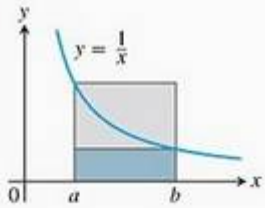
$$b > a > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}$$

Explique o que ocorre em cada caso.

(a)



(b)



(*Fonte*: Roger B. Nelson, *College Mathematics Journal*, v. 24, n. 2, mar. 1993, p. 165.)

Regra de Leibniz

Em aplicações práticas, às vezes encontramos funções como

$$f(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{x^2} (1 + t)\, dt \qquad \text{e} \qquad g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen} t^2\, dt$$

definidas por integrais que apresentam simultaneamente limites variáveis de integração superiores e inferiores. A primeira integral pode ser avaliada diretamente, mas a segunda, não. Entretanto, podemos determinar a derivada de qualquer uma das integrais pela fórmula chamada **regra de Leibniz**.

Regra de Leibniz

Se f for contínua em $[a, b]$ e se $u(x)$ e $v(x)$ forem funções deriváveis de x cujos valores situam-se em $[a, b]$, então

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}$$

A Figura 5.35 permite uma interpretação geométrica da regra de Leibniz. Ela mostra um tapete de comprimento variável $f(t)$ que está sendo enrolado à esquerda ao mesmo tempo x que está sendo desenrolado à direita. (Nessa interpretação, o tempo é x e não t). No instante x, o chão está coberto de $u(x)$ até $v(x)$. A taxa du/dx com que o tapete está sendo enrolado não precisa ser a mesma taxa dv/dx com que ele está sendo desenrolado. Em qualquer instante dado x, a área coberta pelo tapete é

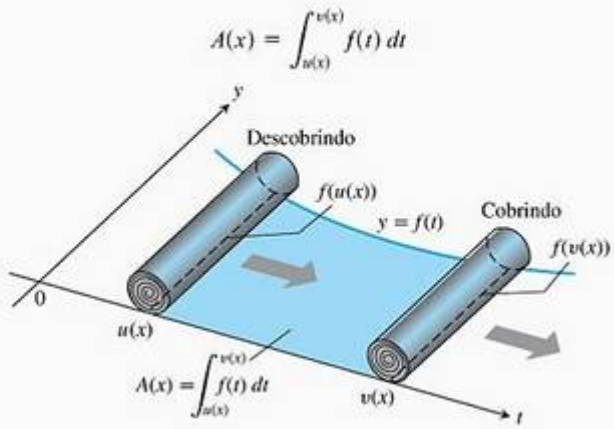


FIGURA 5.35 Enrolando e desenrolando um tapete: uma interpretação geométrica para a regra de Leibniz:

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

Com que taxa a área coberta está variando? No instante x, $A(x)$ está crescendo devido ao comprimento $f(v(x))$ do tapete desenrolando vezes a taxa dv/dx com que o tapete está sendo desenrolado. Ou seja, $A(x)$ está aumentando à taxa

$$f(v(x))\frac{dv}{dx}$$

Ao mesmo tempo, A está diminuindo à taxa

$$f(u(x))\frac{du}{dx}$$

o comprimento, na ponta que está sendo enrolada vezes a taxa du/dx. A taxa líquida de variação em A é

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

que é precisamente a regra de Leibniz.

Para demonstrar a regra, faça que F seja uma primitiva de f em $[a, b]$. Depois

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = F(v(x)) - F(u(x))$$

Derivando os dois lados dessa equação em relação a x obtemos a equação desejada:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\Big[F(v(x)) - F(u(x))\Big] \\ &= F'(v(x))\frac{dv}{dx} - F'(u(x))\frac{du}{dx} \qquad \text{Regra da cadeia.} \\ &= f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.\end{aligned}$$

Use a regra de Leibniz para determinar as derivadas das funções nos exercícios 37–44.

37. $f(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{1}{t}\,dt$

38. $f(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1 - t^2}\,dt$

39. $g(y) = \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \operatorname{sen} t^2\,dt$

40. $g(y) = \int_{\sqrt{y}}^{y^2} \frac{e^t}{t}\,dt$

41. $y = \int_{x^2/2}^{x^2} \ln \sqrt{t}\,dt$

42. $y = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[4]{x}} \ln t\,dt$

43. $y = \int_{0}^{\ln x} \operatorname{sen} e^t\,dt$

44. $y = \int_{e^{x\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t\,dt$

45. Use a regra de Leibniz para determinar o valor de x que maximiza o valor da integral

$$\int_{x}^{x+3} t(5 - t)\,dt$$

Problemas como esse surgem na teoria matemática das eleições políticas. Veja "The entry problem in a political race", de Steven J. Brams e Philip D. Straffin Jr., em *Political Equilibrium*, editado por Peter Ordeshook e Kenneth Shepfle (Boston: Kluwer-Nijhoff, 1982, p. 181-195).

Exercícios avançados

1. Dados os números reais $a_0, a_1, \ldots, a_n$ use o princípio da indução finita para mostrar que:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$$

A expressão anterior é chamada soma telescópica e será útil no tratamento das séries.

2. Os gregos já usavam poligonais para aproximar o comprimento de curvas, como veremos na Seção 6.3.

Para cada inteiro positivo n, inscreva um polígono regular de n lados no círculo de raio r. Mostre que o comprimento de um lado deste polígono é $l = 2r \operatorname{sen} \pi/n$. Calcule o perímetro deste polígono e mostre que seu limite para n tendendo a infinito coincide com o comprimento do círculo.

3. Uma generalização do teorema da média para integrais, útil na estimativa de erros de métodos numéricos, é: "sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$, com $g(x) \geq 0$ para

todo x neste intervalo. Então, existe c em (a, b) tal que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$."

Demonstre este resultado. O teorema ainda vale se $g(x) \leq 0$ para todo x neste intervalo? E se não for feita nenhuma hipótese sobre o sinal de g?

4. Uma generalização da integrabilidade de funções contínuas em $[a, b]$ é: "se f é limitada e contínua em todos os pontos de $[a, b]$, exceto em um número finito deles, então f é integrável em $[a, b]$". Como um exemplo desse teorema, demonstre, a partir da definição de função integrável, que a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } & x \neq \dfrac{a+b}{2} \\ 1, \text{ se } & x \neq \dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

definida em $[a, b]$, é integrável. Quanto vale sua integral?

Nos exercícios 5 a 8 decida se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, demonstre e se for falsa, diga por quê.

5. A função $f(x) = \int_a^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int_a^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$, para $x > 0$, é constante.

6. Se a função integrável f for periódica, de período p, isto é, $f(x) = f(x+p)$ para todo x real, então a função $g(x) = \int_x^{x+p} f(t)\,dt$ será constante.

7. Se f é uma função contínua com $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ então f é identicamente nula em $[a, b]$, ou seja, $f(x) = 0$ para todo x em $[a, b]$.

8. Se f é uma função integrável em $[a, b]$ com $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ então f é identicamente nula em $[a, b]$, ou seja, $f(x) = 0$ para todo x em $[a, b]$. (*Sugestão*: ver Exercício 4 acima.)

9. Mostre que se f for uma função integrável par, então $\int_0^x f(t)\,dt$ será ímpar e que se f for ímpar $\int_0^x f(t)\,dt$ será par. Se $a > 0$, é verdade que se f for par $\int_a^x f(t)\,dt$ será ímpar e que se f for ímpar $\int_a^x f(t)\,dt$ será par?

10. Seja $G(x) = \int_0^x \left(s \int_0^s f(t)\,dt \right) ds$, em que f tem uma derivada contínua. Calcule $G(0)$, $G'(0)$, $G''(0)$ e $G'''(0)$.

11. Determine uma função g contínua tal que $g(x) = 1 + \int_0^x tg(t)\,dt$.

12. Encontre a área da região delimitada por $x = 0$, $x = \pi/4$, $y = \text{sen}^4 x$ e $y = \cos^2 x$. (*Sugestão*: $\text{sen}^4 x = (\text{sen}^2 x)^2$.)

Projetos de aplicação de tecnologia

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Usando somas de Riemann para estimar áreas, volumes e comprimentos de curvas

Visualize e aproxime áreas e volumes na Parte I.

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Somas de Riemann, integrais definidas e o teorema fundamental do cálculo

As partes I, II e III apresentam somas de Riemann e integrais definidas. A Parte IV dá continuidade a esse estudo usando o teorema fundamental para resolver problemas investigados antes.

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Coletores de chuva, elevadores e foguetes

A Parte I usa exemplos extraídos do próprio capítulo para ilustrar que a área sob uma curva é igual à área de um retângulo apropriado. Você vai calcular a quantidade de água acumulada em bacias de diferentes formatos conforme a bacia vai sendo preenchida ou esvaziada.

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Movimento ao longo de uma reta, parte II

Você vai observar o formato de um gráfico por meio de impressionantes animações das relações de derivação entre posição, velocidade e aceleração. As figuras do texto podem ser animadas com esse software.

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Curvatura de vigas

Estude diferentes formatos e curvaturas de vigas, determine sua deflexão máxima, sua concavidade e pontos de inflexão, e interprete os resultados em termos da compressão e tensão da viga.

6 Aplicações de integrais definidas

RESUMO No Capítulo 5, descobrimos a relação entre somas de Riemann

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

associadas a uma partição P do intervalo fechado finito $[a, b]$ e o processo de integração. Descobrimos que, para uma função contínua f em $[a, b]$, o limite de S_P quando a norma da partição $\|P\|$ tende a zero é o número

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f. Aplicamos isso aos problemas de cálculo da área entre o eixo x e a curva de $y = f(x)$, sendo $a \le x \le b$, e de determinação da área entre duas curvas.

Neste capítulo, ampliaremos tais aplicações e passaremos a determinar volumes, comprimentos de curvas planas, centros de massa, áreas de superfícies de revolução, trabalho e forças de fluidos contra paredes planas. Definiremos tudo isso como limites de somas de Riemann de funções contínuas em intervalos fechados — isto é, como integrais definidas que podem ser calculadas por meio do teorema fundamental do cálculo.

6.1 Volumes por fatiamento e rotação em torno de um eixo

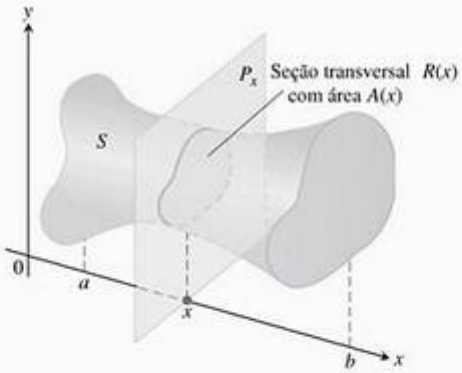


FIGURA 6.1 Uma seção transversal do sólido S formada pela interseção entre S e um plano P_x perpendicular ao eixo x passando pelo ponto x no intervalo $[a, b]$.

Nesta seção, definiremos volumes de sólidos cujas seções transversais são regiões planas. Uma **seção transversal** de um sólido S é a região plana formada pela interseção entre S e um plano (Figura 6.1).

Suponha que desejamos determinar o volume de um sólido S como o da Figura 6.1. Começamos estendendo a definição de cilindro dada pela geometria clássica para sólidos cilíndricos com bases arbitrárias (Figura 6.2). Se o sólido cilíndrico tem uma área de base A e altura h, ambas conhecidas, então o volume do volume cilíndrico é

$$\text{Volume} = \text{Área} \times \text{Altura} = A \cdot h$$

FIGURA 6.2 Sempre definimos o volume de um sólido cilíndrico como sua área de base vezes sua altura.

Essa equação serve de base para definirmos os volumes de muitos sólidos não cilíndricos usando o *método do fatiamento*.

Se a seção transversal do sólido S em cada ponto x no intervalo $[a, b]$ é uma região $R(x)$ de área $A(x)$, e A é uma função contínua de x, podemos definir e calcular o volume do sólido S como uma integral definida, da maneira a seguir.

Dividimos $[a, b]$ em subintervalos de largura (comprimento) Δx_k e fatiamos o sólido (como faríamos com um pão) por planos perpendiculares ao eixo x nos pontos de partição $a = x_0 < x_1 < \quad < x_n = b$. Os planos P_{x_k}, perpendiculares ao eixo x nos pontos de partição, dividem S em "fatias" finas (como as fatias de um pão de fôrma). A Figura 6.3 mostra uma fatia típica. Aproximamos a fatia situada entre o plano em x_{k-1} e o plano em x_k usando um sólido cilíndrico com área de base $A(x_k)$ e altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (Figura 6.4). O volume V_k desse sólido cilíndrico é $A(x_k) \cdot \Delta x_k$, aproximadamente o mesmo volume da fatia:

$$\text{Volume da } k\text{-ésima fatia} \approx V_k = A(x_k)\,\Delta x_k.$$

O volume V do sólido inteiro S é, então, aproximado pela soma desses volumes cilíndricos.

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\,\Delta x_k$$

Isso é uma soma de Riemann para a função $A(x)$ em $[a, b]$. Esperamos que as aproximações dessas somas melhorem à medida que as normas de partição de $[a, b]$ tendam a zero. Se levarmos em conta uma partição de $[a, b]$ em n subintervalos com $\|P\| \to 0$, teremos

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\,\Delta x_k = \int_a^b A(x)\,dx$$

Portanto, definimos a integral, que é o limite dessas somas, como o volume do sólido S.

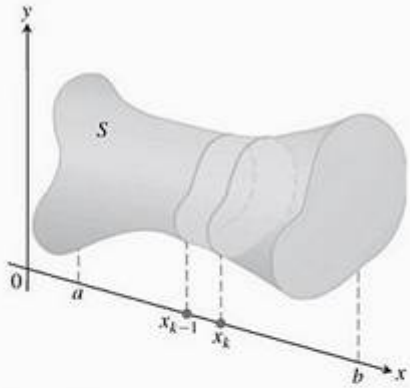


FIGURA 6.3 Uma típica fatia fina do sólido S.

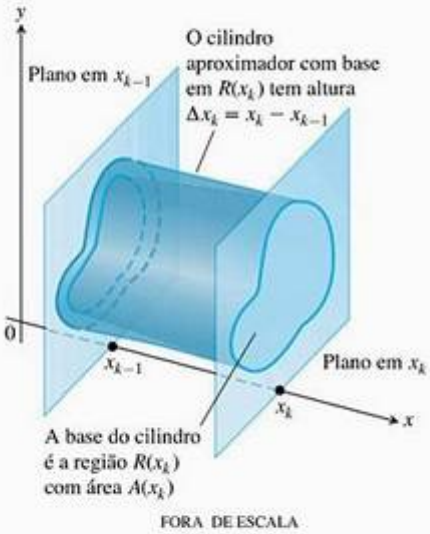


FIGURA 6.4 A fatia fina do sólido mostrada na Figura 6.3 é aproximada pelo sólido cilíndrico com base $R(x_k)$ que tem área $A(x_k)$ e altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Definição **Volume**

O **volume** de um sólido compreendido entre os planos $x = a$ e $x = b$ e cuja área da seção transversal por x é uma função integrável $A(x)$ é a integral de a a b de A:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

Essa definição se aplica sempre que $A(x)$ for contínua ou, de modo mais genérico, quando ela for integrável. Para aplicar essa fórmula no cálculo do volume de um sólido, siga estes passos.

Calculando o volume de um sólido

1. *Esboce o sólido e uma seção transversal típica.*
2. *Encontre uma fórmula para* $A(x)$, a área de uma seção transversal típica.
3. *Encontre os limites de integração.*
4. *Integre* $A(x)$ usando o teorema fundamental.

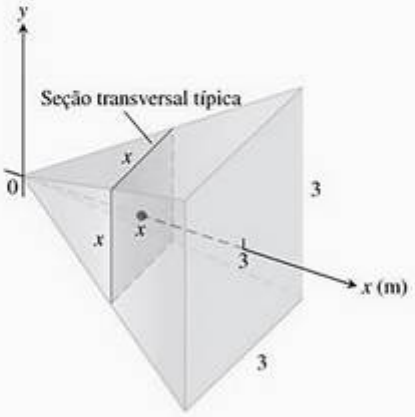


FIGURA 6.5 As seções transversais da pirâmide do Exemplo 1 são quadradas.

EXEMPLO 1 Volume de uma pirâmide

Uma pirâmide com 3 m de altura tem uma base quadrada com 3 m de lado. A seção transversal da pirâmide, perpendicular à altura x m abaixo do vértice, é um quadrado com x m de lado. Determine o volume da pirâmide.

SOLUÇÃO

1. *Um esboço.* Desenhamos a pirâmide com sua altura ao longo do eixo x e seu vértice na origem e incluímos uma seção transversal típica (Figura 6.5).
2. *Uma fórmula para $A(x)$.* A seção transversal em x é um quadrado com x metros de lado, portanto sua área será
$$A(x) = x^2$$
3. *Os limites de integração.* Os quadrados vão de $x = 0$ a $x = 3$.
4. *Integre para determinar o volume.*
$$V = \int_0^3 A(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^3 = 9\ \text{m}^3$$

Companion Website

Biografia histórica

Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

EXEMPLO 2 Princípio de Cavalieri

O princípio do volume de Cavalieri diz que sólidos com mesma altura e com áreas das seções transversais iguais em cada altura têm o mesmo volume (Figura 6.6). Isso se segue imediatamente à definição de volume, pois a função área de seção transversal $A(x)$ e o intervalo $[a, b]$ são iguais para ambos os sólidos.

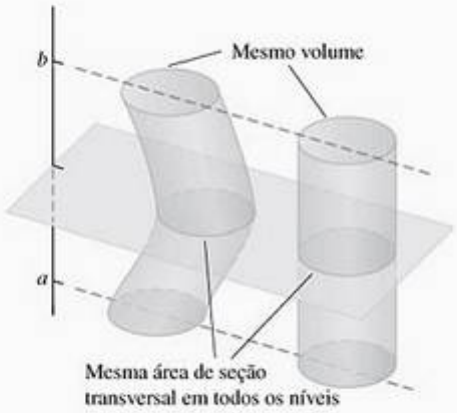


FIGURA 6.6 *Princípio de Cavalieri*: esses sólidos têm o mesmo volume, o que pode ser ilustrado usando pilhas de moedas (Exemplo 2).

EXEMPLO 3 Volume de uma cunha

Uma cunha curva foi obtida por meio do corte de um cilindro de raio 3 por dois planos. Um deles é perpendicular ao eixo do cilindro. O segundo cruza o primeiro, formando um ângulo de 45° no centro do cilindro. Determine o volume da cunha.

SOLUÇÃO Desenhamos a cunha e esboçamos uma seção transversal típica perpendicular ao eixo x (Figura 6.7). A seção transversal em x é um retângulo de área

$$A(x) = (\text{altura})(\text{largura}) = (x)(2\sqrt{9-x^2})$$
$$= 2x\sqrt{9-x^2}$$

Os retângulos vão de $x = 0$ a $x = 3$, portanto, temos

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx$$
$$= -\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big]_0^3$$
$$= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2}$$
$$= 18$$

Seja $u = 9 - x^2$, $du = -2x\,dx$, integre e substitua de volta.

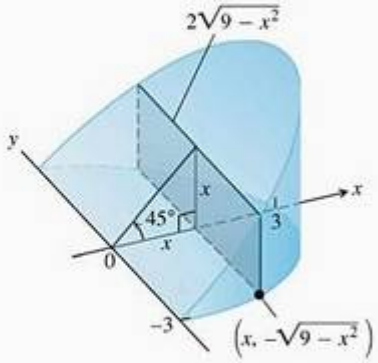


FIGURA 6.7 A cunha do Exemplo 3, fatiada perpendicularmente ao eixo x. As seções transversais são retângulos.

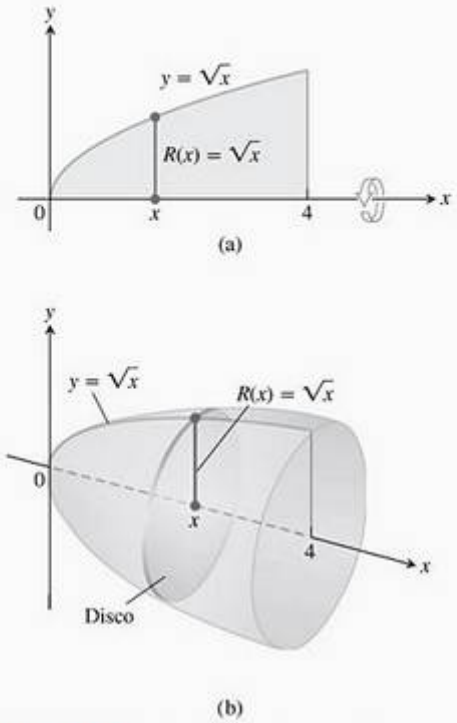


FIGURA 6.8 A região (a) e o sólido de revolução (b) do Exemplo 4.

Sólidos de revolução: o método do disco

Um sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de um eixo no plano desse eixo é chamado **sólido de revolução**. Para determinar o volume de um sólido como aquele mostrado na Figura 6.8, precisamos somente observar que a área da seção transversal $A(x)$ é um disco de raio $R(x)$, a distância entre a fronteira da região bidimensional e o eixo de revolução. A área é, portanto

$$A(x) = \pi(\text{raio})^2 = \pi[R(x)]^2$$

Assim, graças à definição de volume, temos

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx$$

Esse método para calcular o volume de um sólido de revolução geralmente é denominado **método do disco**, pois uma seção transversal é um disco circular de raio $R(x)$.

EXEMPLO 4 Um sólido de revolução (rotação em torno do eixo x)

A região entre a curva $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, e o eixo x gira em torno desse eixo para gerar um sólido. Determine seu volume.

SOLUÇÃO Desenhamos figuras mostrando a região, um raio típico e o sólido gerado (Figura 6.8). O volume é

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx \\ &= \int_0^4 \pi\left[\sqrt{x}\right]^2 dx \qquad R(x) = \sqrt{x} \\ &= \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi\frac{(4)^2}{2} = 8\pi \end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Volume de uma esfera

O círculo

$$x^2 + y^2 = a^2$$

é girado em torno do eixo x para gerar uma esfera. Determine seu volume.

SOLUÇÃO Imaginamos a esfera cortada em finas fatias por planos perpendiculares ao eixo x (Figura 6.9). A área da seção transversal em um ponto típico x entre $-a$ e a é

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(a^2 - x^2)$$

Portanto, o volume é

$$V = \int_{-a}^{a} A(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)\,dx = \pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a^3$$

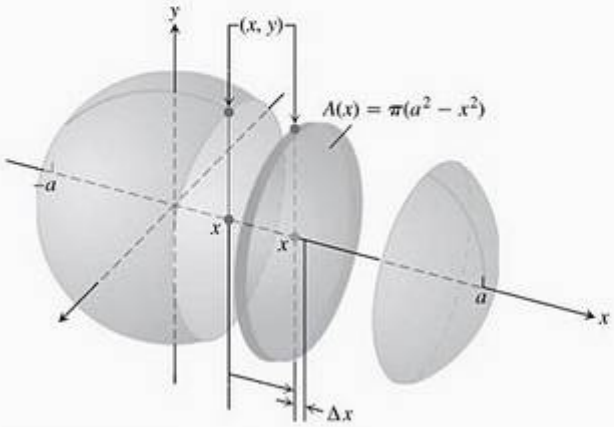


FIGURA 6.9 A esfera gerada pela rotação do círculo $x^2 + y^2 = a^2$ em torno do eixo x. O raio é $R(x) = y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (Exemplo 5).

O eixo de revolução no próximo exemplo não é o eixo x, mas a regra para calcular o volume é a mesma. Integre $\pi(\text{raio})^2$ entre os limites apropriados.

EXEMPLO 6 Um sólido de revolução (rotação em torno da reta $y = 1$)

Determine o volume do sólido obtido com a rotação, em torno da reta $y = 1$, da região definida por $y = \sqrt{x}$ e pelas retas $y = 1$ e $x = 4$.

SOLUÇÃO Desenhamos figuras mostrando a região, um raio típico e o sólido gerado (Figura 6.10). O volume é

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi[R(x)]^2\,dx \\ &= \int_1^4 \pi\left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx \\ &= \pi\int_1^4 \left[x - 2\sqrt{x} + 1\right] dx \\ &= \pi\left[\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + x\right]_1^4 = \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

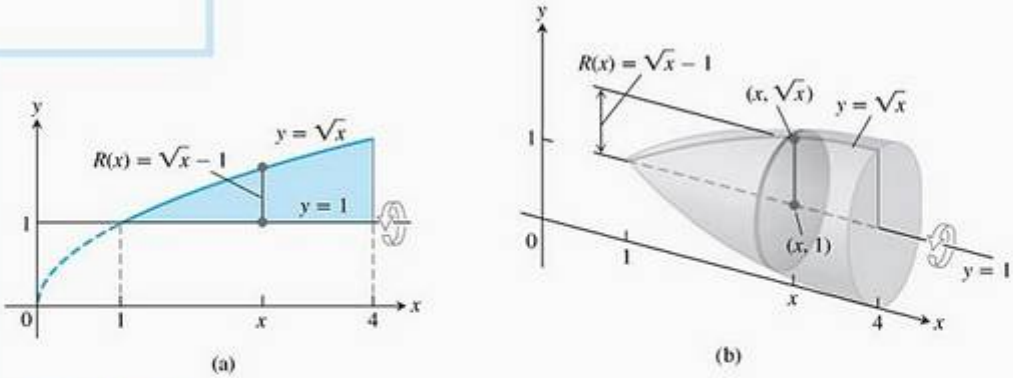


FIGURA 6.10 A região (a) e o sólido de revolução (b) do Exemplo 6.

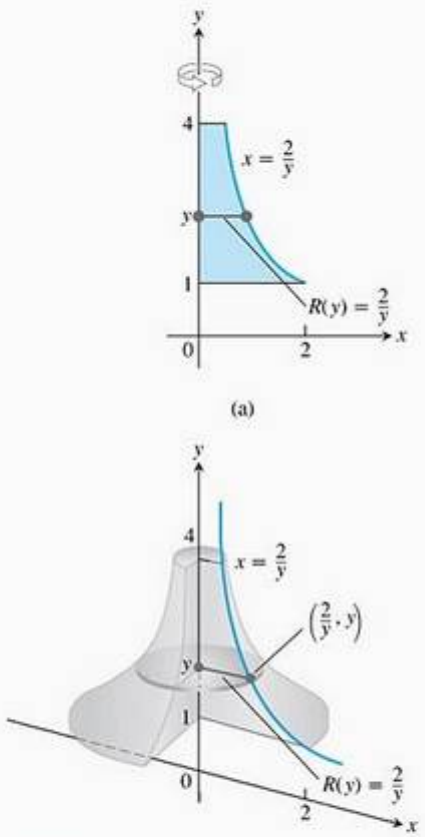


FIGURA 6.11 A região (a) e parte do sólido de revolução (b) do Exemplo 7.

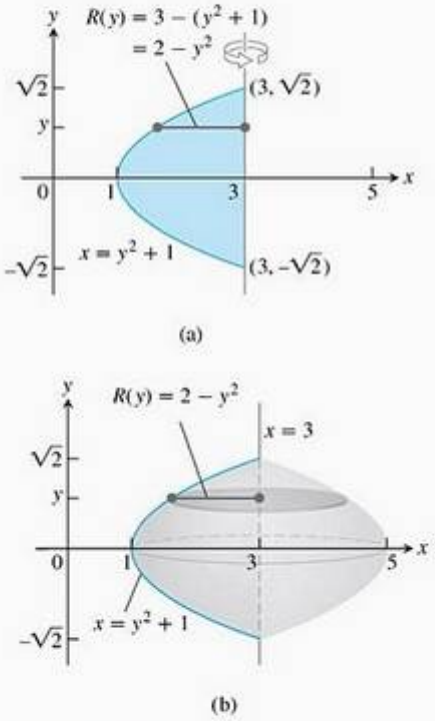


FIGURA 6.12 A região (a) e o sólido de revolução (b) do Exemplo 8.

Para determinar o volume de um sólido obtido com a rotação, em torno do eixo y, de uma região compreendida entre o eixo y e uma curva $x = R(y)$, $c \le y \le d$, usamos o mesmo método, substituindo x por y. Nesse caso, a seção transversal circular é

$$A(y) = \pi[\text{raio}]^2 = \pi[R(y)]^2$$

EXEMPLO 7 Revolução em torno do eixo y

Determine o volume do sólido obtido com a rotação, em torno do eixo y, da região compreendida entre o eixo y e a curva $x = 2/y$, $1 \le y \le 4$.

SOLUÇÃO Desenhamos figuras mostrando a região, um raio típico e o sólido gerado (Figura 6.11). O volume é

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi[R(y)]^2\,dy \\ &= \int_1^4 \pi\left(\frac{2}{y}\right)^2 dy \\ &= \pi\int_1^4 \frac{4}{y^2}\,dy = 4\pi\left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 4\pi\left[\frac{3}{4}\right] \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

EXEMPLO 8 Revolução em torno de um eixo vertical

Determine o volume do sólido obtido com a rotação, em torno da reta $x = 3$, da região compreendida entre a parábola $x = y^2 + 1$ e a reta $x = 3$.

SOLUÇÃO Desenhamos figuras mostrando a região, um raio típico e o sólido gerado (Figura 6.12). O volume é

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[R(y)]^2\,dy \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[2 - y^2]^2\,dy \qquad \begin{aligned} R(y) &= 3 - (y^2 + 1) \\ &= 2 - y^2 \end{aligned} \\ &= \pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4]\,dy \\ &= \pi\left[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

Sólidos de revolução: o método do anel

Se a região que giramos para gerar um sólido não atingir ou cruzar o eixo de revolução, o sólido resultante terá um orifício no meio (Figura 6.13). As seções transversais perpendiculares ao eixo de revolução serão anéis (a superfície circular sombreada na Figura 6.13), e não discos. As dimensões de um anel típico são

Raio externo: $R(x)$ Raio interno: $r(x)$

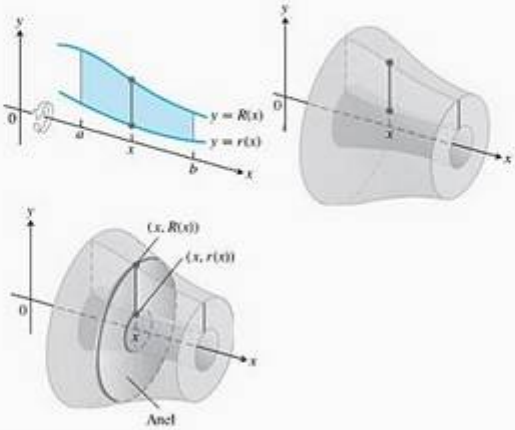


FIGURA 6.13 As seções transversais do sólido de revolução gerado aqui são anéis, não discos, portanto a integral $\int_a^b A(x)\,dx$ tem uma fórmula ligeiramente diferente.

A área do anel é

$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$

Conseqüentemente, de acordo com a definição de volume, temos

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx$$

Esse método para calcular o volume de um sólido de revolução é chamado **método do anel**, pois a fatia é um anel circular de raio exterior $R(x)$ e raio interior $r(x)$.

EXEMPLO 9 Uma seção transversal em forma de anel (rotação em torno do eixo x)

A região limitada pela curva $y = x^2 + 1$ e pela reta $y = -x + 3$ gira em torno do eixo x para gerar um sólido. Determine o volume do sólido.

SOLUÇÃO

1. Desenhe a região e esboce um segmento de reta que a atravesse perpendicularmente ao eixo de revolução (o segmento cinza da Figura 6.14).
2. Determine os raios interno e externo do anel que seria gerado pelo segmento de reta se ele girasse em torno do eixo x juntamente com a região. Esses raios são as distâncias dos extremos dos segmentos ao eixo de revolução (Figura 6.14).

$$\text{Raio externo: } R(x) = -x + 3$$
$$\text{Raio interno: } r(x) = x^2 + 1$$

3. Procure os limites de integração determinando as abscissas dos pontos de interseção da curva com a reta na Figura 6.14a.

$$x^2 + 1 = -x + 3$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$(x + 2)(x - 1) = 0$$
$$x = -2, \quad x = 1$$

4. Calcule a integral do volume.

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx \\ &= \int_{-2}^1 \pi((-x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2)\,dx \qquad \text{Valores obtidos nos passos 2 e 3.} \\ &= \int_{-2}^1 \pi(8 - 6x - x^2 - x^4)\,dx \\ &= \pi\left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^1 = \frac{117\pi}{5} \end{aligned}$$

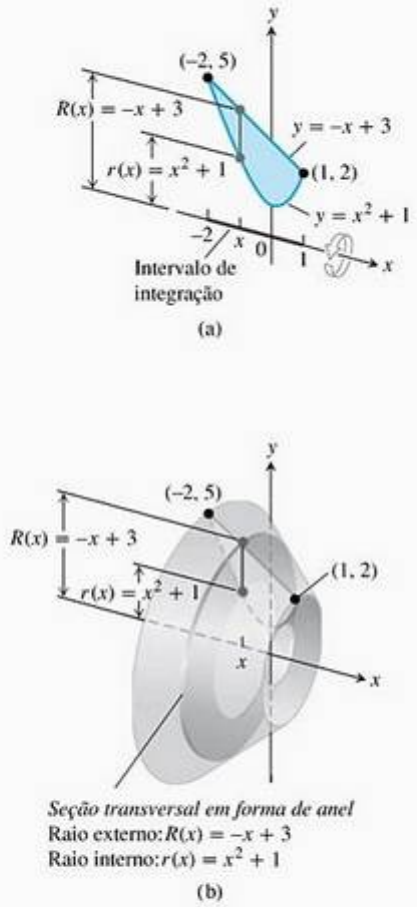


FIGURA 6.14 (a) A região do Exemplo 9 cortada por um segmento de reta perpendicular ao eixo de revolução. (b) Quando a região gira em torno do eixo x, o segmento de reta gera um anel.

Para determinar o volume do sólido obtido com a rotação de uma região em torno do eixo y, usamos o mesmo procedimento do Exemplo 9, porém integramos em relação a y, em vez de x. Nessa situação, a reta cuja rotação gera um anel típico é perpendicular ao eixo y (o eixo de revolução), e os raios externo e interno do anel são funções de y.

EXEMPLO 10 Seção transversal em forma de anel (rotação em torno do eixo y)

A região compreendida entre a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 2x$ no primeiro quadrante gira em torno do eixo y para gerar um sólido. Determine o volume do sólido.

SOLUÇÃO Primeiro, esboce a região e trace um segmento de reta que a cruze perpendicularmente ao eixo de revolução, nesse caso, o eixo y (Figura 6.15a).

Os raios do anel gerado pelo segmento de reta são $R(y) = \sqrt{y}$, $r(y) = y/2$ (Figura 6.15).

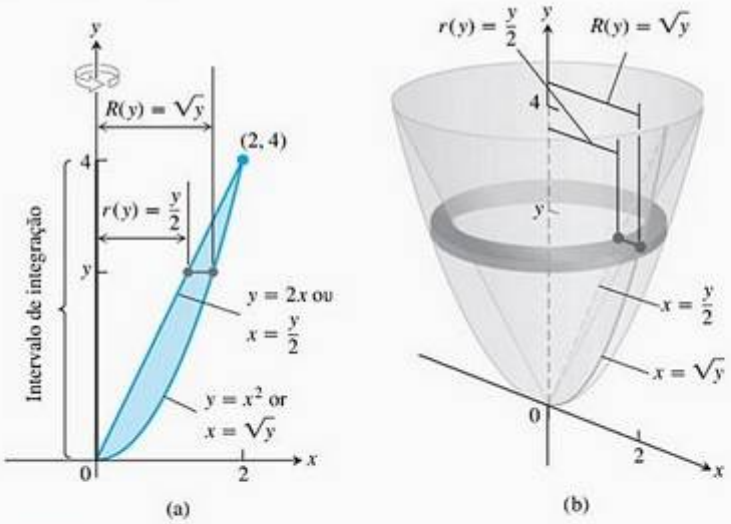


FIGURA 6.15 (a) A região sendo girada em torno do eixo y, os raios do anel e os limites de integração do Exemplo 10. (b) O anel gerado pela rotação do segmento de reta da parte (a).

A reta e a parábola se cortam em $y = 0$ e $y = 4$, portanto os limites de integração são $c = 0$ e $d = 4$. Integramos para determinar o volume:

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\, dy \\ &= \int_0^4 \pi\left(\left[\sqrt{y}\right]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right) dy \\ &= \pi\int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

Resumo

Em todos os quatro exemplos, independentemente de como a área da seção transversal $A(x)$ de uma fatia típica foi determinada, a definição de volume como a integral definida $V = \int_a^b A(x)\, dx$ esteve no centro de nossos cálculos.

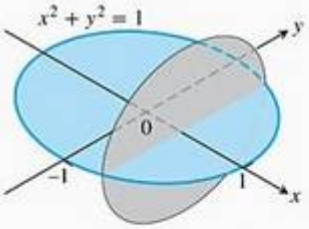
Exercícios 6.1

Áreas de seção transversal

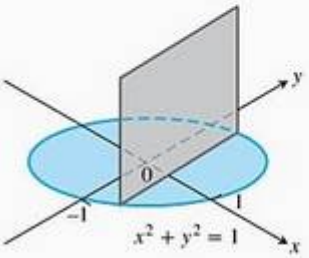
Nos exercícios 1 e 2, encontre uma fórmula para a área $A(x)$ das seções transversais do sólido perpendiculares ao eixo x.

1. O sólido situa-se entre planos perpendiculares ao eixo x em $x = -1$ e $x = 1$. Em cada caso, as seções transversais perpendiculares ao eixo x, entre esses planos, vão do semicírculo $y = -\sqrt{1-x^2}$ ao semicírculo $y = -\sqrt{1-x^2}$.

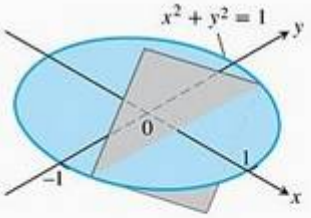
   (a) As seções transversais são discos circulares com diâmetros no plano xy.



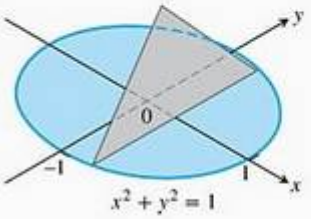
   (b) As seções transversais são quadrados com bases no plano xy.



   (c) As seções transversais são quadrados com diagonais no plano xy. (O comprimento da diagonal de um quadrado é $\sqrt{2}$ vezes o comprimento de seus lados.)

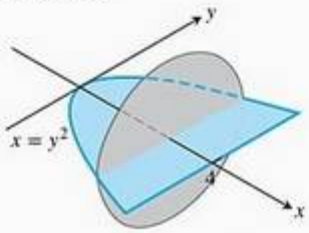


   (d) As seções transversais são triângulos eqüiláteros com bases no plano xy.

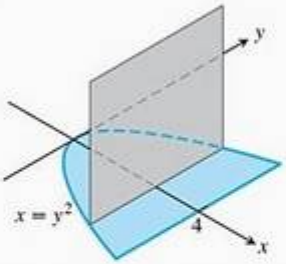


2. O sólido situa-se entre planos perpendiculares ao eixo x em $x = 0$ e $x = 4$. As seções transversais perpendiculares ao eixo x, entre esses planos, vão da parábola $y = -\sqrt{x}$ à parábola $y = -\sqrt{x}$.

   (a) As seções transversais são discos circulares com diâmetros no plano xy.



   (b) As seções transversais são quadrados com bases no plano xy.



   (c) As seções transversais são quadrados com diagonais no plano xy.

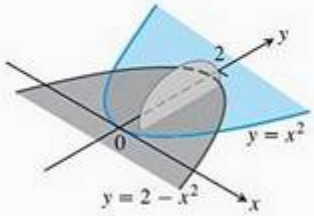
   (d) As seções transversais são triângulos eqüiláteros com bases no plano xy.

Volumes por fatiamento

Determine os volumes dos sólidos nos exercícios 3–12.

3. O sólido situa-se entre planos perpendiculares ao eixo x em $x = 0$ e $x = 4$. As seções transversais perpendiculares ao eixo x, no intervalo $0 \le x \le 4$, são quadrados cujas diagonais vão da parábola $y = -\sqrt{x}$ à parábola $y = -\sqrt{x}$.

4. O sólido situa-se entre planos perpendiculares ao eixo x em $x = -1$ e $x = 1$. As seções transversais perpendiculares ao eixo x são discos circulares cujos diâmetros vão da parábola $y = x^2$ à parábola $y = 2 - x^2$.

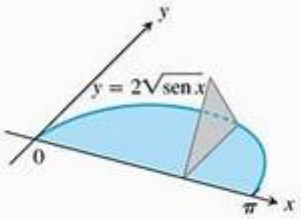


5. O sólido situa-se entre planos perpendiculares ao eixo x em $x = -1$ e $x = 1$. As seções transversais perpendiculares ao eixo x, entre esses planos, são quadrados cujas bases vão do semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$ ao semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$.

6. O sólido situa-se entre planos perpendiculares ao eixo x em $x = -1$ e $x = 1$. As seções transversais perpendiculares ao eixo x, entre esses planos, são quadrados cujas diagonais vão do semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$ ao semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$.

7. A base de um sólido é a região entre a curva $y = 2\sqrt{\operatorname{sen} x}$ e o intervalo $[0, \pi]$ no eixo x. As seções transversais perpendiculares ao eixo x são

   (a) triângulos eqüiláteros com bases que vão do eixo x à curva, como mostra a figura



   (b) quadrados com bases que vão do eixo x à curva.

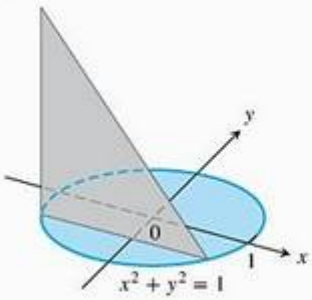
8. O sólido situa-se entre planos perpendiculares ao eixo x em $x = -\pi/3$ e $x = \pi/3$. As seções transversais perpendiculares ao eixo x são

   (a) discos circulares com diâmetros que vão da curva $y = \operatorname{tg} x$ à curva $y = \sec x$.

   (b) quadrados cujas bases vão da curva $y = \operatorname{tg} x$ à curva $y = \sec x$.

9. O sólido situa-se entre planos perpendiculares ao eixo y em $y = 0$ e $y = 2$. As seções transversais perpendiculares ao eixo y são discos circulares com diâmetros que vão do eixo y à parábola $x = \sqrt{5y^2}$.

10. A base do sólido é o disco $x^2 + y^2 \leq 1$. As seções transversais formadas por planos perpendiculares ao eixo y entre $y = -1$ e $y = 1$ são triângulos retângulos isósceles com um cateto no disco.



11. O sólido situa-se entre planos perpendiculares ao eixo x em $x = -1$ e $x = 1$. As seções transversais perpendiculares ao eixo x são

   (a) círculos cujos diâmetros se estendem da curva à curva $y = -1/\sqrt{1 + x^2}$.

   (b) quadrados verticais cujos lados da base vão da curva $y = -1/\sqrt{1 + x^2}$ à curva $y = -1/\sqrt{1 + x^2}$.

12. O sólido situa-se entre planos perpendiculares ao eixo x em $x = -\sqrt{2}/2$ e $x = \sqrt{2}/2$. As seções transversais perpendiculares ao eixo x são

   (a) círculos cujos diâmetros se estendem do eixo x à curva $y = 2/\sqrt[4]{1 - x^2}$.

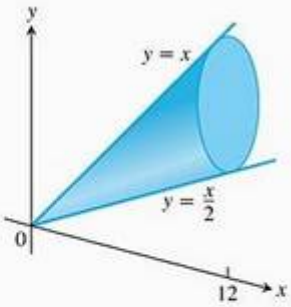
   (b) quadrados cujas diagonais se estendem do eixo x à curva $y = 2/\sqrt[4]{1 - x^2}$.

13. **Um sólido torcido** Um quadrado de comprimento de lado s situa-se em um plano perpendicular a uma reta L. Um vértice do quadrado situa-se em L. À medida que esse quadrado percorre uma distância h ao longo de L, ele faz uma revolução em torno de L para gerar uma coluna semelhante a um saca-rolhas com seções transversais quadradas.

   (a) Determine o volume da coluna.

   (b) Qual será o volume se o quadrado girar duas vezes em vez de uma? Justifique sua resposta.

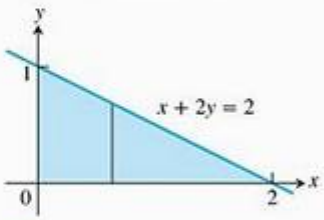
14. **Princípio de Cavalieri** Um sólido situa-se entre planos perpendiculares ao eixo x em $x = 0$ e $x = 12$. As seções transversais perpendiculares ao eixo x são discos circulares cujos diâmetros vão da reta $y = x/2$ à reta $y = x$, como mostra a figura a seguir. Explique por que o sólido tem o mesmo volume que um cone circular reto com raio da base 3 e altura 12.



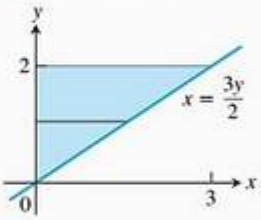
Volumes pelo método do disco

Nos exercícios 15–18, determine o volume do sólido obtido com a rotação da região sombreada em torno do eixo dado.

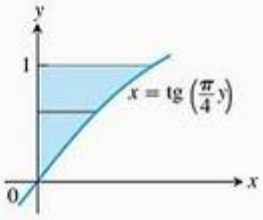
15. Em torno do eixo x



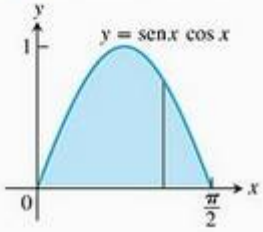
16. Em torno do eixo y



17. Em torno do eixo y



18. Em torno do eixo x



Nos exercícios 19–28, determine o volume dos sólidos obtidos com a rotação, em torno do eixo x, das regiões limitadas pelas retas e curvas indicadas.

19. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 2$

20. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 2$

21. $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0$

22. $y = x - x^2, \quad y = 0$

23. $y = \sqrt{\cos x}, \quad 0 \le x \le \pi/2, \quad y = 0, \quad x = 0$

24. $y = \sec x, \quad y = 0, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$

25. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

26. A região entre a curva $y = \sqrt{\operatorname{cotg} x}$ e o eixo x de $x = \pi/6$ até $x = \pi/2$.

27. A região entre a curva $y = 1/(2\sqrt{x})$ e o eixo x de $x = 1/4$ até $x = 4$.

28. A região delimitada pelo eixo x e um arco do ciclóide $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$. (*Dica*: $dV = \pi y^2\,dx = \pi y^2\,(dx/d\theta)d\theta$.)

Nos exercícios 29 e 30, determine o volume do sólido obtido com a rotação da região em torno da reta dada.

29. A região, no primeiro quadrante, limitada superiormente pela reta $y = \sqrt{2}$, inferiormente pela curva $y = \sec x \operatorname{tg} x$ e à esquerda pelo eixo y, em torno da reta $y = \sqrt{2}$.

30. A região, no primeiro quadrante, limitada superiormente pela reta $y = 2$, inferiormente pela curva $y = 2 \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi/2$, e à esquerda pelo eixo y, em torno da reta $y = 2$.

Nos exercícios 31–36, determine o volume dos sólidos obtidos com a rotação, em torno do eixo y, das regiões limitadas pelas retas e curvas.

31. A região delimitada por

$$x = \sqrt{5}y^2, \quad x = 0, \quad y = -1, \quad y = 1$$

32. A região delimitada por $x = y^{3/2}, \quad x = 0, \quad y = 2$

33. A região delimitada por $x = \sqrt{2 \operatorname{sen} 2y}, \quad 0 \le y/\le \pi\ 2, \quad x = 0$

34. A região delimitada por $x = \sqrt{\cos(\pi y/4)}, \quad -2 \le y \le 0, \quad x = 0$

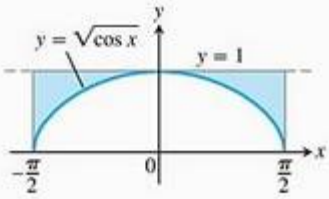
35. A região no primeiro quadrante delimitada pelos eixos de coordenadas, pela reta $y = 3$ e pela curva $x = 2/\sqrt{y+1}$.

36. $x = \sqrt{2y}\ /(y^2 + 1), \quad x = 0, \quad y = 1$

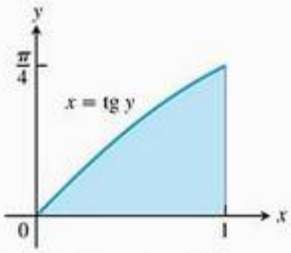
Volumes pelo método do anel

Nos exercícios 37 e 38, determine o volume dos sólidos obtidos com a rotação das regiões sombreadas em torno dos eixos indicados.

37. O eixo x



38. O eixo y



Nos exercícios 39–44, determine o volume dos sólidos obtidos com a rotação, em torno do eixo x, das regiões limitadas pelas retas e curvas.

39. $y = x, \quad y = 1, \quad x = 0$

40. $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2, \quad x = 0$

41. $y = x^2 + 1, \quad y = x + 3$

42. $y = 4 - x^2, \quad y = 2 - x$

43. $y = \sec x, \quad y = \sqrt{2}, \quad -\pi/4 \le x \le \pi/4$

44. $y = \sec x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad x = 0, \quad x = 1$

Nos exercícios 45–48, determine o volume do sólido obtido com a rotação de cada região em torno do eixo y.

45. A região delimitada pelo triângulo com vértices em (1, 0), (2, 1) e (1, 1).

46. A região delimitada pelo triângulo com vértices em (0, 1), (1, 0) e (1, 1).

47. A região, no primeiro quadrante, limitada superiormente pela parábola $y = x^2$, inferiormente pelo eixo x e à direita pela reta $x = 2$.

48. A região, no primeiro quadrante, limitada à esquerda pelo círculo $x^2 + y^2 = 3$, à direita pela reta $x = \sqrt{3}$ e superiormente pela reta $y = \sqrt{3}$.

Nos exercícios 49 e 50, determine o volume do sólido obtido com a rotação de cada região em torno do eixo dado.

49. A região, no primeiro quadrante, limitada superiormente pela curva $y = x^2$, inferiormente pelo eixo x e à direita pela reta $x = 1$, em torno da reta $x = -1$.

50. A região, no segundo quadrante, limitada superiormente pela curva $y = -x^3$, inferiormente pelo eixo x e à esquerda pela reta $x = -1$, em torno da reta $x = -2$.

Volumes de sólidos de revolução

51. Determine o volume do sólido obtido com a rotação da região limitada por $y = \sqrt{x}$ e pelas retas $y = 2$ e $x = 0$ em torno

(a) do eixo x.

(b) do eixo y.

(c) da reta $y = 2$.

(d) da reta $x = 4$.

52. Determine o volume do sólido obtido com a rotação da região triangular limitada pelas retas $y = 2x$, $y = 0$ e $x = 1$, em torno

(a) da reta $x = 1$.

(b) da reta $x = 2$.

53. Determine o volume do sólido obtido com a rotação da região limitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $y = 1$ em torno

(a) da reta $y = 1$.

(b) da reta $y = 2$.

(c) da reta $y = -1$.

54. Por integração, determine o volume do sólido obtido com a rotação da região triangular com vértices $(0, 0)$, $(b, 0)$ e $(0, h)$ em torno

(a) do eixo x.

(b) do eixo y.

Teoria e aplicações

55. O volume de um toro O disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ gira em torno da reta $x = b$ $(b > a)$ para gerar um sólido com a forma de uma rosquinha e chamado *toro*. Determine seu volume. (*Dica*: $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \pi a^2/2$, pois é a área de um semicírculo de raio a.)

56. Volume de uma tigela Uma tigela tem um formato que pode ser gerado pela revolução, em torno do eixo y, do gráfico de $y = x^2/2$ entre $y = 0$ e $y = 5$.

(a) Determine o volume da tigela.

(b) Taxas relacionadas Se enchermos a tigela com água a uma taxa constante de 3 unidades cúbicas por segundo, a que taxa o nível de água na tigela aumentará quando a água estiver com 4 unidades de profundidade?

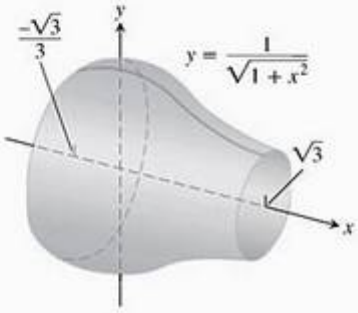
57. Volume de uma tigela

(a) Uma tigela hemisférica de raio a contém água a uma profundidade h. Determine o volume de água na tigela.

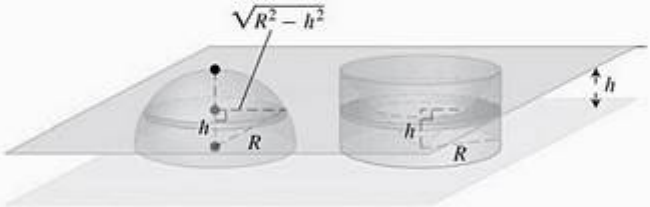
(b) Taxas relacionadas A água cai em um aquário hemisférico de raio 5 m a uma taxa de 0,2 m^3/s. A que taxa o nível de água no aquário aumentará quando a água estiver com 4 metros de profundidade?

58. Volume de um cone Use cálculo para determinar o volume de um cone cilíndrico reto de altura h e raio da base r.

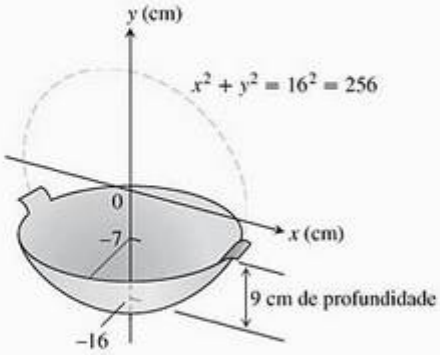
59. Determine o volume do sólido de revolução mostrado.



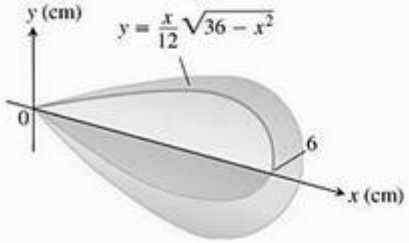
60. Volume do hemisfério Deduza a fórmula $V = (2/3)\,\pi R^3$ para o volume de um hemisfério de raio R, comparando suas seções transversais com a de um cilindro sólido circular reto, com raio R e altura R, do qual foi removido um cone sólido circular reto, com raio da base R e altura R, como sugere a figura.



61. Projetando uma frigideira Você está projetando uma frigideira que terá o formato de uma tigela esférica com alças. Experimentando em casa, você percebe que conseguirá um modelo com cerca de 3 l de capacidade se a profundidade for de 9 cm e se o raio da esfera for de 16 cm. Para se certificar disso, você desenha a frigideira como um sólido de revolução, como se vê na figura, e calcula seu volume com uma integral. Arredondando para o inteiro mais próximo, qual será o volume obtido em cm^3? (1 l = 1.000 cm^3.)



62. Projetando um peso para prumo Pediram-lhe que projetasse um peso de metal para prumo com peso aproximado de 190 g, e você decide dar-lhe o formato de um sólido de revolução como este da figura. Determine o volume do peso. Se você especificar um metal com densidade 8,5 g/cm^3, de quanto será o peso (arredonde para o inteiro mais próximo)?



63. Max-min O arco $y = \text{sen}\, x$, $0 \le x \le \pi$ gira em torno da reta $y = c$, $0 \le c \le 1$ para gerar o sólido da Figura 6.16.

(a) Determine o valor de c que minimiza o volume do sólido. Qual é o volume mínimo?

(b) Que valor de c em $[0, 1]$ maximiza o volume do sólido?

(c) Desenhe o gráfico do volume do sólido em função
T de c, primeiro para $0 \le c \le 1$ e depois em um domínio maior. O que acontece com o volume do sólido quando c sai de $[0, 1]$? Fisicamente, isso tem sentido? Justifique suas respostas.

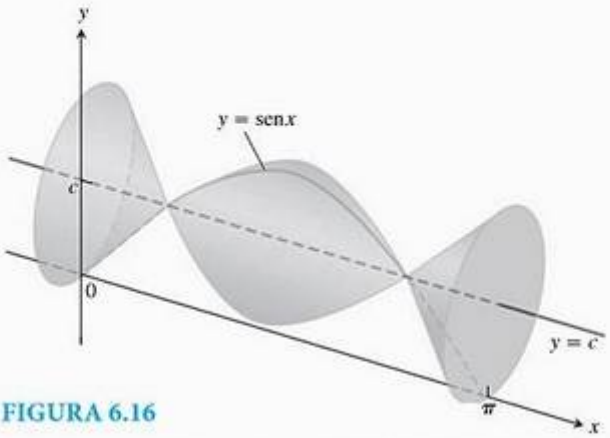


FIGURA 6.16

64. Um tanque auxiliar para combustível Você está projetando um tanque auxiliar para combustível que será colocado sob a fuselagem de um helicóptero para aumentar sua autonomia. Após algumas experiências na prancha de desenho, você decide que o formato do tanque será como a superfície obtida com a rotação, em torno do eixo x, da curva $y = 1 - (x^2/16)$, $-4 \le x \le 4$ (dimensões em pés).

(a) Quantos pés cúbicos de combustível o tanque comportará (arredonde para o inteiro mais próximo)?

(b) Um pé cúbico comporta 7,481 galões. Se o helicóptero consome um galão a cada 2 milhas, quantas milhas a mais ele poderá voar se o tanque for instalado (arredonde para o inteiro mais próximo)?

6.2 Volume por cascas cilíndricas

Na Seção 6.1, definimos o volume de um sólido S como a integral definida

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

onde $A(x)$ é uma área de seção transversal integrável de S desde $x = a$ até $x = b$. Obtivemos a área $A(x)$ fatiando o sólido com um plano perpendicular ao eixo x. Nesta seção, usaremos a mesma definição de volume, mas obteremos a área fatiando o sólido de outra maneira. Agora, vamos usar cilindros circulares de raios crescentes, como se fossem moldes de biscoitos redondos, um maior que o outro. Fatiamos o sólido de cima para baixo, perpendicularmente ao eixo x, estando o eixo do cilindro paralelo ao eixo y. O eixo vertical de cada cilindro é sempre a mesma reta, mas o raio dos cilindros aumenta a cada fatia. Desse modo, o sólido S é fatiado em cascas cilíndricas finas de espessura constante, que crescem de dentro para fora a partir de um eixo comum, como os anéis observados no corte transversal das árvores. Se desenrolarmos uma casca cilíndrica, veremos que seu volume é aproximadamente igual ao de uma fatia retangular com área $A(x)$ e espessura Δx. Isso nos permite aplicar, como antes, a mesma definição do volume como uma integral. Antes de descrever esse método de modo geral, vamos examinar um exemplo para visualizá-lo melhor.

EXEMPLO 1 Determinando um volume com o uso de cascas

A região compreendida pelo eixo x e pela parábola $y = f(x) = 3x - x^2$ gira em torno da reta vertical $x = -1$ para gerar o formato de um sólido (Figura 6.17). Determine o volume do sólido.

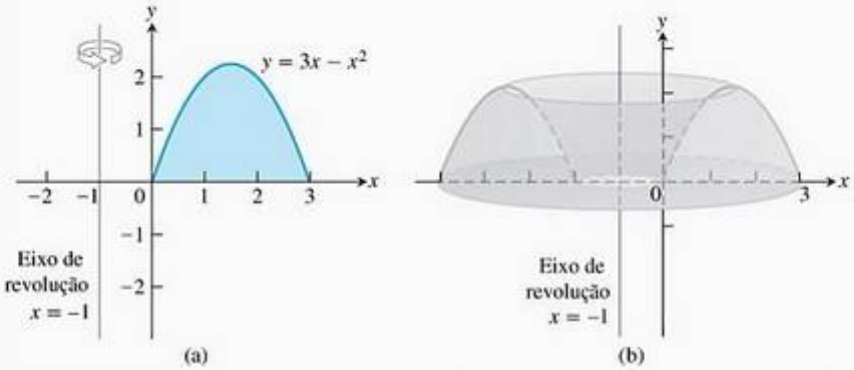


FIGURA 6.17 (a) O gráfico da região do Exemplo 1, antes da revolução. (b) O sólido formado quando a região da parte (a) gira em torno do eixo de revolução $x = -1$.

SOLUÇÃO Usar o método do anel visto na Seção 6.1 seria complicado aqui, pois teríamos de expressar os valores de x nos braços esquerdo e direito da parábola em termos de y. (Esses valores são os raios interno e externo de um anel típico, o que leva a fórmulas muito complexas.) Em vez de girar uma faixa horizontal de espessura Δy, giramos uma *faixa vertical* de espessura Δx. Essa rotação produz uma casca cilíndrica de altura y_k que se ergue acima de um ponto x_k, situado na base da faixa vertical, e de espessura Δx. A região sombreada da Figura 6.18 representa um exemplo de casca cilíndrica. Podemos pensar na casa cilíndrica mostrada na figura mais ou menos como uma fatia do sólido que obteríamos cortando-o diretamente para baixo, paralelamente ao eixo de revolução, em toda a volta, próximo à borda do orifício. Depois, cortaríamos outra fatia cilíndrica em torno do orifício aumentado, então outra, e assim por diante, até obter n cilindros. O raio dos cilindros aumenta gradualmente e sua altura segue o contorno da parábola: do menor para o maior e depois de novo para o menor (Figura 6.17a).

Cada fatia se situa ao longo de um subintervalo do eixo x de comprimento (largura) Δx. Seu raio é aproximadamente $(1 + x_k)$ e sua altura, cerca de $3x_k - x_k^2$. Se desenrolarmos o cilindro verticalmente em x_k e o achatarmos, ele se tornará (aproximadamente) uma fatia retangular com espessura Δx (Figura 6.19). A circunferência interna do cilindro será $2\pi \cdot$ raio $= 2\pi(1 + x_k)$, e esse é o comprimento da fatia retangular desenrolada. Seu volume é aproximado pelo volume de um sólido retangular,

$$\Delta V_k = \text{Circunferência} \times \text{Altura} \times \text{Espessura}$$

$$= 2\pi(1 + x_k) \cdot (3x_k - x_k^2) \cdot \Delta x$$

Somando o volume ΔV_k das cascas cilíndricas individuais ao longo do intervalo $[0, 3]$, obtemos a soma de Riemann:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi(x_k + 1)(3x_k - x_k^2)\,\Delta x$$

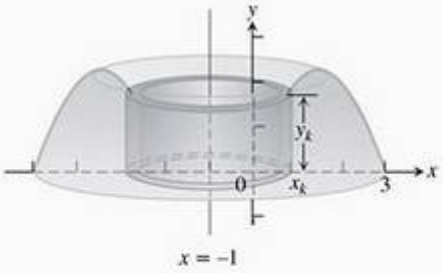


FIGURA 6.18 Uma casca cilíndrica de altura y_k obtida pela rotação de uma faixa vertical de espessura Δx em torno da reta $x = -1$. O raio externo do cilindro ocorre em x_k, onde a altura da parábola é $y_k = 3x_k - x_k^2$ (Exemplo 1).

Considerando o limite com espessura $\Delta x \to 0$, teremos a integral do volume

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2\pi(x_k + 1)(3x_k - x_k^2)\,\Delta x \\ &= \int_0^3 2\pi(x + 1)(3x - x^2)\,dx \\ &= \int_0^3 2\pi(3x^2 + 3x - x^3 - x^2)\,dx \\ &= 2\pi\int_0^3 (2x^2 + 3x - x^3)\,dx \\ &= 2\pi\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = \frac{45\pi}{2} \end{aligned}$$

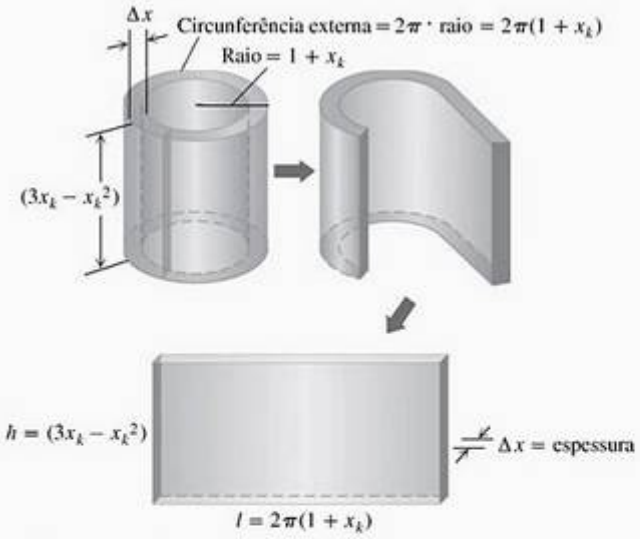


FIGURA 6.19 Imagine que estamos cortando e "desenrolando" uma casca cilíndrica para obter um sólido plano (aproximadamente) retangular (Exemplo 1).

Agora, vamos generalizar o procedimento usado nesse Exemplo 1.

O método da casca

Suponha que a região delimitada pelo gráfico de uma função contínua não negativa $y = f(x)$ e o eixo x ao longo do intervalo fechado finito $[a, b]$ fique à direita da reta vertical $x = L$ (Figura 6.20a). Pressupomos $a \geq L$, portanto a reta vertical pode tocar a região, mas não atravessá-la. Geramos um sólido S girando essa região em torno da reta vertical L.

Seja P uma partição do intervalo $[a, b]$ formada pelos seguintes pontos: $a = x_0 < x_1 < \quad < x_n = b$, e seja c_k o ponto médio do k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Aproximamos a região da Figura 6.20a usando retângulos com base nessa partição de $[a, b]$. O retângulo típico para aproximação tem altura $f(c_k)$ e largura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Se esse retângulo for girado em torno da reta vertical $x = L$, então uma casca será gerada, como mostra a Figura 6.20b. Uma fórmula da geometria nos diz que o volume da casca gerada pelo retângulo é

$$\Delta V_k = 2\pi \times \text{Raio médio da casca} \times \text{Altura da casca} \times \text{Espessura}$$

$$= 2\pi \cdot (c_k - L) \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

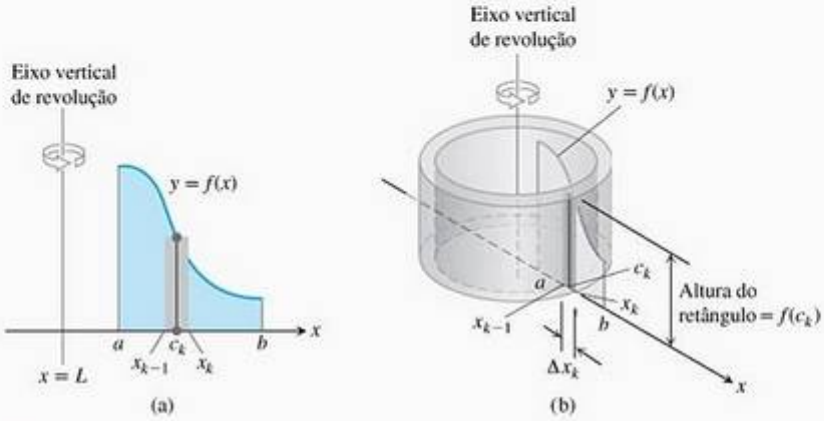


FIGURA 6.20 Quando a região mostrada na parte (a) é girada em torno da reta vertical $x = L$, surge um sólido que pode ser fatiado em cascas cilíndricas. Uma casca típica é mostrada na parte (b).

Fazemos uma aproximação para o volume do sólido S somando os volumes das cascas geradas pelos n retângulos com base em P:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k$$

O limite dessa soma de Riemann quando $\|P\| \to 0$ fornece o volume do sólido como uma integral definida:

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \int_a^b 2\pi(\text{raio da casca})(\text{altura da casca})\, dx$$

$$= \int_a^b 2\pi(x - L) f(x)\, dx$$

Chamamos essa variável de integração — nesse caso, x — de **variável espessura**. Usamos a primeira integral, e não a segunda, que contém uma fórmula para o integrando, a fim de enfatizar o *processo* do método da casca. Isso também permite rotações em torno de uma reta horizontal L.

Fórmula da casca para revolução em torno de uma reta vertical
O volume do sólido obtido com a rotação, em torno de uma reta vertical $x = L$, da região compreendida entre o eixo x e o gráfico de uma função contínua $y = f(x) \geq 0 = L, \leq a \leq x \leq b$, é

$$V = \int_a^b 2\pi(\text{raio da casca})(\text{altura da casca})\, dx$$

EXEMPLO 2 Cascas cilíndricas girando em torno do eixo y

A região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$, pelo eixo x e pela reta $x = 4$ é girada em torno do eixo y gerando um sólido. Determine o volume do sólido.

SOLUÇÃO Esboce a região e desenhe um segmento de reta através dela *paralelamente* ao eixo de revolução (Figura 6.21a). Nomeie a altura do segmento (altura da casca) e a distância do eixo de revolução (raio da casca). (Desenhamos a casca na Figura 6.21b, mas você não precisa fazê-lo.)

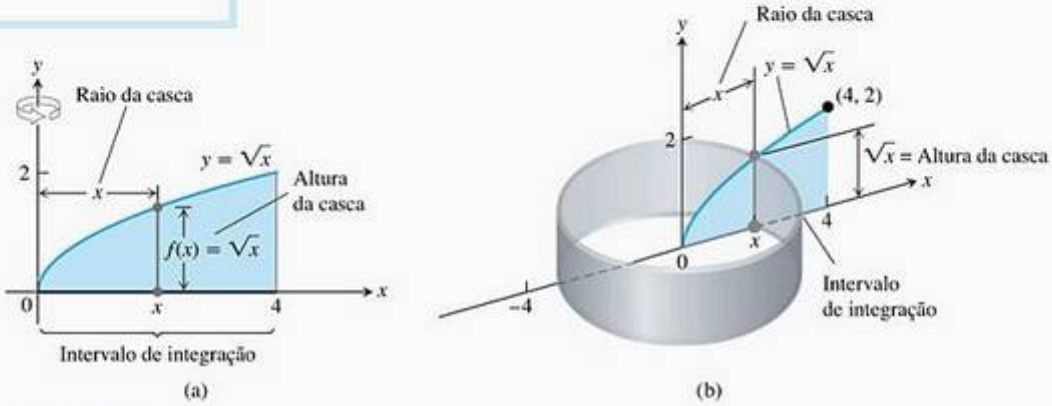


FIGURA 6.21 (a) A região, as dimensões da casca e o intervalo de integração do Exemplo 2. (b) A casca gerada pelo segmento vertical da parte (a) com largura Δx.

Como a variável espessura da casca é x, os limites de integração para a fórmula da casca são $a = 0$ e $b = 4$ (Figura 6.21). O volume é, portanto

$$V = \int_a^b 2\pi(\text{raio da casca})(\text{altura da casca})\,dx$$

$$= \int_0^4 2\pi(x)\left(\sqrt{x}\right)dx$$

$$= 2\pi\int_0^4 x^{3/2}dx = 2\pi\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}$$

Até aqui, usamos eixos verticais de revolução. Para eixos horizontais, substituímos x por y.

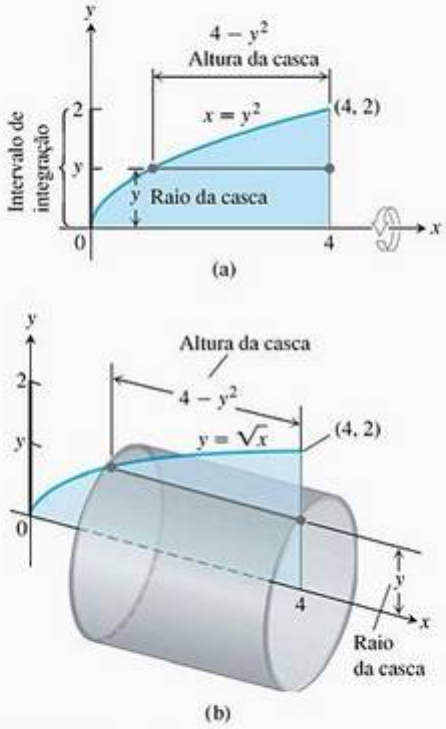


FIGURA 6.22 (a) A região, as dimensões da casca e o intervalo de integração do Exemplo 3. (b) A casca gerada pelo segmento horizontal da parte (a) com uma largura Δy.

EXEMPLO 3 Cascas cilíndricas girando em torno do eixo x

A região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$, pelo eixo x e pela reta $x = 4$ gira em torno do eixo x, gerando um sólido. Determine o volume do sólido.

SOLUÇÃO Esboce a região e desenhe um segmento de reta que a atravesse *paralelamente* ao eixo de revolução (Figura 6.22a). Nomeie o comprimento do segmento (altura da casca) e a distância do eixo de revolução (raio da casca). (Desenhamos a casca na Figura 6.22b, mas você não precisa fazer isso.)

Nesse caso, a variável espessura é y, logo os limites de integração para o método da fórmula da casca são $a = 0$ e $b = 2$ (ao longo do eixo y da Figura 6.22). O volume do sólido é

$$V = \int_a^b 2\pi(\text{raio da casca})(\text{altura da casca})\,dx$$

$$= \int_0^2 2\pi(y)(4 - y^2)\,dy$$

$$= \int_0^2 2\pi(4y - y^3)\,dy$$

$$= 2\pi\left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi$$

Resumo do método da casca

Independentemente da posição do eixo de revolução (horizontal ou vertical), os passos para implementar o método da casca são estes.

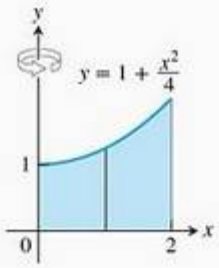
1. *Desenhe a região e esboce um segmento de reta* que a atravesse *paralelamente* ao eixo de revolução. *Nomeie* a altura ou o comprimento do segmento (altura da casca) e a distância do eixo de revolução (raio da casca).
2. *Determine* os limites de integração para a variável espessura.
3. *Integre* o produto 2π (raio da casca)(altura da casca) em relação à variável espessura (x ou y) para determinar o volume.

Quando usados para calcular o volume de uma região, o método da casca e o do anel dão as mesmas respostas. Isso não é provado aqui, mas é ilustrado nos exercícios 33 e 34. As duas fórmulas de volume são, na verdade, casos especiais de uma fórmula geral que examinaremos ao estudar integrais duplas e triplas no Capítulo 15, no Volume II. Essa fórmula geral também permite calcular o volume de outros sólidos, inclusive os que não foram gerados por regiões de revolução.

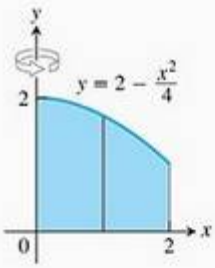
Exercícios 6.2

Nos exercícios 1–6, use o método da casca para determinar os volumes dos sólidos obtidos com a rotação das regiões sombreadas em torno dos eixos indicados.

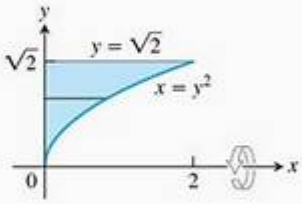
1.



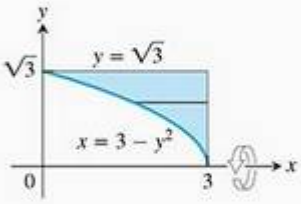
2.



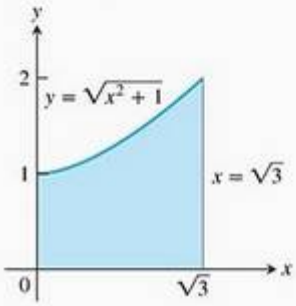
3.



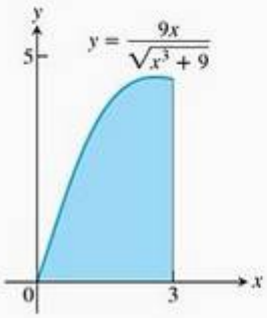
4.



5. O eixo y



6. O eixo y



Revolução em torno do eixo y

Nos exercícios 7–14, use o método da casca para determinar o volume dos sólidos obtidos com a rotação, em torno do eixo y, das regiões limitadas pelas curvas e retas a seguir.

7. $y = x, \quad y = -x/2, \quad x = 2$

8. $y = 2x, \quad y = x/2, \quad x = 1$

9. $y = x^2, \quad y = 2 - x, \quad x = 0$, para $x \geq 0$

10. $y = 2 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = 0$

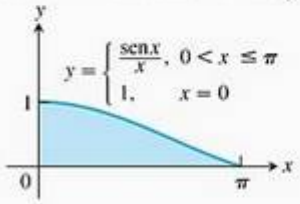
11. $y = 2x - 1, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 0$

12. $y = 3/(2\sqrt{x}), \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

13. Seja $f(x) = \begin{cases} (\operatorname{sen} x)/x, & 0 < x \le \pi \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(a) Mostre que $x\,f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$.

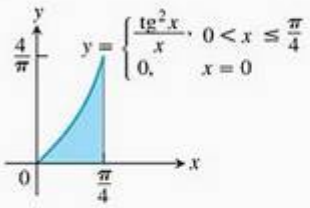
(b) Determine o volume do sólido obtido com a rotação da área sombreada em torno do eixo y.



14. Seja $g(x) = \begin{cases} (\operatorname{tg} x)^2/x, & 0 < x \le \pi/4 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(a) Mostre que $x\,g(x) = (\operatorname{tg} x)^2$, $0 \le x \le \pi/4$.

(b) Determine o volume do sólido obtido com a rotação da área sombreada em torno do eixo y.



Revolução em torno do eixo x

Nos exercícios 15–22, use o método da casca para determinar o volume dos sólidos obtidos com a rotação, em torno do eixo x, das áreas limitadas pelas curvas e retas a seguir.

15. $x = \sqrt{y}$, $x = -y$, $y = 2$

16. $x = y^2$, $x = -y$, $y = 2$, $y \ge 0$

17. $x = 2y - y^2$, $x = 0$

18. $x = 2y - y^2$, $x = y$

19. $y = |x|$, $y = 1$

20. $y = x$, $y = 2x$, $y = 2$

21. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = x - 2$

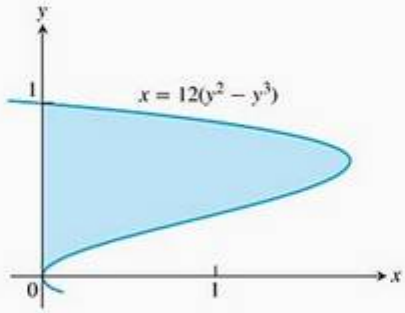
22. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = 2 - x$

Revolução em torno de retas horizontais

Nos exercícios 23 e 24, use o método da casca para determinar o volume dos sólidos obtidos com a rotação das regiões sombreadas em torno dos eixos indicados.

23. (a) Eixo x **(b)** Reta $y = 1$

(c) Reta $y = 8/5$ **(d)** Reta $y = -2/5$

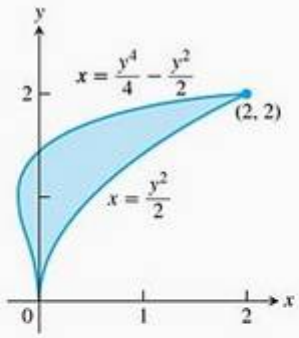


24. (a) Eixo x

(b) Reta $y = 2$

(c) Reta $y = 5$

(d) Reta $y = -5/8$



Comparando os modelos do anel e da casca

Para algumas regiões, os dois métodos funcionam bem para sólidos obtidos com a rotação da região em torno dos eixos de coordenadas, mas nem sempre. Por exemplo, quando uma região gira em torno do eixo y e estamos usando anéis, devemos integrar em relação a y. Entretanto, pode não ser possível expressar o integrando em termos de y. Em casos como esse, o método da casca permite integrar em relação a x em vez de y. Os exercícios 25 e 26 permitem perceber isso.

25. Calcule o volume do sólido obtido com a rotação, em torno de cada eixo coordenado, da região limitada por $y = x$ e $y = x^2$ usando

(a) o método da casca.

(b) o método do anel.

26. Calcule o volume do sólido obtido com a rotação da região triangular limitada pelas retas $2y = x + 4$, $y = x$ e $x = 0$, em torno

(a) do eixo x, usando o método do anel.

(b) do eixo y, usando o método da casca.

(c) da reta $x = 4$, usando o método da casca.

(d) da reta $y = 8$, usando o método do anel.

Escolhendo cascas ou anéis

Nos exercícios 27–32, determine os volumes dos sólidos obtidos com a rotação das regiões em torno dos eixos dados. Se preferir, pode usar anéis nesses exercícios.

27. O triângulo com vértices (1, 1), (1, 2) e (2, 2) em torno

(a) do eixo x

(b) do eixo y

(c) da reta $x = 10/3$

(d) da reta $y = 1$

28. A região limitada por $y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0$ em torno

(a) do eixo x

(b) do eixo y

(c) da reta $x = 4$

(d) da reta $y = 2$

29. A região, no primeiro quadrante, limitada pela curva $x = y - y^3$ e pelo eixo y em torno

(a) do eixo x

(b) da reta $y = 1$

30. A região, no primeiro quadrante, limitada por $x = y - y^3$, $x = 1$ e $y = 1$ em torno

(a) do eixo x

(b) do eixo y

(c) da reta $x = 1$

(d) da reta $y = 1$

31. A região limitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2/8$ em torno

(a) do eixo x

(b) do eixo y

32. A região limitada por $y = 2x - x^2$ e $y = x$ em torno

(a) do eixo y

(b) da reta $x = 1$

33. A região, no primeiro quadrante, limitada superiormente pela curva $y = 1/x^{1/4}$, à esquerda pela reta $x = 1/16$ e inferiormente pela reta $y = 1$, é girada em torno do eixo x gerando um sólido. Determine o volume do sólido pelo método

(a) do anel.

(b) da casca.

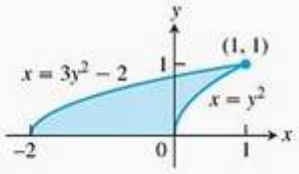
34. A região, no primeiro quadrante, limitada superiormente pela curva $y = 1/\sqrt{x}$, à esquerda pela reta $x = 1/4$ e inferiormente pela reta $y = 1$, gira em torno do eixo y, gerando um sólido. Determine o volume do sólido pelo método

(a) do anel.

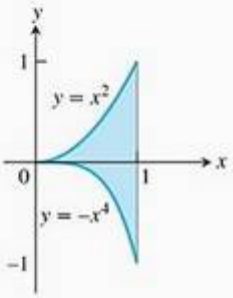
(b) da casca.

Escolhendo discos, anéis ou cascas

35. A região aqui apresentada gira em torno do eixo x gerando um sólido. Qual dos métodos (disco, anel, casca) você usaria para determinar o volume do sólido? Quantas integrais seriam necessárias em cada caso? Explique.



36. A região apresentada aqui deve girar em torno do eixo y, gerando um sólido. Qual dos métodos (disco, anel, casca) você usaria para determinar o volume do sólido? Quantas integrais seriam necessárias em cada caso? Justifique suas respostas.



Teoria e aplicações

37. Equivalência dos métodos do anel e da casca para a determinação do volume Seja f derivável e crescente no intervalo $a \le x \le b$, com $a > 0$, e suponha que f tenha uma inversa derivável, f^{-1}. Gire em torno do eixo y a região limitada pelo gráfico de f e pelas retas $x = a$ e $x = f(b)$, gerando um sólido. Desse modo, os valores das integrais dadas pelos métodos do anel e da casca terão valores idênticos:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \pi((f^{-1}(y))^2 - a^2)\, dy = \int_a^b 2\pi x(f(b) - f(x))\, dx$$

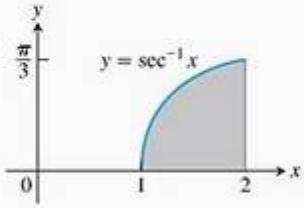
Para provar essa igualdade, defina

$$W(t) = \int_{f(a)}^{f(t)} \pi((f^{-1}(y))^2 - a^2)\, dy$$

$$S(t) = \int_a^t 2\pi x(f(t) - f(x))\, dx$$

Então, mostre que as funções W e S coincidem em um ponto de $[a, b]$ e possuem derivadas idênticas em $[a, b]$. Como você viu no Exercício 126 da Seção 4.8, isso garante que $W(t) = S(t)$ para qualquer t em $[a, b]$. Em particular, $W(b) = S(b)$. (*Fonte*: "Disks and shells revisited", de Walter Carlip, *American Mathematical Monthly*, v. 98, n. 2, fev. 1991, p. 154-156.)

38. A região entre a curva $y = \sec^{-1} x$ e o eixo x de $x = 1$ até $x = 2$ (mostrada a seguir) é girada em torno do eixo y gerando um sólido. Determine o volume do sólido.



39. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região delimitada pelos gráficos de $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 1$

40. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região delimitada pelos gráficos de $y = e^{x/2}$, $y = 1$ e $x = \ln 3$

6.3 Comprimento de curvas planas

Companion Website
Biografia histórica

Arquimedes
(287-212 a.C.)

Sabemos o que significa o comprimento de um segmento de reta, mas, sem cálculo, não temos uma noção precisa do comprimento de uma curva ondulante. A idéia de aproximar o comprimento da curva que vai do ponto A ao ponto B subdividindo-a em várias partes e unindo os sucessivos pontos de divisão com segmentos de reta remonta à Grécia antiga. Arquimedes usou esse método para aproximar a circunferência de um círculo: ele inscreveu um polígono de n lados no círculo e, depois, usou geometria para calcular seu perímetro (Figura 6.23). A Figura 6.24 estende essa idéia para uma curva mais geral. Agora, descreveremos como esse método funciona.

FIGURA 6.23 Arquimedes usou o perímetro de polígonos inscritos para aproximar a circunferência de um círculo. Para $n = 96$, esse método de aproximação diz que a circunferência do círculo é $\pi \approx 3{,}14103$.

Comprimento de uma curva definida parametricamente

Seja C uma curva dada parametricamente pelas equações

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t), \quad a \le t \le b.$$

Pressupomos que as funções f e g tenham derivadas contínuas no intervalo $[a, b]$ e que essas derivadas não sejam simultaneamente nulas. Tais funções são chamadas **continuamente deriváveis**, e a curva C definida por elas de **curva lisa**. Talvez ajude imaginar a curva como a trajetória de uma partícula que parte do ponto $A = (f(a), g(a))$, no instante $t = a$, e se dirige ao ponto $B = f(b), g(b))$ (veja a Figura 6.24). Subdividimos essa trajetória (ou arco) AB em n pedaços nos pontos $A = P_0, P_1, P_2, \quad , P_n = B$. Esses pontos correspondem a uma partição do intervalo $[a, b]$ formada pelos pontos $a = t_0 < t_1 < t_2 < \quad < t_n = b$, onde $P_k = (f(t_k), g(t_k))$. Unimos os pontos sucessivos dessa subdivisão por segmentos de reta (Figura 6.24). Um segmento de reta representativo tem comprimento

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$
$$= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2}$$

(veja a Figura 6.25). Se Δt_k é pequeno, o comprimento L_k é aproximadamente igual ao do arco $P_{k-1}P_k$. De acordo com o teorema do valor médio, existem números t_k^* e t_k^{**} em $[t_{k-1}, t_k]$ tais que

$$\Delta x_k = f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t_k^*)\,\Delta t_k$$
$$\Delta y_k = g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(t_k^{**})\,\Delta t_k$$

Pressupondo que a trajetória de A até B seja percorrida exatamente uma vez, conforme t avança de $t = a$ para $t = b$, sem que se volte para trás nem se passe duas vezes pelo mesmo ponto, uma aproximação intuitiva do "comprimento" da curva AB seria a soma de todos os comprimentos L_k:

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(t_k^*)]^2 + [g'(t_k^{**})]^2}\,\Delta t_k$$

Embora essa última soma à direita não seja exatamente uma soma de Riemann (pois f' e g' são calculadas em pontos diferentes), um teorema de cálculo avançado garante que seu limite, quando a norma da partição tender a zero, será a integral definida

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(t_k^*)]^2 + [g'(t_k^{**})]^2}\,\Delta t_k = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$

Assim, é razoável definir o comprimento da curva que vai de A até B como essa integral.

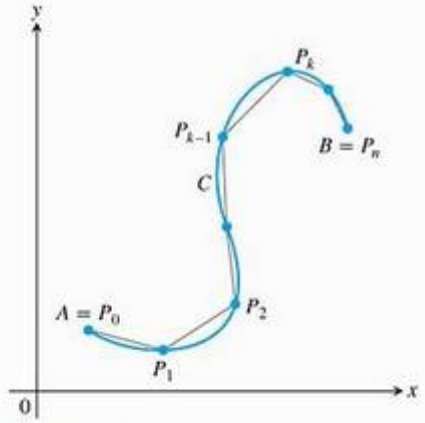


FIGURA 6.24 A curva C, definida parametricamente pelas equações $x = f(t)$ e $y = g(t)$, $a \le t \le b$. O comprimento da curva de A até B é aproximado pela soma dos comprimentos do caminho poligonal (segmentos de reta), começando com $A = P_0$, indo depois para P_1, e assim por diante, até chegarmos a $B = P_n$.

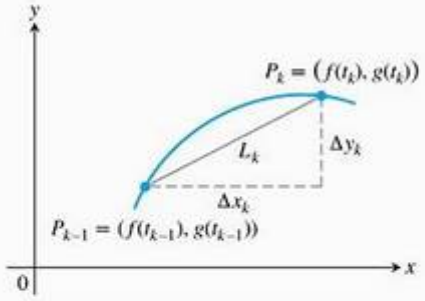


FIGURA 6.25 O arco $P_{k-1}P_k$ é aproximado pelo segmento de reta mostrado aqui cujo comprimento é $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$.

Definição **Comprimento de uma curva paramétrica**
Se uma curva C é definida parametricamente por $x = f(t)$ e $y = g(t)$, $a \le t \le b$, onde f' e g' são contínuas e não são simultaneamente nulas em $[a, b]$, e C é percorrida exatamente uma vez, quando t avança de $t = a$ para $t = b$, então o comprimento de C é a integral definida

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$

Uma curva lisa C não se dobra para trás nem muda de direção no intervalo de tempo $[a, b]$, pois $(f')^2 + (g')^2 > 0$ ao longo de todo o intervalo.

Se $x = f(t)$ e $y = g(t)$, usando a notação de Leibniz temos o seguinte resultado para o comprimento do arco:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{1}$$

E se houver duas parametrizações diferentes para uma curva C, cujo comprimento queremos determinar, importará qual delas vamos usar? A resposta (vinda do cálculo avançado) é não, desde que a parametrização escolhida se adapte às condições estabelecidas na definição do comprimento de C (veja o Exercício 36).

EXEMPLO 1 A circunferência de um círculo

Determine o comprimento do círculo de raio r definido parametricamente por

$$x = r\cos t \quad \text{e} \quad y = r\,\text{sen}\, t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

SOLUÇÃO Quando t varia de 0 para 2π, o círculo é atravessado exatamente uma vez; logo, a circunferência é

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Determinamos

$$\frac{dx}{dt} = -r\,\text{sen}\, t, \quad \frac{dy}{dt} = r\cos t$$

e

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2(\text{sen}^2 t + \cos^2 t) = r^2$$

Logo

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\, dt = r\left[t\right]_0^{2\pi} = 2\pi r$$

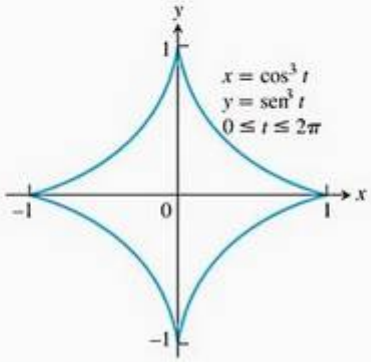


FIGURA 6.26 O astróide do Exemplo 2.

EXEMPLO 2 Aplicando a fórmula paramétrica para o comprimento de uma curva

Determine o comprimento do astróide (Figura 6.26)

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \text{sen}^3 t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

SOLUÇÃO Devido à simetria da curva em relação aos eixos das coordenadas, seu comprimento é quatro vezes o comprimento da porção que está no primeiro quadrante. Temos então

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \text{sen}^3 t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = [3\cos^2 t(-\text{sen}\, t)]^2 = 9\cos^4 t\,\text{sen}^2 t$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = [3\,\text{sen}^2 t(\cos t)]^2 = 9\,\text{sen}^4 t\cos^2 t$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9\cos^2 t\,\text{sen}^2 t\underbrace{(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)}_{1}}$$

$$= \sqrt{9\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t}$$
$$= 3|\cos t \operatorname{sen} t|$$
$$= 3\cos t \operatorname{sen} t$$

$\cos t \operatorname{sen} t \geq 0$ para $0 \leq t \leq \pi/2$

Portanto,
Comprimento da porção no primeiro quadrante =

$$= \int_0^{\pi/2} 3\cos t \operatorname{sen} t\, dt$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2t\, dt$$

$\cos t \operatorname{sen} t = (1/2)\operatorname{sen} 2t$

$$= -\frac{3}{4}\cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}$$

O comprimento do astróide é quatro vezes isto: $4(3/2) = 6$.

Comprimento de uma curva $y = f(x)$

Dada uma função continuamente derivável $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, podemos considerar $x = t$ como um parâmetro. O gráfico da função f será, então, a curva C definida parametricamente por

$$x = t \quad \text{e} \quad y = f(t), \quad a \leq t \leq b$$

um caso especial do que examinamos antes. Logo,

$$\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dt} = f'(t)$$

A partir dos cálculos que fizemos na Seção 3.5, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = f'(t)$$

o que dá

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1 + [f'(t)]^2$$
$$= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$= 1 + [f'(x)]^2$$

Substituições na Equação (1) levam à fórmula do comprimento do arco para o gráfico de $y = f(x)$.

Fórmula para o comprimento de $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$
Se f for continuamente derivável no intervalo fechado $[a, b]$, então o comprimento da curva (gráfico) $y = f(x)$, de $x = a$ a $x = b$, será

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad (2)$$

Companion Website
Biografia histórica
Gregory St. Vincent (1584-1667)

EXEMPLO 3 Aplicando a fórmula do comprimento do arco para um gráfico

Determine o comprimento da curva

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad 0 \le x \le 2$$

SOLUÇÃO Usamos a Equação (2) com $a = 0$, $b = 2$, e

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) = \left[\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right]^2$$

O comprimento da curva de $x = 0$ a $x = 2$ é

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^2 \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\, dx \qquad \text{Equação (2) com } a = 0,\ b = 2$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_0^2 = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) \approx 3{,}63$$

Lidando com descontinuidades em dy/dx

Em um ponto de uma curva onde dy/dx deixa de existir, dx/dy pode existir e então podemos determinar o comprimento da curva expressando x em função de y e aplicando a equação a seguir, análoga à Equação (2).

Fórmula para o comprimento de $x = g(y)$, $c \le y \le d$

Se g for continuamente derivável em $[c, d]$, o comprimento da curva $x = g(y)$, de $y = c$ a $y = d$, será

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy \qquad (3)$$

EXEMPLO 4 Comprimento de um gráfico que tem uma descontinuidade em dy/dx

Determine o comprimento da curva $y = (x/2)^{2/3}$ de $x = 0$ a $x = 2$.

SOLUÇÃO A derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

não é definida em $x = 0$, portanto não podemos determinar o comprimento da curva com a Equação (2).

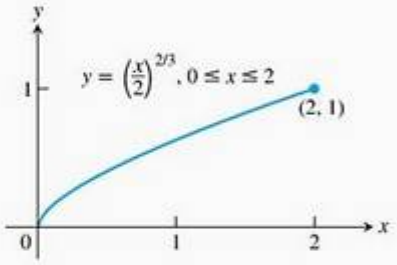


FIGURA 6.27 O gráfico de $y = (x/2)^{2/3}$ de $x = 0$ a $x = 2$ é também o gráfico de $x = 2y^{3/2}$ de $y = 0$ a $y = 1$ (Exemplo 4).

Portanto, reescrevemos a equação para expressar x em termos de y:

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$$

$$y^{3/2} = \frac{x}{2} \qquad \text{Eleve ambos os lados à potência 3/2.}$$

$$x = 2y^{3/2} \qquad \text{Determine } x.$$

Assim, podemos ver que a curva cujo comprimento procuramos é também o gráfico de $x = 2y^{3/2}$ de $y = 0$ a $y = 1$ (Figura 6.27).

A derivada

$$\frac{dx}{dy} = 2\left(\frac{3}{2}\right)y^{1/2} = 3y^{1/2}$$

é contínua em [0, 1]. Podemos então usar a Equação (3) para determinar o comprimento da curva:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y}\, dy \qquad \text{Equação (3) com } c = 0, d = 1.$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}(1 + 9y)^{3/2}\Big]_0^1 \qquad \text{Faça } u = 1 + 9y \text{ e } du/9 = dy, \text{ integre e substitua novamente.}$$

$$= \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \approx 2{,}27$$

Companion Website

Biografia histórica

James Gregory (1638-1675)

A fórmula diferencial resumida

Muitas vezes, a Equação (1) é escrita em termos de diferenciais, e não de derivadas. Formalmente, isso é feito assim: escreve-se $(dt)^2$ sob o radical, em vez de dt fora do radical, e depois escreve-se

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (dt)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\, dt\right)^2 = (dx)^2$$

e

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 (dt)^2 = \left(\frac{dy}{dt}\, dt\right)^2 = (dy)^2$$

Também é comum eliminar os parênteses em $(dx)^2$ e escrever dx^2, de modo que a Equação (1) passa a ser escrita assim:

$$L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{4}$$

Podemos pensar nessas diferenciais como uma maneira de resumir e simplificar as propriedades das integrais. Em livros mais avançados, as diferenciais recebem uma definição matemática precisa.

Para fazer um cálculo integral, é preciso expressar dx e dy em termos de uma única variável, a mesma para os dois, e inserir os limites apropriados na Equação (4).

Uma boa maneira de memorizar a Equação (4) é escrever

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{5}$$

e considerar ds como a diferencial do comprimento do arco, que pode ser integrado entre limites apropriados para informar o comprimento total de

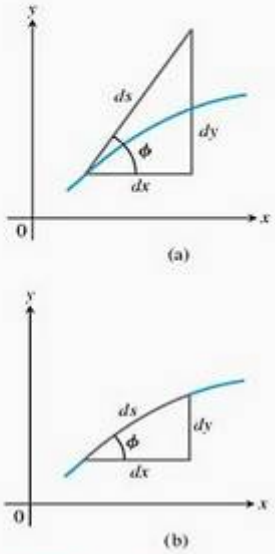


FIGURA 6.28 Diagramas para memorizar a equação $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

uma curva. A Figura 6.28a dá a interpretação exata de ds correspondente à Equação (5). A Figura 6.28b não é totalmente precisa, mas deve ser encarada como uma aproximação simplificada da Figura 6.28a.

Com a Equação (5) em mente, a maneira mais rápida de recordar as fórmulas para o comprimento do arco é memorizar a equação

$$\text{Comprimento do arco} = \int ds$$

Se escrevemos $L = \int ds$ e temos o gráfico de $y = f(x)$, podemos reescrever a Equação (5) para obter

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{dy^2}{dx^2}\,dx^2} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

o que resultará na Equação (2). Se tivermos, em vez disso, $x = g(y)$, reescrevemos a Equação (5)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{dy^2}\,dy^2} = \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}\,dy = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

e obtemos a Equação (3).

Exercícios 6.3

Comprimento de curvas parametrizadas

Nos exercícios 1–8, determine o comprimento das curvas.

1. $x = 1 - t, \quad y = 2 + 3t, \quad -2/3 \le t \le 1$
2. $x = \cos t, \quad y = t + \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi$
3. $x = t^3, \quad y = 3t^2/2, \quad 0 \le 1 \le \sqrt{3}$
4. $x = t^2/2, \quad y = (2t + 1)^{3/2}/3, \quad 0 \le t \le 4$
5. $x = (2t + 3)^{3/2}/3, \quad y = t + t^2/2, \quad 0 \le t \le 3$
6. $x = 8\cos t + 8t \operatorname{sen} t, \quad y = 8 \operatorname{sen} t - 8t \cos t, \quad 0 \le t \le \pi/2$
7. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad 0 \le t \le 3$
8. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi$

Determinando o comprimento de curvas

Nas curvas dos exercícios 9–18, determine os respectivos comprimentos. Se você tiver um registrador de gráficos, talvez queira esboçar o gráfico dessas curvas para ver como elas são.

9. $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 3$
10. $y = x^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 4$
11. $x = (y^3/3) + 1/(4y)$ de $y = 1$ a $y = 3$
(*Dica*: $1 + (dx/dy)^2$ é um quadrado perfeito.)
12. $x = (y^{3/2}/3) - y^{1/2}$ de $y = 1$ a $y = 9$
(*Dica*: $1 + (dx/dy)^2$ é um quadrado perfeito.)
13. $x = (y^4/4) + 1/(8y^2)$ de $y = 1$ a $y = 2$
(*Dica*: $1 + (dx/dy)^2$ é um quadrado perfeito.)
14. $x = (y^3/6) + 1/(2y)$ de $y = 2$ a $y = 3$
(*Dica*: $1 + (dx/dy)^2$ é um quadrado perfeito.)
15. $y = (3/4)x^{4/3} - (3/8)x^{2/3} + 5, \quad 1 \le x \le 8$
16. $y = (x^3/3) + x^2 + x + 1/(4x + 4), \quad 0 \le x \le 2$
17. $y = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1/2 \le x \le 1/2$
18. $x = \int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1}\,dt, \quad -\pi/4 \le y \le \pi/4$

T Determinando integrais para o comprimento de curvas

Nos exercícios 19–26, faça o seguinte:

(a) Monte uma integral para o comprimento da curva.

(b) Trace a curva para ver como ela é.

(c) Use seu registrador de gráficos ou programa para calcular integrais e determine o comprimento da curva numericamente.

19. $y = x^2, \quad -1 \le x \le 2$
20. $y = \operatorname{tg} x, \quad -\pi/3 \le x \le 0$

21. $x = \operatorname{sen} y, \quad 0 \le y \le \pi$

22. $x = \sqrt{1 - y^2}, \quad -1/2 \le y \le 1/2$

23. $y^2 + 2y = 2x + 1$ de $(-1, -1)$ a $(7, 3)$

24. $y = \operatorname{sen} x - x \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

25. $y = \int_0^x \operatorname{tg} t \, dt, \quad 0 \le x \le \pi/6$

26. $x = \int_0^y \sqrt{\sec^2 t - 1} \, dt, \quad -\pi/3 \le y \le \pi/4$

Teoria e aplicações

27. Há uma curva lisa (continuamente derivável) $y = f(x)$ cujo comprimento, ao longo do intervalo $0 \le x \le a$, é sempre $\sqrt{2}a$? Justifique sua resposta.

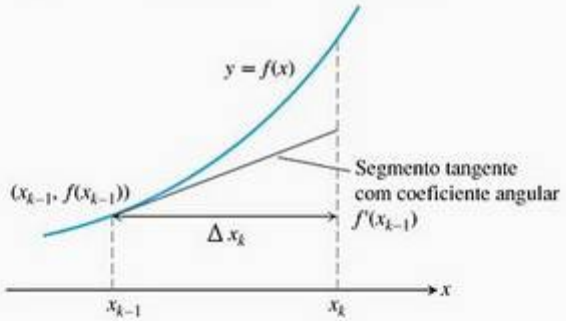
28. **Usando segmentos tangentes para deduzir a fórmula do comprimento para curvas** Suponha que f seja lisa em $[a, b]$ e divida o intervalo $[a, b]$ do modo usual. Construa o *segmento tangente* no ponto $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, em cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, como se vê na figura.

(a) Mostre que o comprimento do k-ésimo segmento tangente ao longo do intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ é igual a $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(x_{k-1})\Delta x_k^2)}$.

(b) Mostre que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (\text{comprimento do } k\text{-ésimo segmento tangente}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx,$$

que é o comprimento L da curva $y = f(x)$ de a a b.



29. (a) Determine uma curva que passa pelo ponto (1, 1) cuja integral do comprimento é

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \, dx$$

(b) Quantas curvas desse tipo existem? Justifique sua resposta.

30. (a) Determine uma curva que passa pelo ponto (0, 1), cuja integral do comprimento é

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{y^4}} \, dy.$$

(b) Quantas curvas desse tipo existem? Justifique sua resposta.

31. Determine uma curva que passa pela origem no plano de coordenadas e cujo comprimento de $x = 0$ a $x = 1$ é

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4} e^x} \, dx$$

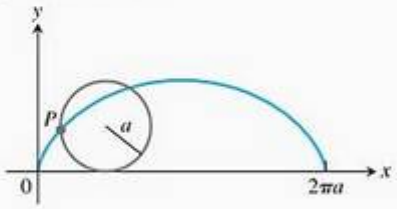
32. Determine uma curva que passa pelo ponto (1, 0) cujo comprimento de $x = 1$ a $x = 2$ é

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \, dx$$

33. Determine o comprimento da curva

$$x = \ln(\sec t + \operatorname{tg} t) - \operatorname{sen} t$$
$$y = \cos t, \quad 0 \le t \le \pi/3$$

34. Determine o comprimento de um arco do ciclóide $x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, mostrado na figura a seguir. Um **ciclóide** é a curva formada por um ponto P na circunferência de um círculo que rola sobre uma reta, como o eixo x.



35. Determine o comprimento da curva

$$x = e^t + e^{-t}, \quad y = 3 - 2t, \quad 0 \le t \le 3$$

36. **Comprimento independe de parametrização** Para ilustrar o fato de que os números que obtemos para o comprimento não dependem da maneira como parametrizamos nossas curvas (exceto no caso das pequenas restrições que evitam que a curva se dobre para trás, conforme mencionado anteriormente), calcule o comprimento do semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$ com estas duas diferentes parametrizações:

(a) $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 2t, \quad 0 \le t \le \pi/2$

(b) $x = \operatorname{sen} \pi t, \quad y = \cos \pi t, \quad -1/2 \le t \le 1/2$

USANDO O COMPUTADOR

Nos exercícios 37–46, use um SAC para executar os passos a seguir para a curva dada ao longo do intervalo fechado.

(a) Esboce a curva e as aproximações feitas com o traçado poligonal para $n = 2, 4, 8$ pontos de partição, ao longo do intervalo. (Veja a Figura 6.24.)

(b) Determine a aproximação correspondente ao comprimento da curva, somando os comprimentos dos segmentos de retas.

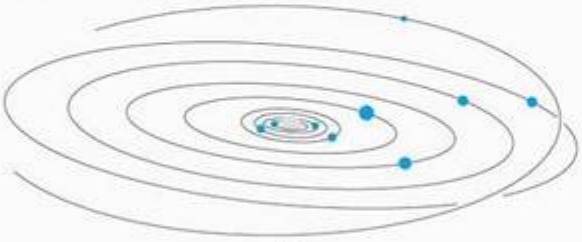
(c) Calcule o comprimento da curva usando uma integral. Compare suas aproximações para $n = 2, 4, 8$ com o comprimento real dado pela integral. Como o comprimento real se compara com as aproximações quando n aumenta? Explique sua resposta.

37. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \le x \le 1$
38. $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad 0 \le x \le 2$
39. $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2), \quad 0 \le x \le \sqrt{2}$
40. $f(x) = x^2 \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$
41. $f(x) = \dfrac{x - 1}{4x^2 + 1}, \quad -\dfrac{1}{2} \le x \le 1$
42. $f(x) = x^3 - x^2, \quad -1 \le x \le 1$
43. $x = \dfrac{1}{3}t^3, \quad y = \dfrac{1}{2}t^2, \quad 0 \le t \le 1$
44. $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, \quad y = t^2 + t - 3, \quad 0 \le t \le 6$
45. $x = t - \cos t, \quad y = 1 + \operatorname{sen} t, \quad -\pi \le t \le \pi$
46. $x = \ln t, \quad y = \sqrt{t + 2}, \quad 1 \le t \le 4$

6.4 Momentos e centros de massa

(a)

Muitas estruturas e sistemas mecânicos comportam-se como se suas massas estivessem concentradas em um único ponto, chamado *centro de massa* (Figura 6.29). É importante saber como localizar esse ponto, e fazê-lo é basicamente uma operação matemática. No momento, lidamos com objetos de uma e duas dimensões. Objetos tridimensionais têm maior relação com as integrais múltiplas do Capítulo 15, Volume II.



(b)

FIGURA 6.29 (a) O movimento dessa chave inglesa deslizando no gelo parece errático até que percebemos que a chave está simplesmente girando em torno do seu centro de massa, conforme o centro desliza em linha reta. (b) Os planetas, asteróides e cometas de nosso sistema solar giram em torno de seu centro de massa coletivo (situado dentro do Sol.)

Massas ao longo de uma reta

Desenvolvemos nosso modelo matemático em estágios. O primeiro estágio é imaginar as massas m_1, m_2 e m_3 em um eixo x rígido mantido por um apoio na origem.

O sistema resultante pode ficar equilibrado ou não. Depende do tamanho das massas e de como elas estão dispostas.

Cada massa m_k exerce uma força $m_k g$ (o peso de m_k) para baixo igual à magnitude da massa vezes a aceleração da gravidade. Cada uma dessas forças

tende a provocar a rotação do eixo em torno da origem, do modo como você move uma gangorra. Esse efeito de rotação, chamado **torque**, é medido multiplicando-se a força $m_k g$ pela distância x_k determinada, do ponto de aplicação à origem. Massas à esquerda da origem exercem torque negativo (sentido anti-horário). Massas à direita da origem exercem torque positivo (sentido horário).

A soma dos torques mede a tendência de rotação de um sistema em torno da origem. Essa soma é chamada **torque do sistemal**.

$$\text{Torque do sistema} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 \tag{1}$$

O sistema ficará em equilíbrio se e somente se seu torque for zero.

Se fatorarmos g da Equação (1), veremos que o sistema de torque é

$$\underbrace{g}_{\text{Uma característica do meio ambiente}} \cdot \underbrace{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)}_{\text{Uma característica do sistema}}$$

Assim, o torque é o produto da aceleração gravitacional g, que é uma característica do meio ambiente no qual o sistema existe, e o número $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$, que é uma característica do próprio sistema, uma constante que permanece a mesma, não importa onde o sistema esteja localizado.

O número $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$ é chamado **momento do sistema em torno da origem**. É a soma dos **momentos** $m_1 g x_1$, $m_2 g x_2$, $m_3 g x_3$ das massas individuais.

$$M_0 = \text{Momento do sistema sobre a origem} = \sum m_k x_k$$

(Passamos aqui para a notação sigma para permitir somas com mais termos.)

Geralmente queremos saber onde colocar o apoio para fazer o sistema ficar em equilíbrio, ou seja, em que ponto $\bar{x}$ colocá-lo para que a soma dos torques dê zero.

Localização especial para equilíbrio

O torque de cada massa em torno do apoio nessa localização especial é

$$\text{Torque de } m_k \text{ sobre } \bar{x} = \begin{pmatrix} \text{distância assinalada} \\ \text{de } m_k \text{ em relação a } \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{força} \\ \text{descendente} \end{pmatrix}$$

$$= (x_k - \bar{x}) m_k g$$

Quando escrevemos a equação que diz que a soma desses torques é zero, temos uma equação que podemos resolver para $\bar{x}$:

$$\sum (x_k - \bar{x}) m_k g = 0 \qquad \text{Somas dos torques iguais a zero.}$$

$$g \sum (x_k - \bar{x}) m_k = 0 \qquad \text{Regra da multiplicação por constante para somatórias.}$$

$$\sum (m_k x_k - \bar{x} m_k) = 0 \qquad g \text{ dividido, } m_k \text{ distribuído.}$$

$$\sum m_k x_k - \sum \bar{x} m_k = 0 \qquad \text{Regra da diferença para somas.}$$

$$\sum m_k x_k = \bar{x} \sum m_k \qquad \text{Multiplicação por constante novamente, rearranjada.}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \qquad \bar{x} \text{ encontrado.}$$

Essa última equação nos diz para determinar $\bar{x}$ dividindo o momento do sistema em torno da origem pela massa total do sistema:

$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{\text{momento do sistema em torno da origem}}{\text{massa do sistema}}$$

O ponto $\bar{x}$ é chamado **centro de massa** do sistema.

Fios e barras finas

Em muitas aplicações práticas, queremos conhecer o centro de massa de uma barra ou um pedaço estreito de metal. Em casos como esses, em que podemos modelar a distribuição de massa com uma função contínua, os sinais de soma em nossas fórmulas tornam-se integrais de uma maneira que agora descrevemos.

Imagine uma longa e fina faixa situada ao longo do eixo x, de $x = a$ a $x = b$, e cortada em pequenos pedaços de massa Δm_k em uma partição do intervalo $[a, b]$. Suponha que x_k seja um ponto qualquer no k-ésimo subintervalo da partição.

O k-ésimo pedaço é Δx_k unidades de tamanho e situa-se a aproximadamente x_k unidades da origem. Agora observe três coisas.

Primeira, o centro de massa da faixa $\bar{x}$ é aproximadamente o mesmo que o do sistema de pontos de massa que obteríamos anexando cada massa Δm_k ao ponto x_k:

$$\bar{x} \approx \frac{\text{Momento do sistema}}{\text{Massa do sistema}}$$

Segunda, o momento de cada pedaço da faixa em torno da origem é aproximadamente $x_k\,\Delta m_k$, portanto o momento do sistema é aproximadamente a soma de $x_k\,\Delta m_k$:

$$\text{Momento do sistema} \approx \sum x_k\,\Delta m_k$$

Terceira, se a densidade da fatia em x_k é $\delta(x_k)$, expressa em termos de massa por unidade de comprimento, e se δ é contínua, então Δm_k é aproximadamente igual a $\delta(x_k)\Delta x_k$ (massa por unidade de comprimento vezes comprimento):

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k)\,\Delta x_k$$

Combinando essas três observações, obtemos

$$\bar{x} \approx \frac{\text{Momento do sistema}}{\text{Massa do sistema}} \approx \frac{\sum x_k\,\Delta m_k}{\sum \Delta m_k} \approx \frac{\sum x_k\,\delta(x_k)\,\Delta x_k}{\sum \delta(x_k)\,\Delta x_k} \qquad (2)$$

A soma no último numerador na Equação (2) é uma soma de Riemann para a função contínua $x\delta(x)$ ao longo do intervalo fechado $[a, b]$. A soma no denominador é uma soma de Riemann para a função $\delta(x)$ ao longo desse intervalo. Esperamos que as aproximações feitas na Equação (2) melhorem à medida que a faixa é dividida em intervalos menores e somos levados à equação

Densidade
A densidade de um material é sua massa por unidade de volume. Na prática, entretanto, tendemos a usar unidades que podemos convenientemente medir. Para fios, barras e faixas estreitas, utilizamos massa por unidade de comprimento. Para folhas planas e placas, usamos massa por unidade de área.

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b x\delta(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b \delta(x)\,dx}$$

Essa é a fórmula que usamos para determinar $\bar{x}$.

Momento, massa e centro de massa de uma barra ou faixa fina ao longo do eixo x com função densidade $\delta(x)$

Momento em torno da origem: $$M_0 = \int_a^b x\delta(x)\,dx \qquad (3a)$$

Massa: $$M = \int_a^b \delta(x)\,dx \qquad (3b)$$

Centro de massa: $$\bar{x} = \frac{M_0}{M} \qquad (3c)$$

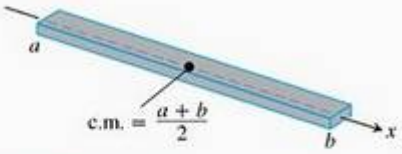


FIGURA 6.30 O centro de massa de uma barra fina e reta ou faixa de densidade constante situa-se no meio do caminho entre um extremo e outro (Exemplo 1).

EXEMPLO 1 Faixas e barras de densidade constante

Mostre que o centro de massa de uma faixa reta e fina ou barra de densidade constante situa-se no meio do caminho entre um extremo e outro.

SOLUÇÃO Modelamos a faixa como uma parte do eixo x de $x = a$ a $x = b$ (Figura 6.30). Nosso objetivo é mostrar que $\bar{x} = (a + b)/2$, o ponto médio entre a e b.

A chave é a densidade ter um valor constante. Isso nos permite considerar a função $\delta(x)$ nas integrais da Equação (3) como uma constante (chame-a δ), com o resultado

$$M_0 = \int_a^b \delta x\,dx = \delta\int_a^b x\,dx = \delta\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{\delta}{2}(b^2 - a^2)$$

$$M = \int_a^b \delta\,dx = \delta\int_a^b dx = \delta\left[x\right]_a^b = \delta(b - a)$$

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\frac{\delta}{2}(b^2 - a^2)}{\delta(b - a)}$$

$$= \frac{a + b}{2}$$

Os δ são cancelados na fórmula para $\bar{x}$.

EXEMPLO 2 Barra de densidade variável

A barra de 10 m de comprimento da Figura 6.31 fica mais espessa da esquerda para a direita, de modo que sua densidade, em vez de ser constante, é $\delta(x) = 1 + (x/10)$ kg/m. Determine o centro de massa da barra.

SOLUÇÃO O momento da barra em torno da origem (Equação 3a) é

$$M_0 = \int_0^{10} x\delta(x)\,dx = \int_0^{10} x\left(1 + \frac{x}{10}\right)dx = \int_0^{10}\left(x + \frac{x^2}{10}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{30}\right]_0^{10} = 50 + \frac{100}{3} = \frac{250}{3}\ \text{kg}\cdot\text{m}.$$

As unidades de um momento são massa × comprimento.

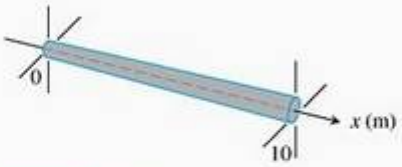


FIGURA 6.31 Podemos considerar uma barra de espessura variável como uma barra de densidade variável (Exemplo 2).

A massa da barra (Equação 3b) é

$$M = \int_0^{10} \delta(x)\,dx = \int_0^{10} \left(1 + \frac{x}{10}\right) dx = \left[x + \frac{x^2}{20}\right]_0^{10} = 10 + 5 = 15 \text{ kg}$$

O centro de massa (Equação 3c) está localizado no ponto

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{250}{3} \cdot \frac{1}{15} = \frac{50}{9} \approx 5{,}56 \text{ m}$$

Massas distribuídas em uma região plana

Suponha que tenhamos um conjunto finito de massas localizadas no plano, com massa m_k no ponto (x_k, y_k)(veja a Figura 6.32). A massa do sistema é

$$\text{Massa do sistema:} \quad M = \sum m_k$$

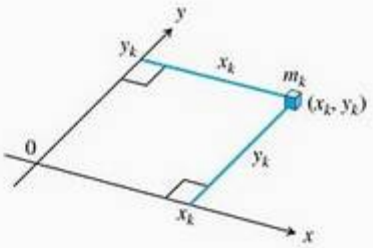


FIGURA 6.32 Cada massa m_k tem um momento em torno de cada eixo.

Cada massa m_k tem um momento em torno de cada eixo. Seu momento em torno do eixo x é $m_k y_k$ e em torno do eixo y é $m_k x_k$. Os momentos do sistema inteiro em torno dos dois eixos são

$$\text{Momento em torno do eixo } x\text{:} \quad M_x = \sum m_k y_k$$

$$\text{Momento em torno do eixo } y\text{:} \quad M_y = \sum m_k x_k$$

A abscissa do centro de massa do sistema é definida como

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \tag{4}$$

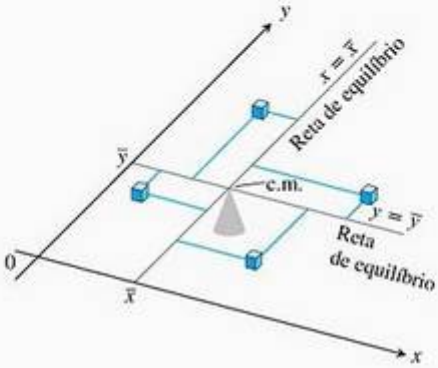


FIGURA 6.33 Um arranjo bidimensional de massas equilibradas em seu centro de massa.

Com essa escolha de $\bar{x}$ como no caso de uma dimensão, o sistema fica equilibrado em torno da reta $x = \bar{x}$ (Figura 6.33).

A ordenada do centro de massa do sistema é definida como

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} \tag{5}$$

a

Com essa escolha de $\bar{y}$, o sistema fica equilibrado em torno da reta $y = \bar{y}$ também. Os torques exercidos pelas massas em torno da reta $y = \bar{y}$ se cancelam. Assim, uma vez que o equilíbrio é atingido, o sistema se comporta como se toda a sua massa estivesse no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$. Chamamos esse ponto **centro de massa** do sistema.

Placas finas e planas

Em muitas aplicações, precisamos determinar o centro de massa de uma placa fina e plana: um disco de alumínio ou uma folha triangular de aço. Nesses casos, presumimos que a distribuição de massa seja contínua e as fórmulas que usamos para calcular $\bar{x}$ e $\bar{y}$ contenham integrais, em vez de somas finitas. As integrais aparecem da seguinte maneira.

Imagine a placa ocupando uma região no plano xy, cortada em faixas finas paralelas a um dos eixos (na Figura 6.34, o eixo y). O centro de massa de uma faixa típica é $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Para nós é como se a massa da faixa Δm estivesse concentrada em $(\tilde{x}, \tilde{y})$. O momento de uma faixa em torno do eixo y é então $\tilde{x}\,\Delta m$ e em torno do eixo x é $\tilde{y}\,\Delta m$. As equações (4) e (5) então se tornam

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x}\,\Delta m}{\sum \Delta m} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y}\,\Delta m}{\sum \Delta m}$$

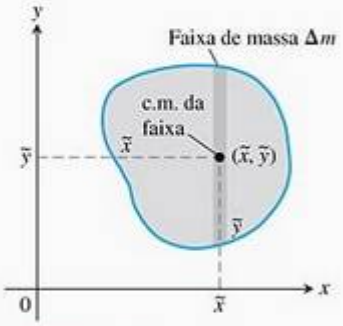


FIGURA 6.34 Uma placa cortada em finas faixas paralelas ao eixo y. O momento exercido por uma faixa típica em torno de cada eixo é o momento que sua massa Δm exerceria se estivesse concentrada no centro de massa $(\tilde{x}, \tilde{y})$ da faixa.

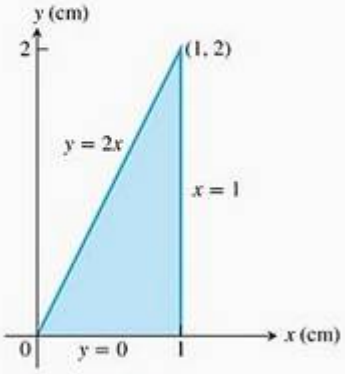


FIGURA 6.35 A placa do Exemplo 3.

Como acontece no caso de uma dimensão, as somas são somas de Riemann para integrais e se aproximam dessas integrais como valores-limite, à medida que as faixas em que a placa é cortada tornam-se cada vez mais estreitas. Escrevemos essas integrais simbolicamente como

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dm}{\int dm} \qquad \text{e} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dm}{\int dm}$$

Momentos, massa e centro de massa de uma placa fina que cobre uma região no plano xy

Momento em torno do eixo x: $\quad M_x = \int \tilde{y}\, dm$

Momento em torno do eixo y: $\quad M_y = \int \tilde{x}\, dm \qquad (6)$

Massa: $\quad M = \int dm$

Centro de massa: $\quad \bar{x} = \dfrac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \dfrac{M_x}{M}$

Para avaliar essas integrais, desenhamos a placa no plano de coordenadas e esboçamos uma faixa de massa paralela a um dos eixos coordenados. Então expressamos a massa da faixa dm e as coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y})$ do centro de massa da faixa em termos de x ou y. Por fim, integramos $\tilde{y}\, dm$, $\tilde{x}\, dm$ e dm entre limites de integração determinados pela localização da placa no plano.

EXEMPLO 3 Placa de densidade constante

A placa triangular mostrada na Figura 6.35 tem uma densidade constante de $\delta = 3\ g/\text{cm}^2$. Determine

(a) o momento M_y da placa em torno do eixo y.
(b) a massa M da placa.
(c) a abscissa do centro de massa (c.m.) da placa.

SOLUÇÃO

Método 1: faixas verticais (Figura 6.36)

(a) O momento M_y: a faixa vertical típica tem

centro de massa (c.m.): $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, x)$
comprimento: $2x$
largura: dx
área: $dA = 2x\, dx$
massa: $dm = \delta\, dA = 3 \cdot 2x\, dx = 6x\, dx$
distância entre c.m. e o eixo y: $\tilde{x} = x$

O momento da faixa em torno do eixo y é

$$\tilde{x}\, dm = x \cdot 6x\, dx = 6x^2\, dx$$

O momento da placa em torno do eixo y é, portanto,

$$M_y = \int \tilde{x}\, dm = \int_0^1 6x^2\, dx = 2x^3\Big]_0^1 = 2\ \text{g} \cdot \text{cm}.$$

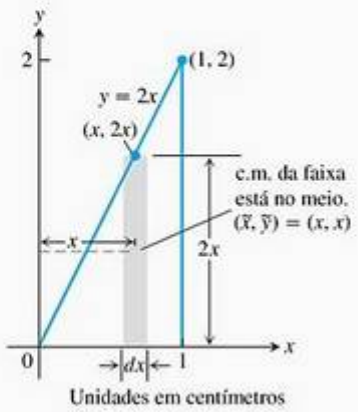


FIGURA 6.36 Modelando a placa do Exemplo 3 com faixas verticais.

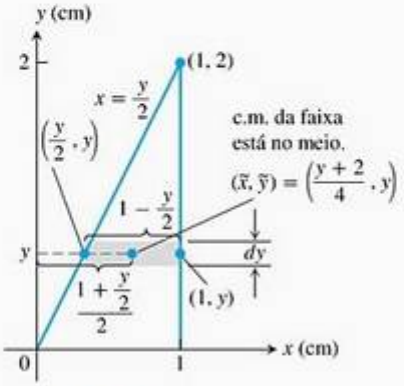


FIGURA 6.37 Modelando a placa do Exemplo 3 com faixas horizontais.

(b) A massa da placa:

$$M = \int dm = \int_0^1 6x\,dx = 3x^2\Big]_0^1 = 3 \text{ g}$$

(c) A abscissa do centro de massa da placa:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2 \text{ g} \cdot \text{cm}}{3 \text{ g}} = \frac{2}{3} \text{ cm}$$

Por um cálculo similar, podemos encontrar M_x e $\tilde{y} = M_x/M$.

Método 2: faixas horizontais (Figura 6.37)

(a) O momento M_y: a ordenada do centro de massa de uma faixa horizontal típica é y (veja a figura), portanto

$$\tilde{y} = y$$

A abscissa é a abscissa do ponto médio através do triângulo. Isso a torna a média de $y/2$ (o valor x da faixa à esquerda) e 1 (o valor x da faixa à direita):

$$\tilde{x} = \frac{(y/2) + 1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y + 2}{4}$$

Temos também

comprimento: $1 - \dfrac{y}{2} = \dfrac{2 - y}{2}$

largura: dy

área: $dA = \dfrac{2 - y}{2}\,dy$

massa: $dm = \delta\,dA = 3 \cdot \dfrac{2 - y}{2}\,dy$

distância de c.m. ao eixo y: $\tilde{x} = \dfrac{y + 2}{4}$

O momento da faixa em torno do eixo y é

$$\tilde{x}\,dm = \frac{y + 2}{4} \cdot 3 \cdot \frac{2 - y}{2}\,dy = \frac{3}{8}(4 - y^2)\,dy$$

O momento da placa em torno do eixo y é

$$M_y = \int \tilde{x}\,dm = \int_0^2 \frac{3}{8}(4 - y^2)\,dy = \frac{3}{8}\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{16}{3}\right) = 2 \text{ g} \cdot \text{cm}$$

(b) A massa da placa:

$$M = \int dm = \int_0^2 \frac{3}{2}(2 - y)\,dy = \frac{3}{2}\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}(4 - 2) = 3 \text{ g}$$

(c) A abscissa do centro de massa da placa:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2 \text{ g} \cdot \text{cm}}{3 \text{ g}} = \frac{2}{3} \text{ cm.}$$

Por um cálculo similar, poderíamos determinar M_x e $\bar{y}$.

Se a distribuição de massa em uma placa fina e plana tiver um eixo de simetria, o centro de massa vai situar-se nesse eixo. Se existirem dois eixos, o centro de massa vai situar-se na sua interseção. Esses fatos geralmente ajudam a simplificar nosso trabalho.

Como determinar o centro de massa de uma placa

1. Desenhe a placa no plano xy.
2. Esboce uma fatia de massa paralela a um dos eixos coordenados e determine suas dimensões.
3. Determine a massa da faixa dm e o centro de massa $(\tilde{x}, \tilde{y})$.
4. Integre $\tilde{y}\ dm$, $\tilde{x}\ dm$ e dm para determinar M_x, M_y e M.
5. Divida os momentos pela massa para calcular $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

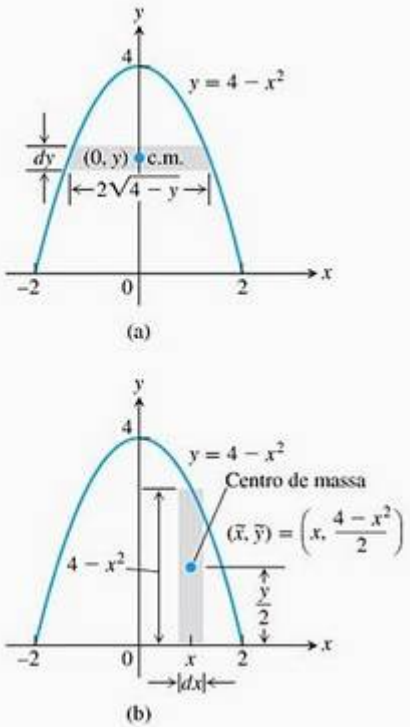


FIGURA 6.38 A modelagem da placa do Exemplo 4 com (a) faixas horizontais leva a uma integração inconveniente, portanto a modelamos com (b) faixas verticais.

EXEMPLO 4 Placa de densidade constante

Determine o centro de massa de uma placa fina de densidade constante δ que cobre a região limitada superiormente pela parábola $y = 4 - x^2$ e inferiormente pelo eixo x (Figura 6.38).

SOLUÇÃO Como a placa é simétrica em torno do eixo y e sua densidade é constante, a distribuição de massa é simétrica em torno do eixo y e o centro de massa situa-se no eixo y. Assim, $\bar{x} = 0$. Falta então determinar $\bar{y} = M_x / M$.

Uma tentativa de cálculo com faixas horizontais (Figura 6.38a) leva a uma integração inconveniente.

$$M_x = \int_0^4 2\delta y\sqrt{4 - y}\, dy$$

Modelamos, portanto, a distribuição de massa com faixas verticais (Figura 6.38b). A faixa vertical típica tem

centro de massa (c.m.): $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \dfrac{4 - x^2}{2}\right)$

comprimento: $4 - x^2$

largura: dx

área: $dA = (4 - x^2)\, dx$

massa: $dm = \delta\, dA = \delta(4 - x^2)\, dx$

distância entre o c.m. e o eixo x: $\tilde{y} = \dfrac{4 - x^2}{2}$

O momento da faixa em torno do eixo x é

$$\tilde{y}\, dm = \frac{4 - x^2}{2} \cdot \delta(4 - x^2)\, dx = \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2\, dx$$

O momento da placa em torno do eixo x é

$$M_x = \int \tilde{y}\, dm = \int_{-2}^{2} \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2\, dx$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_{-2}^{2}(16 - 8x^2 + x^4)\, dx = \frac{256}{15}\delta \qquad (7)$$

A massa da placa é

$$M = \int dm = \int_{-2}^{2} \delta(4 - x^2)\, dx = \frac{32}{3}\delta \qquad (8)$$

Portanto,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{(256/15)\,\delta}{(32/3)\,\delta} = \frac{8}{5}$$

O centro de massa da placa é o ponto

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{5}\right)$$

EXEMPLO 5 Placa de densidade variável

Determine o centro de massa da placa do Exemplo 4 se a densidade no ponto (x, y) for $\delta = 2x^2$, duas vezes o quadrado da distância do ponto para o eixo y.

SOLUÇÃO A distribuição de massa é ainda simétrica em torno do eixo y, portanto $\bar{x} = 0$, Com $\delta = 2x^2$, as equações (7) e (8) tornam-se

$$M_x = \int \tilde{y}\, dm = \int_{-2}^{2} \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2\, dx = \int_{-2}^{2} x^2(4 - x^2)^2\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (16x^2 - 8x^4 + x^6)\, dx = \frac{2.048}{105}$$

$$M = \int dm = \int_{-2}^{2} \delta(4 - x^2)\, dx = \int_{-2}^{2} 2x^2(4 - x^2)\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (8x^2 - 2x^4)\, dx = \frac{256}{15}$$

Portanto,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2.048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}$$

O novo centro de massa da placa é

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right)$$

EXEMPLO 6 Fio de densidade constante

Determine o centro de massa de um fio de densidade constante δ com formato de semicírculo com raio a.

SOLUÇÃO Modelamos o fio com o semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (Figura 6.39). A distribuição de massa é simétrica em torno do eixo y, portanto $\bar{x} = 0$. Para determinar $\bar{y}$, imaginamos o fio dividido em pequenos segmentos. O segmento típico (Figura 6.39a) tem

comprimento: $ds = a\, d\theta$

massa: $dm = \delta\, ds = \delta a\, d\theta$

distância entre o c.m. e o eixo x: $\tilde{y} = a \operatorname{sen} \theta$

Massa por unidade de comprimento vezes comprimento.

Portanto,

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{\pi} a \operatorname{sen} \theta \cdot \delta a\, d\theta}{\int_0^{\pi} \delta a\, d\theta} = \frac{\delta a^2 \left[-\cos \theta\right]_0^{\pi}}{\delta a \pi} = \frac{2}{\pi} a$$

O centro de massa situa-se no eixo de simetria no ponto $(0, 2a/\pi)$, cerca de dois terços do caminho para cima a partir da origem (Figura 6.39b).

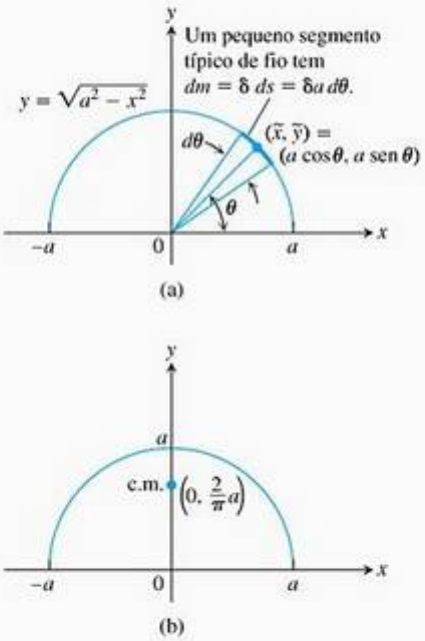


FIGURA 6.39 O fio semicircular do Exemplo 6. (a) As dimensões e variáveis usadas para determinar o centro de massa. (b) O centro de massa não se situa no fio.

Centróides

Quando a função densidade é constante, ela se cancela no denominador e no numerador das fórmulas para $\bar{x}$ e $\bar{y}$. Isso aconteceu em quase todos os

exemplos desta seção. No que diz respeito a $\bar{x}$ e $\bar{y}$, δ poderia muito bem ter sido 1. Assim, quando a densidade é constante, a localização do centro de massa é uma característica da geometria do objeto e não do material de que ele é feito. Em tais casos, os engenheiros podem chamar o centro de massa de **centróide** do formato, como em "Determine o centróide de um triângulo ou de um cone sólido". Para isso, simplesmente faça δ igual a 1 e continue para determinar $\bar{x}$ e $\bar{y}$ como antes, dividindo momentos por massas.

Exercícios 6.4

Barras finas

1. Uma criança que pesa 80 lb e outra que pesa 100 lb estão equilibradas em uma gangorra. A criança de 80 lb está a 5 pés do ponto de apoio. A que distância do ponto de apoio está a criança de 100 lb?

2. As pontas de um tronco são colocadas em duas balanças. Uma balança registra 100 kg e a outra, 200 kg. Onde é o centro de massa do tronco?

3. As pontas de duas barras de aço finas de igual comprimento são soldadas juntas em ângulo reto para fazer uma armação. Localize o centro de massa da armação. (*Dica*: Onde é o centro de massa de cada barra?)

4. Você solda as pontas de duas barras de aço em ângulo reto em uma armação. Uma barra tem duas vezes o comprimento da outra. Onde está o centro de massa da armação? (*Dica*: Onde é o centro de massa de cada barra?)

Os exercícios 5–12 dão funções densidade de barras finas situadas ao longo de vários intervalos do eixo x. Use as equações (3a) a (3c) para determinar cada momento das barras em torno da origem, a massa e o centro de massa.

5. $\delta(x) = 4, \quad 0 \le x \le 2$
6. $\delta(x) = 4, \quad 1 \le x \le 3$
7. $\delta(x) = 1 + (x/3), \quad 0 \le x \le 3$
8. $\delta(x) = 2 - (x/4), \quad 0 \le x \le 4$
9. $\delta(x) = 1 + \left(1/\sqrt{x}\right), \quad 1 \le x \le 4$
10. $\delta(x) = 3(x^{-3/2} + x^{-5/2}), \quad 0.25 \le x \le 1$
11. $\delta(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \le x < 1 \\ x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$
12. $\delta(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Placas finas com densidade constante

Nos exercícios 13–26, determine o centro de massa de uma placa fina de densidade constante δ que cobre a região dada.

13. A região limitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $y = 4$.
14. A região limitada pela parábola $y = 25 - x^2$ e pelo eixo x.
15. A região limitada pela parábola $y = x - x^2$ e pela reta $y = -x$.
16. A região compreendida pelas parábolas $y = x^2 - 3$ e $y = -2x^2$.
17. A região limitada pelo eixo y e pela curva $x = y - y^3$, $0 \le y \le 1$.
18. A região limitada pela parábola $x = y^2 - y$ e pela reta $y = x$.
19. A região limitada pelo eixo x e pela curva $y = \cos x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$.
20. A região entre o eixo x e a curva $y = \sec^2 x$, $-\pi/4 \le x \le \pi/4$.
21. T A região limitada pela curva $y = 1/x$ e pelo eixo x de $x = 1$ a $x = 2$. Dê as coordenadas com duas casas decimais.
22. (a) A região cortada do primeiro quadrante pelo círculo $x^2 + y^2 = 9$.

    (b) A região limitada pelo eixo x e o semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$.

    Compare sua resposta no item (b) com a resposta no item (a).
23. A região no primeiro e no quarto quadrantes delimitada pelas curvas $y = 1/(1 + x^2)$ e $y = -1/(1 + x^2)$ e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.
24. A região limitada pelas parábolas $y = 2x^2 - 4x$ e $y = 2x - x^2$.
25. A região entre a curva $y = 1/\sqrt{x}$ e o eixo x de $x = 1$ a $x = 16$.

26. A região limitada superiormente pela curva $y = 1/x^3$, inferiormente pela curva $y = -1/x^3$ e à esquerda e à direita pelas retas $x = 1$ e $x = a > 1$. Determine também $\lim_{a\to\infty} \bar{x}$.

Placas finas com densidade variável

27. Determine o centro de massa de uma placa fina que cobre a região entre o eixo x e a curva $y = 2/x^2$, $1 \le x \le 2$, se a densidade da placa no ponto (x, y) for $\delta(x) = x^2$.

28. Determine o centro de massa de uma placa fina que cobre a região limitada inferiormente pela parábola $y = x^2$ e superiormente pela reta $y = x$ se a densidade da placa no ponto (x, y) for $\delta(x) = 12x$.

29. Determine o centro de massa da placa fina do Exercício 25 considerando que, em vez de constante, a função densidade seja $\delta(x) = 4/\sqrt{x}$.

30. A região entre a curva $y = 2/x$ e o eixo x de $x = 1$ até $x = 4$ é girada em torno do eixo x para gerar um sólido.

(a) Determine o volume do sólido.

(b) Determine o centro de massa de uma chapa fina que cobre a região se a densidade da chapa no ponto (x, y) for $\delta(x) = \sqrt{x}$.

(c) Esboce a chapa e mostre o centro de massa em seu esboço.

31. A região limitada pelas curvas $y = \pm 4/\sqrt{x}$ e as retas $x = 1$ e $x = 4$ é girada em torno do eixo y, gerando um sólido.

(a) Determine o volume do sólido.

(b) Determine o centro de massa de uma placa fina que cobre a região se a densidade da placa no ponto (x, y) for $\delta(x) = 1/x$.

(c) Esboce a placa e mostre o centro de massa em seu esboço.

32. A região entre a curva $y = 1/(2\sqrt{x})$ e o eixo x de $x = 1/4$ a $x = 4$ é girada em torno do eixo x, gerando um sólido.

(a) Determine o volume do sólido.

(b) Encontre o centróide da região.

Centróides de triângulos

33. O centróide de um triângulo situa-se na interseção das medianas do triângulo (*Figura 6.40a*) Você deve recordar que o ponto dentro de um triângulo que se situa a um terço do caminho do ponto médio de cada lado em direção ao vértice oposto é o ponto onde as três medianas do triângulo se cruzam. Demonstre que o centróide se situa na interseção das medianas mostrando que ele também se situa a um terço do caminho de cada lado em direção ao vértice oposto. Para isso, siga os passos indicados.

i. Coloque um lado do triângulo no eixo x, como na Figura 6.40b. Expresse dm em termos de L e dy.

ii. Use triângulos semelhantes para mostrar que $L = (b/h)(h - y)$. Substitua essa expressão por L na sua fórmula para dm.

iii. Mostre que $\bar{y} = h/3$.

iv. Faça o mesmo com os outros lados.

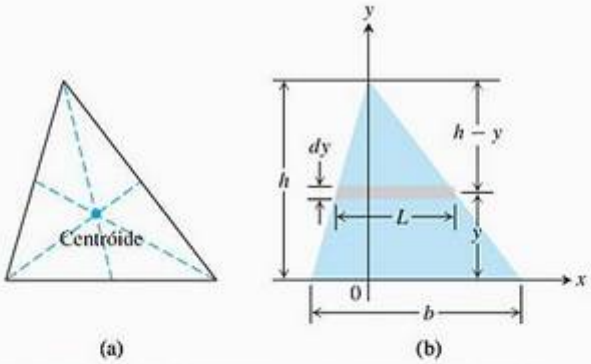


FIGURA 6.40 O triângulo do Exercício 33. (a) O centróide. (b) As dimensões e variáveis usadas para localizar o centro de massa.

Use o resultado do Exercício 33 para determinar os centróides dos triângulos cujos vértices aparecem nos exercícios 34–38. Considere $a, b > 0$.

34. $(-1, 0), (1, 0), (0, 3)$

35. $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$

36. $(0, 0), (a, 0), (0, a)$

37. $(0, 0), (a, 0), (0, b)$

38. $(0, 0), (a, 0), (a/2, b)$

Fios finos

39. Densidade constante Determine o momento em torno do eixo x de um fio de densidade constante que se situa ao longo da curva $y = \sqrt{x}$ de $x = 0$ a $x = 2$.

40. Densidade constante Determine o momento em torno do eixo x de um fio de densidade constante que se situa ao longo da curva $y = x^3$ de $x = 0$ a $x = 1$.

41. Densidade variável Suponha que a densidade do fio do Exemplo 6 seja $\delta = k \operatorname{sen} \theta$ (k constante). Determine o centro de massa.

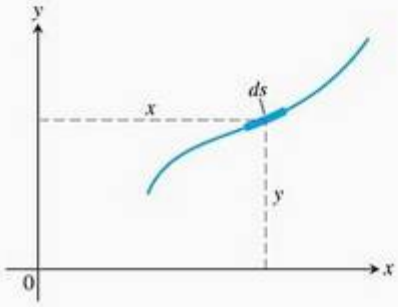
42. Densidade variável Suponha que a densidade do fio do Exemplo 6 seja $\delta = 1 + k\,|\cos \theta|$ (k constante). Determine o centro de massa.

Fórmulas de engenharia

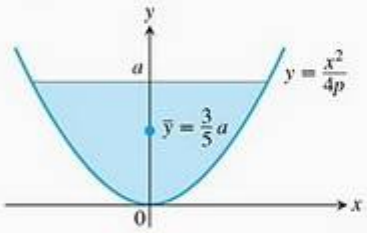
Verifique as afirmações e fórmulas nos exercícios 43–46.

43. As coordenadas do centróide de uma curva plana diferenciável são

$$\bar{x} = \frac{\int x\,ds}{\text{comprimento}} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,ds}{\text{comprimento}}$$

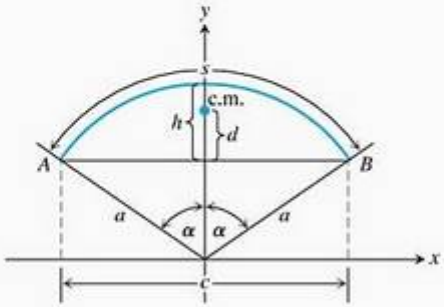


44. Qualquer que seja o valor de $p > 0$ na equação $y = x^2/(4p)$, a ordenada do centróide do segmento parabólico que se vê aqui é $\bar{y} = (3/5)a$.



45. Para fios e barras finas de densidade constante com formato de arcos circulares centrados na origem e simétricos em torno do eixo y, a ordenada do centro de massa é

$$\bar{y} = \frac{a \operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = \frac{ac}{s}$$



46. (*Continuação de Exercício 45.*)

(a) Mostre que, quando α é pequeno, a distância d do centróide à corda AB é aproximadamente $2h/3$ (na notação dessa figura) seguindo os passos indicados.

i. Mostre que

$$\frac{d}{h} = \frac{\operatorname{sen}\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha} \tag{9}$$

ii. Trace o gráfico de

T

$$f(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha}$$

e use o recurso de traço para mostrar que

$$\lim_{\alpha\to 0^+} f(\alpha) \approx 2/3.$$

(b) O erro (diferença entre d e $2h/3$) é pequeno mesmo para ângulos maiores que 45°. Veja você mesmo calculando o lado direito da Equação (9) para $\alpha = 0{,}2$; 0,4; 0,6; 0,8 e 1 radiano.

6.5 Áreas de superfícies de revolução e os teoremas de Pappus

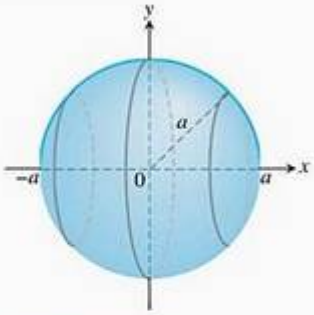


FIGURA 6.41 A rotação do semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ de raio a com centro na origem gera uma superfície esférica com área $4\pi a^2$.

Quando você pula corda, a corda forma uma superfície no espaço em volta do seu corpo denominada *superfície de revolução*. A "área" dessa superfície depende do comprimento da corda e da distância entre cada um de seus segmentos e o eixo de revolução. Nesta seção, definiremos áreas de superfícies de revolução. Superfícies mais complexas serão discutidas no Capítulo 16, Volume II.

Definição de área de superfície

Queremos que nossa definição da área de uma superfície de revolução seja coerente com os resultados que a geometria clássica apresenta para áreas de superfície de esferas, cilindros circulares e cones. Assim, se a corda mencionada no parágrafo introdutório assume a forma de um semicírculo com raio a, que gira em torno do eixo x (Figura 6.41), ela gera uma esfera com área de superfície $4\pi a^2$.

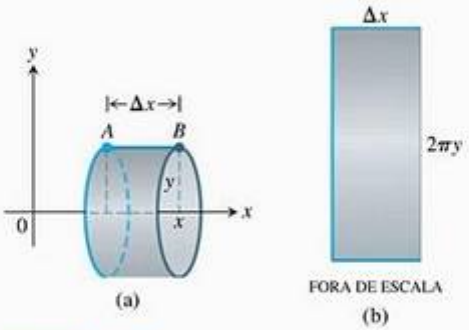


FIGURA 6.42 (a) A superfície cilíndrica gerada pela rotação em torno do eixo x do segmento de reta horizontal AB, cujo comprimento é Δx, tem área $2\pi y\Delta x$. (b) Cortada e desenrolada, a superfície cilíndrica forma um retângulo.

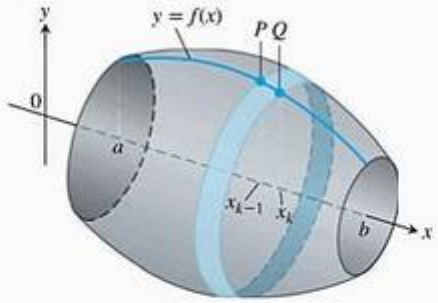


FIGURA 6.44 A superfície gerada pela rotação do gráfico de uma função não negativa $y = f(x)$, $a \le x \le b$, em torno do eixo x. A superfície é um conjunto de faixas como aquela gerada pelo arco PQ.

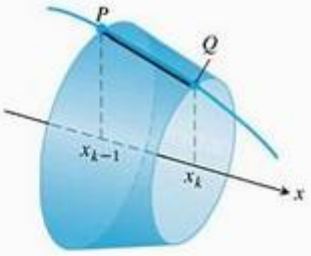


FIGURA 6.45 A rotação do segmento de reta que une P e Q gera um tronco de cone.

Antes de considerar curvas gerais, vamos começar girando em torno do eixo x segmentos de reta horizontais e inclinados. Se girarmos em torno desse eixo o segmento de reta horizontal AB, cujo comprimento é Δx, geraremos um cilindro com área de superfície $2\pi y\Delta x$ (Figura 6.42a). Essa área é igual à de um retângulo com lados de comprimento Δx e $2\pi y$ (Figura 6.42b). O comprimento $2\pi y$ é a circunferência do círculo de raio y gerado pela rotação, em torno do eixo x, do ponto (x, y) situado na reta AB.

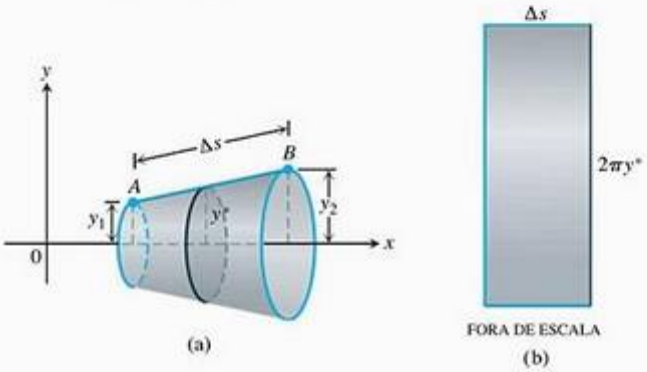


FIGURA 6.43 (a) O tronco de cone gerado pela rotação em torno do eixo x do segmento de reta inclinado AB, cujo comprimento é Δs, tem área $2\pi y^* \Delta s$. (b) A área do retângulo para $y^* = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, a altura média de AB acima do eixo x.

Suponha que o segmento de reta AB tenha comprimento Δs e, em vez de horizontal, seja inclinado. Agora, quando girado em torno do eixo x, AB gera um tronco de cone (Figura 6.43a). Segundo a geometria clássica, a área de superfície desse tronco é $2\pi y^* \Delta s$, onde $y^* = (y_1 + y_2)/2$ é a altura média do segmento inclinado AB acima do eixo x. Essa área de superfície é igual à de um retângulo com lados de comprimento Δs e $2\pi y^*$ (Figura 6.43b).

Partindo desses princípios geométricos, vamos definir a área de uma superfície gerada pela rotação de curvas mais gerais em torno do eixo x. Suponha que queiramos definir a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, da curva de uma função contínua não negativa $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Dividimos o intervalo fechado $[a, b]$ da maneira usual e usamos os pontos da partição para subdividir o gráfico em arcos curtos. A Figura 6.44 mostra um arco típico PQ e a faixa gerada por ele como parte do gráfico de f.

Quando o arco PQ gira em torno do eixo x, o segmento de reta que une P e Q gera um tronco de cone cujo eixo coincide com o eixo x (Figura 6.45). A área de superfície desse tronco serve para aproximar a área da superfície da faixa gerada pelo arco PQ. A área de superfície do tronco do cone mostrado na Figura 6.45 é $2\pi y^* L$, onde y^* é a altura média do segmento de reta que une P e Q, e L é seu comprimento (assim como anteriormente). Como $f \ge 0$, a Figura 6.46 nos sugere que a altura média do segmento de reta é $y^* = (f(x_{k-1}) + f(x_k))/2$ e que seu comprimento é $L = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. Portanto,

$$\text{Área de superfície do tronco} = 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$
$$= \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

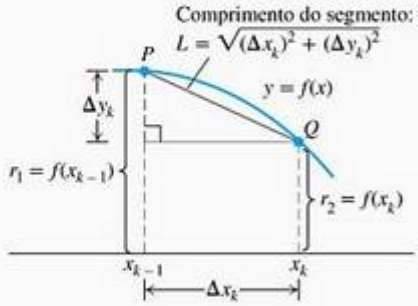


FIGURA 6.46 Dimensões associadas ao arco e ao segmento de reta PQ.

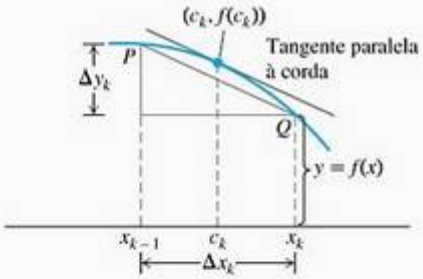


FIGURA 6.47 Se f é lisa, o teorema do valor médio garante a existência de um ponto c_k onde a tangente é paralela ao segmento PQ.

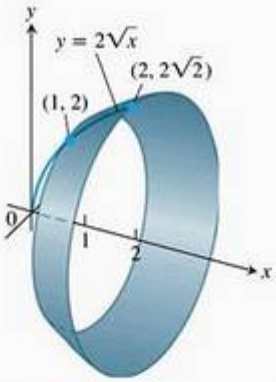


FIGURA 6.48 No Exemplo 1 calculamos a área dessa superfície.

A área da superfície original, sendo a soma das áreas das faixas geradas por arcos como o arco PQ, é aproximada pela soma das áreas dos troncos

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \tag{1}$$

Esperamos que a aproximação melhore conforme a partição de $[a, b]$ torne-se mais refinada. Além disso, se a função f é derivável, então, de acordo com o teorema do valor médio, existe um ponto $(c_k, f(c_k))$ na curva entre P e Q onde a tangente é paralela ao segmento PQ (Figura 6.47). Nesse ponto,

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$$

$$\Delta y_k = f'(c_k)\,\Delta x_k$$

Com a substituição para Δy_k, as somas da Equação (1) assumem a forma

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\,\Delta x_k)^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\,\Delta x_k \tag{2}$$

Essas somas não são as somas de Riemann de uma função, pois os pontos x_{k-1}, x_k e c_k não são os mesmos. No entanto, um teorema do cálculo avançado nos garante que, conforme a norma da partição de $[a, b]$ tende a zero, as somas da Equação (2) convergem para a integral

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Podemos definir, portanto, que essa integral é a área da superfície gerada pela rotação da curva de f de a até b.

Definição **Área de superfície de revolução em torno do eixo x**
Se a função $f(x) \geq 0$ é continuamente derivável em $[a, b]$, a **área** da superfície gerada pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do eixo x é

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \tag{3}$$

A raiz quadrada na Equação (3) é a mesma que aparece na fórmula do comprimento da curva geratriz da Equação (2) da Seção 6.3.

EXEMPLO 1 Aplicando a fórmula da área de superfície

Determine a área de superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, da curva $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$ (Figura 6.48).

SOLUÇÃO Calculamos a fórmula

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad \text{Equação (3)}$$

com

$$a = 1, \qquad b = 2, \qquad y = 2\sqrt{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

Com essas substituições,

$$S = \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\,\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,dx = 4\pi \int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx$$
$$= 4\pi \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{8\pi}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right)$$

Revolução em torno do eixo y

No caso de revolução em torno do eixo y, permutamos x e y na Equação (3).

Área de superfície no caso de revolução em torno do eixo y

Se $x = g(y) \geq 0$ é continuamente derivável em $[c, d]$, a área de superfície gerada pela rotação da curva $x = g(y)$ em torno do eixo y é

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\,dy \qquad (4)$$

EXEMPLO 2 Determinando área no caso de revolução em torno do eixo y

O segmento de reta $x = 1 - y$, $0 \leq y \leq 1$, é girado em torno do eixo y, gerando o cone da Figura 6.49. Determine sua área de superfície lateral (excluindo a área de base).

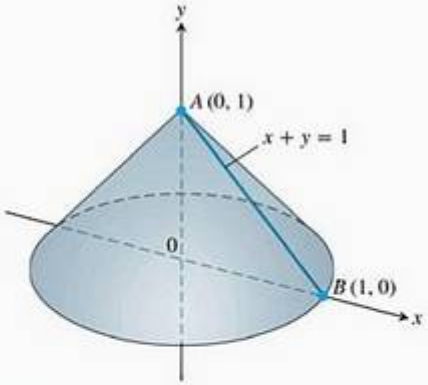


FIGURA 6.49 A rotação do segmento de reta AB em torno do eixo y gera um cone cuja área de superfície lateral podemos agora calcular de duas maneiras distintas (Exemplo 2).

SOLUÇÃO Temos aqui um cálculo que podemos verificar com uma fórmula dada pela geometria:

$$\text{Área de superfície lateral} = \frac{\text{Circunferência da base}}{2} \times \text{Altura inclinada} = \pi\sqrt{2}$$

Para ver como a Equação (4) dá o mesmo resultado, vamos considerar

$$c = 0, \qquad d = 1, \qquad x = 1 - y, \qquad \frac{dx}{dy} = -1$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

e calcular

$$\begin{aligned} S &= \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 2\pi(1 - y)\sqrt{2}\, dy \\ &= 2\pi\sqrt{2}\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

Conforme esperado, os resultados coincidem.

Curvas parametrizadas

Independentemente de qual seja o eixo de revolução, x ou y, as raízes quadradas que aparecem nas equações (3) e (4) são as mesmas que aparecem nas fórmulas para o comprimento do arco da Seção 6.3. Se a curva é parametrizada pelas equações $x = f(t)$ e $y = g(t)$, $a \le t \le b$, onde f e g são continuamente deriváveis em $[a, b]$, então a raiz quadrada correspondente que aparece na fórmula do comprimento do arco é

$$\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Essa observação nos leva às fórmulas a seguir, usadas para calcular a área de superfícies de revolução de curvas parametrizadas lisas.

Área de superfície de revolução para curvas parametrizadas

Se uma curva lisa $x = f(t)$ e $y = g(t)$, $a \le t \le b$, é percorrida exatamente uma vez quando t aumenta de a para b, então a área das superfícies geradas pela rotação da curva em torno dos eixos de coordenadas é calculada como se segue.

1. Rotação em torno do eixo x $(y \ge 0)$:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (5)$$

2. Rotação em torno do eixo y $(x \ge 0)$:

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (6)$$

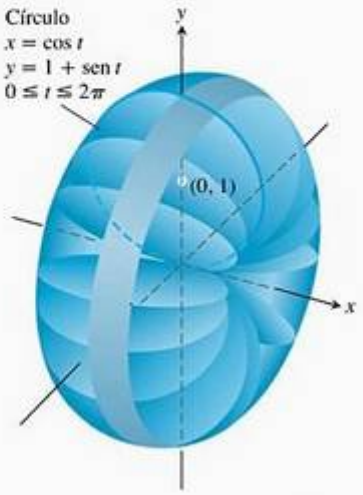


FIGURA 6.50 No Exemplo 3, calculamos a área da superfície de revolução gerada por essa curva parametrizada.

Assim como no caso do comprimento, podemos calcular a área de superfície a partir de qualquer parametrização conveniente que atenda aos critérios estabelecidos.

EXEMPLO 3 Aplicando a fórmula da área de superfície

A parametrização-padrão do círculo de raio 1 centrado no ponto (0, 1) no plano xy é

$$x = \cos t, \qquad y = 1 + \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Use essa parametrização para determinar a área da superfície gerada pela rotação do círculo em torno do eixo x (Figura 6.50).

SOLUÇÃO Calculamos a fórmula

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Equação (5) para revolução em torno do eixo x, $y = 1 + \operatorname{sen} t > 0$

$$= \int_0^{2\pi} 2\pi(1 + \operatorname{sen} t)\sqrt{\underbrace{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2}_{1}}\, dt$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 + \operatorname{sen} t)\, dt$$

$$= 2\pi\Big[t - \cos t\Big]_0^{2\pi} = 4\pi^2$$

A forma diferencial

As equações

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \text{e} \qquad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

são muitas vezes escritas em termos da diferencial do comprimento do arco $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ como

$$S = \int_a^b 2\pi y\, ds \qquad \text{e} \qquad S = \int_c^d 2\pi x\, ds$$

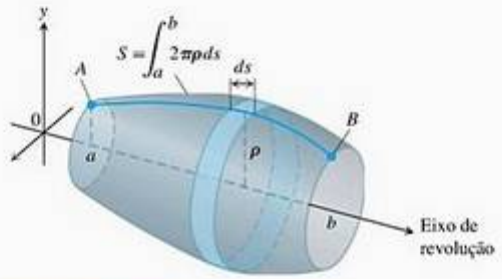


FIGURA 6.51 A área da superfície gerada pela rotação do arco AB em torno do eixo mostrado aqui é $\int_a^b 2\pi\rho\, ds$. A expressão exata depende das fórmulas para ρ e ds.

Na primeira dessas equações, y é a distância do eixo x até um elemento de comprimento do arco ds. Na segunda, x é a distância do eixo y até um elemento de comprimento do arco ds. Ambas as integrais têm a forma

$$S = \int 2\pi(\text{raio})(\text{largura da faixa}) = \int 2\pi\rho\, ds \qquad (7)$$

onde ρ é o raio que vai do eixo de revolução até o elemento de comprimento de arco ds (Figura 6.51).

Em qualquer problema particular, você expressaria, então, a função raio ρ e a diferencial do comprimento de arco ds em função de uma variável comum e forneceria limites de integração para essa variável.

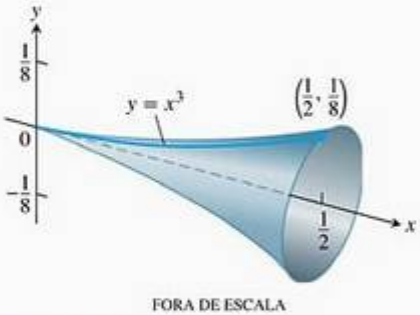


FIGURA 6.52 A superfície gerada pela rotação da curva $y = x^3$, $0 \le x \le 1/2$, em torno do eixo x poderia ser o modelo para uma taça de champanhe (Exemplo 4).

EXEMPLO 4 Usando a forma diferencial para áreas de superfície

Determine a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = x^3$, $0 \le x \le 1/2$, em torno do eixo x (Figura 6.52).

SOLUÇÃO Começamos com a forma diferencial curta:

$$S = \int 2\pi\rho\, ds$$

$$= \int 2\pi y\, ds \qquad \text{No caso de revolução em torno do eixo } x\text{, a função raio é } \rho = y > 0 \text{ em } 0 \le x \le 1/2.$$

$$= \int 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2} \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Temos de escolher, então, se vamos expressar dy em função de dx, ou dx em função de dy. A forma original da equação, $y = x^3$, torna mais fácil expressar dy em função de dx, portanto continuamos o cálculo com

$$y = x^3, \qquad dy = 3x^2\, dx \qquad \text{e} \qquad \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (3x^2\, dx)^2} = \sqrt{1 + 9x^4}\, dx$$

Com essas substituições, x torna-se a variável de integração e

$$S = \int_{x=0}^{x=1/2} 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \int_0^{1/2} 2\pi x^3\sqrt{1 + 9x^4}\, dx$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{36}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(1 + 9x^4)^{3/2}\Big]_0^{1/2} \qquad \text{Substitua } u = 1 + 9x^4,\ du/36 = x^3\, dx\text{; integre e substitua de volta.}$$

$$= \frac{\pi}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{16}\right)^{3/2} - 1\right]$$

$$= \frac{\pi}{27}\left[\left(\frac{25}{16}\right)^{3/2} - 1\right] = \frac{\pi}{27}\left(\frac{125}{64} - 1\right)$$

$$= \frac{61\pi}{1.728}$$

Faixas cônicas contra faixas cilíndricas

Por que não usar faixas cilíndricas em vez de faixas cônicas para aproximar a área de superfície, como sugerido na Figura 6.53? As somas de Riemann que obtemos desse modo convergem tão bem quanto aquelas baseadas em faixas cônicas, e a integral resultante é mais simples. Nesse caso, para revolução em torno do eixo x, o raio da Equação (7) será $\rho = y$ e a largura da faixa será $ds = dx$. Isso levará à fórmula integral

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\, dx \tag{8}$$

e não à Equação (3) da definição. O problema com essa nova fórmula é que seus resultados não são coerentes com as fórmulas para a área de superfície oriundas da geometria clássica; lembre que tal coerência foi um dos objetivos

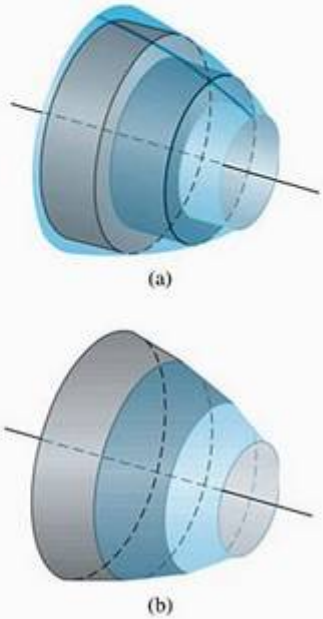


FIGURA 6.53 Por que não usar (a) faixas cilíndricas em vez de (b) faixas cônicas para aproximar a área de superfície?

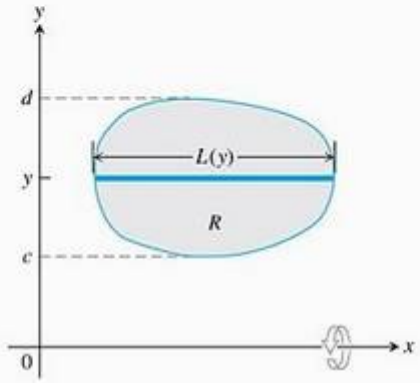


FIGURA 6.54 Gira-se a região R (uma única vez) em torno do eixo x e obtém-se um sólido. Um teorema de 1.700 anos atrás diz que o volume do sólido pode ser calculado multiplicando-se a área da região pela distância percorrida por seu centróide durante a revolução.

que estabelecemos a princípio. Só porque deparamos com uma simpática integral decorrente de uma derivação de soma de Riemann, isso não significa que ela calculará o que queremos. (Veja o Exercício 42.)

ATENÇÃO Não use a Equação (8) para calcular área de superfície. Ela *não* dá o resultado correto.

Os teoremas de Pappus

No século III, um grego chamado Pappus descobriu duas fórmulas que relacionam centróides a superfícies e sólidos de revolução. Essas fórmulas fornecem atalhos para uma série de cálculos que, sem elas, seriam bastante longos.

Teorema 1 **Teorema de Pappus para volumes**
Se uma região plana é girada uma vez em torno de uma reta no plano que não atravessa o interior da região, então o volume do sólido gerado é igual à área da região vezes a distância percorrida pelo centróide da região durante a revolução. Se ρ é a distância entre o eixo de revolução e o centróide, então

$$V = 2\pi\rho A \tag{9}$$

PROVA Desenhamos o eixo de revolução como o eixo x, com a região R no primeiro quadrante (Figura 6.54). Deixemos que a função $L(y)$ denote o comprimento da seção transversal de R perpendicular ao eixo y em y. Suponhamos que $L(y)$ seja contínua.

Pelo método das cascas cilíndricas, o volume do sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo x é

$$V = \int_c^d 2\pi(\text{raio da casca})(\text{altura da casca})\,dy = 2\pi\int_c^d yL(y)\,dy \tag{10}$$

A ordenada do centróide de R é

$$\bar{y} = \frac{\int_c^d \tilde{y}\,dA}{A} = \frac{\int_c^d y\,L(y)\,dy}{A} \qquad \tilde{y} = y,\ dA = L(y)dy$$

de modo que

$$\int_c^d y\,L(y)\,dy = A\bar{y}$$

Substituindo a última integral da Equação (10) por $A\bar{y}$, temos $V = 2\pi\bar{y}A$. Com ρ igual a $\bar{y}$, temos $V = 2\pi\rho A$.

EXEMPLO 5 Volume de um toro

O volume do toro (rosquinha) gerado pela rotação de um disco circular de raio a em torno de um eixo em seu plano, a uma distância $b \geq a$ de seu centro (Figura 6.55), é

$$V = 2\pi(b)(\pi a^2) = 2\pi^2 ba^2$$

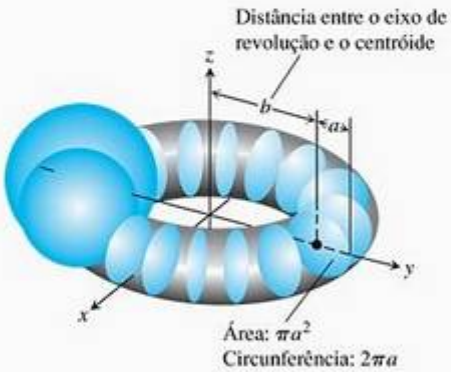


FIGURA 6.55 Com o primeiro teorema de Pappus, podemos determinar o volume de um toro sem necessidade de integração (Exemplo 5).

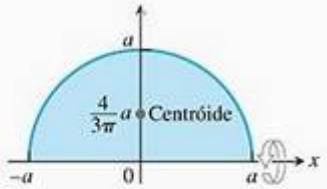


FIGURA 6.56 Com o primeiro teorema de Pappus, podemos localizar o centróide de uma região semicircular sem necessidade de integração (Exemplo 6).

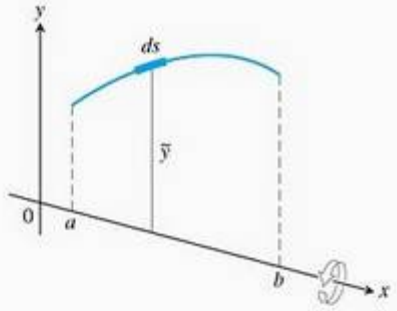


FIGURA 6.57 Figura usada para provar o teorema de Pappus para área.

EXEMPLO 6 Localize o centróide de uma região semicircular

SOLUÇÃO Modelamos a região como a região entre o semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (Figura 6.56) e o eixo x e imaginamos a rotação dessa região em torno do eixo x, gerando uma esfera sólida. Por simetria, a abscissa do centróide é $\bar{x} = 0$. Com $\bar{y} = \rho$ na Equação (9), temos

$$\bar{y} = \frac{V}{2\pi A} = \frac{(4/3)\pi a^3}{2\pi(1/2)\pi a^2} = \frac{4}{3\pi}a$$

Teorema 2 **Teorema de Pappus para áreas de superfície**
Se um arco de uma curva plana lisa é girado uma vez em torno de uma reta no plano que não atravessa o interior do arco, então a área de superfície gerada pelo arco é igual ao comprimento do arco vezes a distância percorrida pelo centróide do arco durante a revolução. Se ρ é a distância entre o eixo de revolução e o centróide, então

$$S = 2\pi\rho L \tag{11}$$

A prova que damos pressupõe que podemos modelar o eixo de revolução como o eixo x e o arco como o gráfico de uma função continuamente derivável de x.

PROVA Desenhamos o eixo de revolução como o eixo x, com o arco estendendo-se de $x = a$ até $x = b$ no primeiro quadrante (Figura 6.57). A área da superfície gerada pelo arco é

$$S = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y\, ds = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y\, ds \tag{12}$$

A ordenada do centróide do arco é

$$\bar{y} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} \tilde{y}\, ds}{\int_{x=a}^{x=b} ds} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} y\, ds}{L}$$

$L = \int ds$ é o comprimento do arco, e $\tilde{y} = y$

Portanto

$$\int_{x=a}^{x=b} y\, ds = \bar{y}L$$

Substituindo a última integral da Equação (12) por $\bar{y}L$, temos $S = 2\pi\bar{y}L$. Sendo ρ igual a $\bar{y}$, temos $S = 2\pi\rho L$.

EXEMPLO 7 Área de superfície de um toro

A área de superfície do toro do Exemplo 5 é

$$S = 2\pi(b)(2\pi a) = 4\pi^2 ba$$

Exercícios 6.5

Determinando integrais para área de superfície

Nos exercícios 1–8:

(a) Estabeleça uma integral para a área da superfície gerada pela rotação da curva dada em torno do eixo indicado.

(b) Trace o gráfico da curva para ver sua aparência. Se conseguir, represente graficamente a superfície também.

(c) Use a ferramenta de cálculo de integrais do seu computador ou da sua calculadora para determinar a área de superfície numericamente.

1. $y = \operatorname{tg} x, \quad 0 \le x \le \pi/4;$ eixo x
2. $y = x^2, \quad 0 \le x \le 2;$ eixo x
3. $xy = 1, \quad 1 \le y \le 2;$ eixo y
4. $x = \operatorname{sen} y, \quad 0 \le y \le \pi;$ eixo y
5. $x^{1/2} + y^{1/2} = 3$ de $(4, 1)$ para $(1, 4)$; eixo x
6. $y + 2\sqrt{y} = x, \quad 1 \le y \le 2;$ eixo y
7. $x = \int_0^y \operatorname{tg} t\, dt, \quad 0 \le y \le \pi/3;$ eixo y
8. $y = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\, dt, \quad 1 \le x \le \sqrt{5};$ eixo x

Determinando áreas de superfície

9. Determine a área de superfície lateral (o lado) do cone gerado pela rotação, em torno do eixo x, do segmento de reta $y = x/2$, $0 \le x \le 4$. Verifique sua resposta com a fórmula geométrica

$$\text{Área de superfície lateral} = \frac{1}{2} \times \text{Circunferência da base} \times \text{Altura inclinada}$$

10. Determine a área de superfície lateral do cone gerado pela rotação, em torno do eixo y, do segmento de reta $y = x/2$, $0 \le x \le 4$. Verifique sua resposta com a fórmula geométrica

$$\text{Área de superfície lateral} = \frac{1}{2} \times \text{Circunferência da base} \times \text{Altura inclinada}$$

11. Determine a área de superfície do tronco de cone gerado pela rotação, em torno do eixo x, do segmento de reta $y = (x/2) + (1/2)$, $1 \le x \le 3$. Verifique sua resposta com a fórmula geométrica

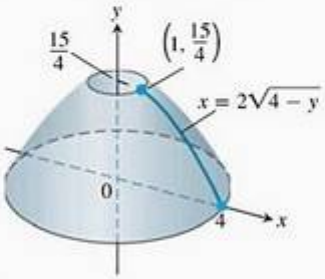
$$\text{Área de superfície do tronco} = \pi(r_1 + r_2) \times \text{Altura inclinada}$$

12. Determine a área de superfície do tronco de cone gerado pela rotação, em torno do eixo y, do segmento de reta $y = (x/2) + (1/2)$, $1 \le x \le 3$. Verifique sua resposta com a fórmula geométrica

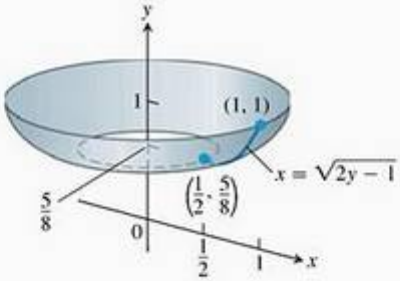
$$\text{Área de superfície do tronco} = \pi(r_1 + r_2) \times \text{altura inclinada}$$

Nos exercícios 13–23, determine as áreas das superfícies geradas pela rotação das curvas em torno dos eixos indicados. Se tiver uma ferramenta gráfica, sugerimos que trace o gráfico dessas curvas para observar sua aparência.

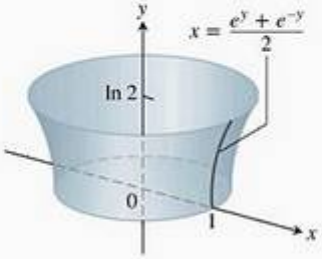
13. $y = x^3/9, \quad 0 \le x \le 2;$ eixo x
14. $y = \sqrt{x}, \quad 3/4 \le x \le 15/4;$ eixo x
15. $y = \sqrt{2x - x^2}, \quad 0{,}5 \le x \le 1{,}5;$ eixo x
16. $y = \sqrt{x + 1}, \quad 1 \le x \le 5;$ eixo x
17. $x = y^3/3, \quad 0 \le y \le 1;$ eixo y
18. $x = (1/3)y^{3/2} - y^{1/2}, \quad 1 \le y \le 3;$ eixo y
19. $x = 2\sqrt{4 - y}, \quad 0 \le y \le 15/4;$ eixo y



20. $x = \sqrt{2y - 1}, \quad 5/8 \le y \le 1;$ eixo y



21. $x = (e^y + e^{-y})/2, \; 0 \le y \le \ln 2;$ eixo y



22. $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$, $0 \le x \le \sqrt{2}$; eixo y (*Dica*: Expresse $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ em função de dx e, em seguida, calcule a integral $S = \int 2\pi y\, ds$ com os limites adequados.)

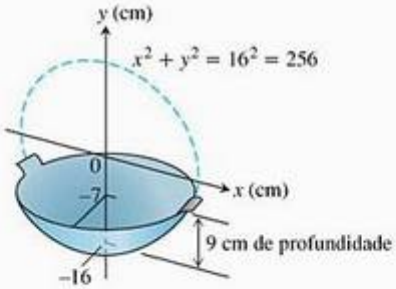
23. $x = (y^4/4) + 1/(8y^2)$, $1 \le y \le 2$; eixo x (*Dica*: Expresse $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ em função de dy e, em seguida, calcule a integral $S = \int 2\pi y\, ds$ com os limites adequados.)

24. Escreva uma integral para a área da superfície gerada pela rotação em torno do eixo x da curva $y = \cos x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$. Na Seção 8.5, veremos como calcular esse tipo de integral.

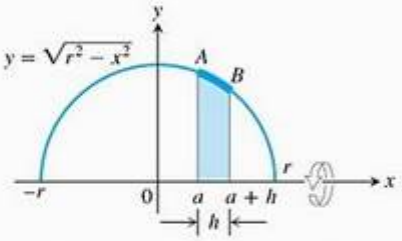
25. **Testando a nova definição** Demonstre que a área de superfície de uma esfera de raio a é $4\pi a^2$ usando a Equação (3) para determinar a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, da curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \le x \le a$.

26. **Testando a nova definição** A área de superfície lateral (o lado) de um cone de altura h e raio da base r é $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$, o semiperímetro da base vezes a altura da inclinação. Demonstre que isso continua sendo verdade quando se determina a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do segmento de reta $y = (r/h)x$, $0 \le x \le h$.

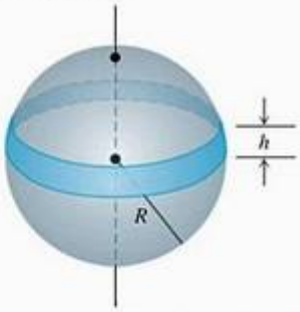
27. **Frigideira esmaltada** A empresa em que você trabalha decidiu lançar uma versão de luxo da frigideira que você projetou no Exercício 61 da Seção 6.1. A idéia é esmaltá-la de branco por dentro e de azul por fora. A camada de esmalte terá 0,5 mm de espessura antes de ir para o forno. (Veja o diagrama a seguir.) O departamento de produção quer saber a quantidade de esmalte de que precisará dispor para fabricar 5.000 frigideiras. O que você lhes diz? (Ignore o desperdício e a matéria-prima não utilizada; dê sua resposta em litros. Lembre-se de que 1 cm^3 = 1 ml, logo 1 l = 1.000 cm^3.)



28. **Fatiando pão** Você sabia que, se cortar um filão esférico de pão em fatias de igual largura, cada fatia terá a mesma quantidade de casca? Para descobrir por que, suponha que o semicírculo $y = \sqrt{r^2 + x^2}$ mostrado aqui seja girado em torno do eixo x, gerando assim uma esfera. Seja AB um arco desse semicírculo situado acima de um intervalo de comprimento h no eixo x. Demonstre que a área gerada por AB não depende da localização do intervalo. (Depende, isso sim, do comprimento do intervalo.)



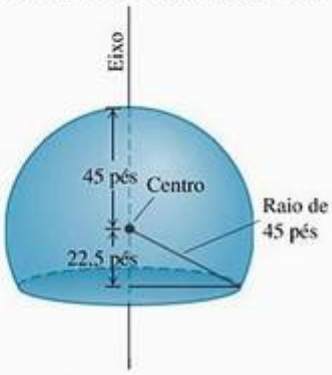
29. A faixa sombreada da figura a seguir foi cortada de uma esfera de raio R por dois planos paralelos, separados por uma distância de h unidades. Demonstre que a área de superfície da faixa é $2\pi Rh$.



30. Eis um desenho esquemático da redoma de 90 pés usada pelo Serviço Meteorológico Nacional dos Estados Unidos para abrigar um radar em Bozeman, Montana.

(a) Se a redoma fosse pintada, qual a área da superfície que receberia tinta (sem contar a base)?

(b) Arredonde sua resposta para o $pé^2$ mais próximo.



31. **Superfícies geradas por curvas que cruzam o eixo de revolução**

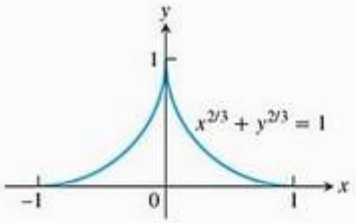
(a) A fórmula da área de superfície da Equação (3) foi desenvolvida sob o pressuposto de que a função f, cujo gráfico gerou a superfície, era não negativa no intervalo $[a, b]$. Para curvas que cruzam o eixo de revolução, substituímos a Equação (3) pela fórmula de valor absoluto

$$S = \int 2\pi\rho\, ds = \int 2\pi |f(x)|\, ds \qquad (13)$$

Use a Equação (13) para determinar a área de superfície do cone duplo gerado pela rotação, em torno do eixo x, do segmento de reta $y = x$, $-1 \le x \le 2$.

(b) Determine a área de superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, da curva $y = x^3/9$, $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$. O que você acha que acontecerá se tirar as barras de valor absoluto da Equação (13) e tentar determinar a área de superfície com a fórmula $S = \int 2\pi f(x)\, ds$? Experimente fazê-lo.

32. A superfície de um astróide Determine a área de superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do pedaço de astróide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ mostrado a seguir. (*Dica*: Gire o pedaço do primeiro quadrante $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $0 \le x \le 1$, em torno do eixo x e dobre o resultado.)



Parametrizações

Nos exercícios 33–38, determine as áreas de superfície geradas pela rotação das curvas em torno dos eixos indicados.

33. $x = \cos t$, $y = 2 + \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$; eixo x

34. $x = (2/3)t^{3/2}$, $y = 2\sqrt{t}$, $0 \le t \le \sqrt{3}$; eixo y

35. $x = t + \sqrt{2}$, $y = (t^2/2) + \sqrt{2}t$, $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$; eixo y

36. $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$; eixo x

37. $x = e^t - t$, $y = 4e^{t/2}$, $0 \le t \le 1$; eixo x

38. $x = \ln(\sec t + \operatorname{tg} t) - \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $0 \le t \le \pi/3$; eixo x

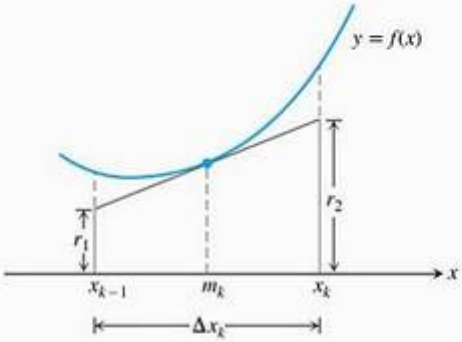
39. Um tronco de cone O segmento de reta que une os pontos (0, 1) e (2, 2) é girado em torno do eixo x, gerando um tronco de cone. Determine a área de superfície do tronco usando a parametrização $x = 2t$, $y = t + 1$, $0 \le t \le 1$. Verifique seu resultado com esta fórmula geométrica: Área = $\pi(r_1 + r_2)$ (altura inclinada).

40. Um cone O segmento de reta que une a origem ao ponto (h, r), é girado em torno de um eixo x para gerar um cone de altura h e base de raio r. Determine a área da superfície com as equações paramétricas $x = ht$, $y = rt$, $0 \le t \le 1$. Verifique o resultado com esta fórmula geométrica: Área = πr (altura inclinada)

41. Um caminho alternativo para a fórmula da área de superfície Suponha que f seja lisa em $[a, b]$ e divida $[a, b]$ da maneira usual. No k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, trace a reta tangente à curva no ponto médio $m_k = (x_{k-1} + x_k)/2$, como na figura a seguir.

(a) Demonstre que $r_1 = f(m_k) - f'(m_k)\dfrac{\Delta x_k}{2}$ e $r_2 = f(m_k) + f'(m_k)\dfrac{\Delta x_k}{2}$

(b) Demonstre que o comprimento L_k do segmento de reta tangente no k-ésimo subintervalo é $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k)\,\Delta xk)^2}$

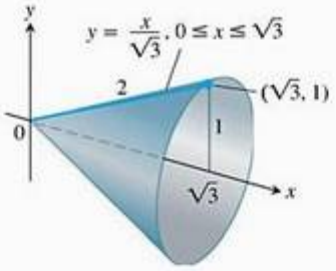


(c) Demonstre que a área de superfície lateral do tronco do cone gerado pela rotação do segmento de reta tangente em torno do eixo x é $2\pi f(m_k)\sqrt{1 + (f'(m_k))^2}\,\Delta x_k$.

(d) Demonstre que a área da superfície gerada pela rotação de $y = f(x)$ em torno do eixo x ao longo do intervalo $[a, b]$ é

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}\text{área de superfície lateral}\\ \text{do } k\text{-ésimo tronco}\end{pmatrix} = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x))^2}\,dx$$

42. Modelando a área de superfície A área da superfície lateral do cone gerado pela rotação do segmento de reta $y = x/\sqrt{3}$, $0 \le x \le \sqrt{3}$, em torno do eixo x, deveria ser (1/2)(circunferência da base)(altura inclinada) = $(1/2)(2\pi)(2) = 2\pi$. A que resultado você chega usando a Equação (8) com $f(x) = x/\sqrt{3}$?



Os teoremas de Pappus

43. A região quadrada com vértices (0, 2), (2, 0), (4, 2) e (2, 4) é girada em torno do eixo x, gerando um sólido. Determine o volume e a área de superfície do sólido.

44. Use um dos teoremas de Pappus para determinar o volume gerado pela rotação, em torno da reta $x = 5$, da região triangular delimitada pelos eixos de coordenadas e pela reta $2x + y = 6$. (Como você viu no Exercício 33 da Seção 6.4, o centróide de um triângulo fica na interseção das medianas, a um terço da distância entre o ponto médio de cada lado e o vértice oposto.)

45. Determine o volume do toro gerado pela rotação do círculo $(x-2)^2 + y^2 = 1$ em torno do eixo y.

46. Use os teoremas de Pappus para determinar a área de superfície lateral e o volume de um cone circular reto.

47. Use o Segundo Teorema de Pappus — e o fato de que a área de superfície de uma esfera de raio a é $4\pi a^2$ — para encontrar o centróide do semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

48. Conforme visto no Exercício 47, o centróide do semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ fica no ponto $(0, 2a/\pi)$. Determine a área de superfície gerada pela rotação do semicírculo em torno da reta $y = a$.

49. A área da região R delimitada pela semi-elipse

$$y = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$$

e pelo eixo x é $(1/2)\ \pi ab$ e o volume do elipsóide gerado pela rotação de R em torno do eixo x é $(4/3)\pi ab^2$. Encontre o centróide de R. Observe que essa localização independe de a.

50. Conforme visto no Exemplo 6, o centróide da região delimitada pelo eixo x e pelo semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ fica no ponto $(0, 4a/3\pi)$. Determine o volume do sólido gerado pela rotação dessa região em torno da reta $y = -a$.

51. A região do Exercício 50 é girada em torno da reta $y = x - a$, gerando um sólido. Determine o volume desse sólido.

52. Conforme visto no Exercício 47, o centróide do semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ fica no ponto $(0, 2a/\pi)$. Determine a área de superfície gerada pela rotação do semicírculo em torno da reta $y = x - a$.

53. Determine o momento em torno do eixo x da região semicircular do Exemplo 6. Se usar os resultados já conhecidos, você não vai precisar integrar.

6.6 Trabalho

Joules

O joule (cuja abreviatura é J) recebeu esse nome em homenagem ao físico inglês James Prescott Joule (1818-1889). A equação que o define é

1 joule = (1 newton)(1 metro)

Em símbolos, 1 J = 1 N · m

Na vida diária, *trabalho* é uma atividade que exige esforço muscular ou mental. Na ciência, o termo se refere especificamente a uma força atuando sobre um corpo e ao subseqüente deslocamento desse corpo. Esta seção mostra como calcular o trabalho. As aplicações práticas vão desde comprimir molas de vagões de trem e esvaziar tanques subterrâneos até aproximar elétrons e colocar satélites em órbita.

Trabalho realizado por uma força constante

Quando um corpo percorre uma distância d ao longo de uma reta, como resultado da aplicação de uma força constante F no sentido do movimento, calculamos o **trabalho** W realizado pela força sobre o corpo com a fórmula

$$W = Fd \quad \text{(Fórmula da força constante para o trabalho.)} \qquad (1)$$

Observando a Equação (1), vemos que em qualquer sistema a unidade de trabalho é igual à unidade de força multiplicada pela unidade de distância. No SI (Sistema Internacional), a unidade de força é o newton, a unidade de distância é o metro e a unidade de trabalho é o newton-metro (N · m). Essa combinação é tão freqüente que tem um nome especial, o **joule**. No sistema britânico, a unidade de trabalho é o *pé-libra*, unidade freqüentemente usada por engenheiros.

EXEMPLO 1 Elevando um carro com macaco

Se você elevar a lateral de um carro de 2.000 lb a 1,25 pé acima do solo para trocar um pneu (você precisa aplicar uma força vertical constante de aproximadamente 1.000 lb), você realizará 1.000 × 1,25 = 1.250 pés-libras de trabalho sobre o carro. No SI, isso corresponde a uma força de 4.448 N aplicada ao longo de uma distância de 0,381 m, realizando 4.448 × 0,381 ≈ 1.695 J de trabalho.

Trabalho realizado por uma força variável ao longo de uma reta

Se a força que você aplica varia ao longo do trajeto (como se você levantasse um balde com seu conteúdo vazando ou se comprimisse uma mola), a fórmula $W = Fd$ deve ser substituída por uma fórmula integral que leve em consideração a variação de F.

Suponha que a força que está realizando o trabalho esteja agindo ao longo de uma reta (que podemos pensar como o eixo x) e também que sua magnitude F seja uma função contínua da posição. Queremos determinar o trabalho realizado ao longo do intervalo de $x = a$ a $x = b$. Dividimos $[a, b]$ na forma usual e escolhemos um ponto arbitrário c_k em cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Se o subintervalo for suficientemente pequeno, F, sendo contínua, não variará muito de x_{k-1} a x_k. A quantidade de trabalho realizado ao longo do intervalo será aproximadamente $F(c_k)$ vezes a distância Δx_k, a mesma que seria usada se F fosse constante e pudéssemos aplicar a Equação (1). Portanto, pode-se fazer uma aproximação para o trabalho total realizado de a a b usando a soma de Riemann

$$\text{Trabalho} \approx \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\,\Delta x_k$$

Esperamos que a aproximação melhore quando a norma da partição tender a zero, portanto definimos o trabalho realizado pela força, de a a b, como a integral de F de a a b:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\,\Delta x_k = \int_a^b F(x)\,dx$$

Definição **Trabalho**

O **trabalho** realizado por uma força variável $F(x)$ na direção do eixo x, de $x = a$ a $x = b$, é

$$W = \int_a^b F(x)\,dx \tag{2}$$

A unidade da integral será joule, se F estiver em newtons e x em metros, ou pés-libras, se F estiver em libras e x em pés. Assim, o trabalho realizado por uma força de $F(x) = 1/x^2$ newtons ao longo do eixo x, de $x = 1$ m até $x = 10$ m será

$$W = \int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0.9 \text{ J}.$$

Lei de Hooke para molas: $F = kx$

A **Lei de Hooke** diz que a força necessária para esticar ou comprimir uma mola com x unidades de comprimento, partindo de sua posição original (não forçada), é proporcional a x. Em símbolos,

$$F = kx \tag{3}$$

A constante k, medida em unidades de força por comprimento unitário, é uma característica da mola, denominada **constante de força** da mola (ou **constante da mola**). A Equação (3), ou lei de Hooke, apresenta bons resultados desde que a força não distorça a estrutura da mola. Consideraremos que as forças nesta seção sejam pequenas demais para fazer isso.

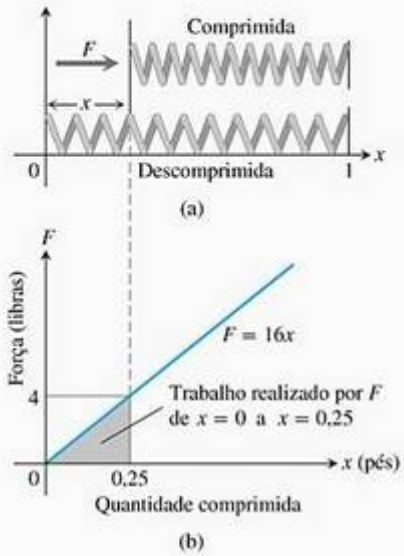


FIGURA 6.58 A força F necessária para manter uma mola sob compressão aumenta linearmente à medida que a mola é comprimida (Exemplo 2).

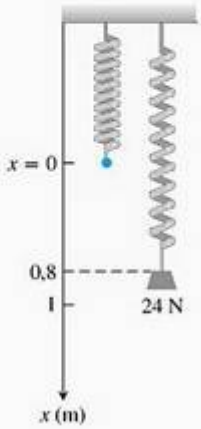


FIGURA 6.59 Um peso de 24 N estica esta mola 0,8 m além de seu comprimento em repouso (Exemplo 3).

EXEMPLO 2 Comprimindo uma mola

Determine o trabalho necessário para comprimir uma mola partindo de seu comprimento inicial de 1 pé até um comprimento de 0,75 pé se a constante de força é k = 16 lb/pé.

SOLUÇÃO Imaginemos a mola não comprimida ao longo do eixo x com sua extremidade móvel na origem e sua extremidade fixa em $x = 1$ pé (Figura 6.58). Isso nos permite descrever a força necessária para comprimir a mola de 0 a x com a fórmula $F = 16x$. Para comprimir a mola de 0 a 0,25 pé, a força deve aumentar de

$$F(0) = 16 \cdot 0 = 0 \text{ lb} \quad \text{para} \quad F(0{,}25) = 16 \cdot 0{,}25 = 4 \text{ lb}$$

O trabalho realizado por F ao longo desse intervalo é

$$W = \int_0^{0{,}25} 16x\,dx = 8x^2\Big]_0^{0{,}25} = 0{,}5 \text{ pé} \cdot \text{lb}$$

Equação (2) com $a = 0$, $b = 0{,}25$, $F(x) = 16x$

EXEMPLO 3 Esticando uma mola

Uma mola tem comprimento original de 1 m. Uma força de 24 N a estica até o comprimento de 1,8 m.

(a) Determine a constante de força k.

(b) Quanto trabalho será necessário para esticar a mola 2 m além de seu comprimento original?

(c) Até onde uma força de 45 N esticará a mola?

SOLUÇÃO

(a) *A constante de força.* Determinamos a constante de força a partir da Equação (3). Uma força de 24 N estica a mola até 0,8 m, portanto

$$24 = k(0{,}8) \quad \text{Equação (3) com } F = 24,\ x = 0{,}8$$

$$k = 24/0{,}8 = 30 \text{ N/m}$$

(b) *O trabalho para esticar a mola até 2 m.* Imaginamos a mola em repouso pendurada ao longo do eixo x com sua extremidade livre em $x = 0$ (Figura 6.59). A força necessária para esticar a mola até x m além de seu comprimento original é a força necessária para puxar a extremidade livre da mola até x unidades a partir da origem. A lei de Hooke com $k = 30$ diz que essa força é

$$F(x) = 30x$$

O trabalho realizado por F sobre a mola de $x = 0$ m a $x = 2$ m é

$$W = \int_0^2 30x\,dx = 15x^2\Big]_0^2 = 60 \text{ J}$$

(c) *Até onde uma força de 45 N esticará a mola?* Substituímos $F = 45$ na equação $F = 30x$ para determinar

$$45 = 30x \qquad \text{ou} \qquad x = 1{,}5 \text{ m}$$

Uma força de 45 N esticará a mola até 1,5 m. Não é necessário cálculo para determinar isso.

A integral do trabalho é útil para calcular o trabalho realizado ao levantar objetos cujo peso varia com a elevação.

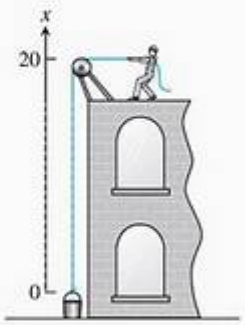


FIGURA 6.60 Içando o balde no Exemplo 4.

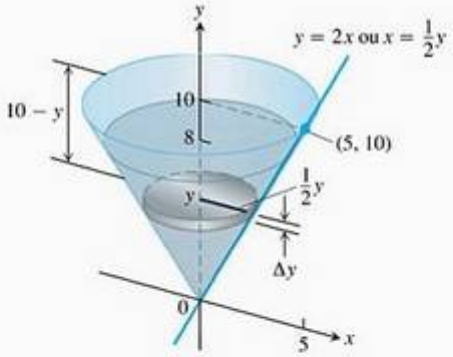


FIGURA 6.61 O azeite de oliva e o tanque do Exemplo 5.

EXEMPLO 4 Içando um balde com corda

Um balde que pesa 5 lb é içado a partir do solo, puxando-se com velocidade constante uma corda com 20 pés de comprimento (Figura 6.60). A corda pesa 0,08 lb/pé. Quanto trabalho foi realizado para elevar o balde e a corda?

SOLUÇÃO O balde tem peso constante, portanto o trabalho realizado ao elevar-se apenas ele é peso × distância = 5 · 20 = 100 pés · lb.

O peso da corda varia conforme a elevação do balde, pois uma parte cada vez menor dela fica pendendo. Quando o balde está a x pés do solo, o pedaço remanescente da corda ainda pendente pesa $(0{,}08) \cdot (20 - x)$ libras. Conseqüentemente, o trabalho para erguer a corda é

$$\text{Trabalho na corda} = \int_0^{20} (0{,}08)(20 - x)\,dx = \int_0^{20} (1{,}6 - 0{,}08x)\,dx$$

$$= \left[1{,}6x - 0{,}04x^2\right]_0^{20} = 32 - 16 = 16 \text{ pés} \cdot \text{lb}$$

O trabalho total para o balde e a corda juntos é

$$100 + 16 = 116 \text{ pés} \cdot \text{lb}$$

Bombeando líquidos para fora de recipientes

Quanto trabalho é realizado para bombear todo ou parte do líquido de um recipiente? Para descobrir, imaginamos levantar uma "fatia" horizontal fina do líquido de cada vez, aplicando a equação $W = Fd$ a cada fatia. Depois calculamos a integral resultante, quando as fatias se tornam mais finas e mais numerosas. A integral obtida a cada vez depende do peso do líquido e das dimensões do recipiente, mas o modo para determinar a integral é sempre o mesmo. Os próximos exemplos mostram o que fazer.

EXEMPLO 5 Bombeando óleo para fora de um tanque cônico

O tanque cônico da Figura 6.61 está cheio até 2 pés do topo com azeite de oliva cuja densidade é 57 lb/pé^3. Quanto trabalho será necessário para bombear o óleo até a borda do tanque?

SOLUÇÃO Imaginamos o azeite dividido em fatias finas por planos perpendiculares ao eixo y nos pontos de partição do intervalo [0, 8].

A fatia típica entre os planos em y e $y + \Delta y$ tem um volume de aproximadamente

$$\Delta V = \pi(\text{raio})^2(\text{espessura}) = \pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 \Delta y = \frac{\pi}{4}y^2\,\Delta y \text{ pés}^3$$

A força $F(y)$ necessária para elevar essa fatia é igual ao seu peso,

$$F(y) = 57\,\Delta V = \frac{57\pi}{4}y^2\,\Delta y \text{ lb}$$

Peso = peso por unidade de volume × volume

A distância ao longo da qual $F(y)$ deve agir para elevar essa fatia para o nível da borda do cone é aproximadamente $(10 - y)$ pés, portanto o trabalho realizado para elevar a fatia é de aproximadamente

$$\Delta W = \frac{57\pi}{4}(10 - y)y^2\,\Delta y \text{ pés} \cdot \text{lb}$$

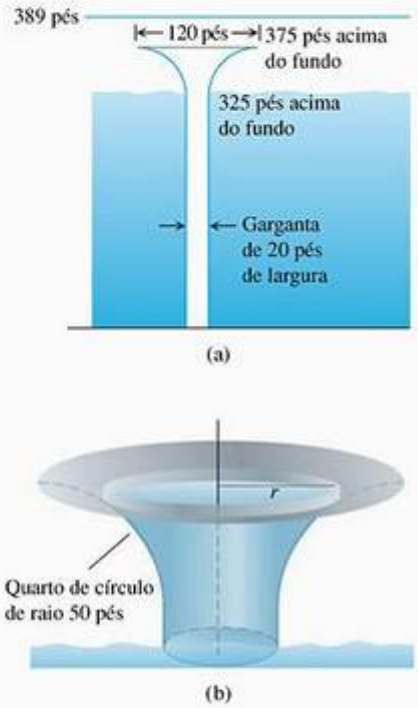


FIGURA 6.62 (a) Seção transversal do ladrão para uma barragem e (b) o topo do ladrão (Exemplo 6).

Supondo que existam n fatias associadas à partição de $[0, 8]$ e que $y = y_k$ denote o plano associado à k-ésima fatia de densidade Δy_k, podemos aproximar o trabalho realizado ao se elevar todas as fatias com a soma de Riemann

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{57\pi}{4}(10 - y_k)y_k^2\,\Delta y_k \text{ pés} \cdot \text{lb}$$

O trabalho de bombear o azeite para a borda é o limite dessas somas quando a norma da partição tende a zero

$$\begin{aligned} W = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{57\pi}{4}(10 - y_k)y_k^2\,\Delta y_k &= \int_0^8 \frac{57\pi}{4}(10 - y)y^2\,dy \\ &= \frac{57\pi}{4}\int_0^8 (10y^2 - y^3)\,dy \\ &= \frac{57\pi}{4}\left[\frac{10y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^8 \approx 30{,}561 \text{ pés} \cdot \text{lb} \end{aligned}$$

EXEMPLO 6 Bombeando água do interior de um "ladrão"

Um ladrão é um tubo vertical que impede que a água, atrás de uma barragem, suba demais. O topo do ladrão para uma barragem fica 14 pés abaixo do topo da barragem e 375 pés acima do fundo (Figura 6.62). O orifício precisa ser bombeado de tempos em tempos para permitir a remoção de entulho sazonal.

Pela seção transversal da Figura 6.62a, vemos que o ladrão é um tubo em forma de funil. A garganta do funil tem 20 pés de largura e a boca, 120 pés. Os limites externos da seção transversal da boca são quartos de círculos formados com 50 pés de raio, apresentados na Figura 6.62b. O ladrão é formado pela rotação de uma seção transversal ao redor de seu eixo. Conseqüentemente, todas as seções transversais horizontais são discos circulares ao longo do ladrão inteiro. Calcularemos o trabalho necessário para bombear a água

(a) da garganta do orifício.
(b) da parte afunilada.

SOLUÇÃO

(a) *Bombeando água da garganta.* Uma fatia típica na garganta entre os planos em y e $y + \Delta y$ tem um volume de aproximadamente

$$\Delta V = \pi(\text{raio})^2(\text{espessura}) = \pi(10)^2\,\Delta y \text{ pés}^3$$

A força $F(y)$ necessária para elevar essa fatia é igual à sua densidade (aproximadamente 62,4 libras/pé^3 para água),

$$F(y) = 62{,}4\,\Delta V = 6.240\pi\,\Delta y \text{ lb}$$

A distância através da qual $F(y)$ deve agir, para elevar essa fatia ao topo do orifício, é $(375 - y)$ pés, portanto o trabalho realizado ao se elevar a fatia é

$$\Delta W = 6.240\pi(375 - y)\,\Delta y \text{ pés} \cdot \text{lb}$$

Podemos aproximar o trabalho realizado ao bombear a água do interior da garganta somando o trabalho realizado, elevando todas as fatias individualmente e, depois, encontrando o limite dessa soma de Riemann quando a norma da partição tende a zero. Isso vai nos levar à integral

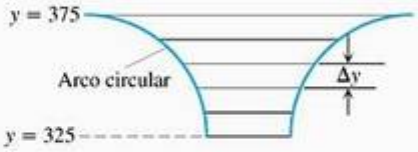


FIGURA 6.63 Parte afunilada do ladrão.

$$W = \int_0^{325} 6.240\pi(375 - y)\,dy$$

$$= 6.240\,\pi\left[375y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{325}$$

$$\approx 1.353.869.354 \text{ pés} \cdot \text{lb}$$

(b) *Bombeando água do funil.* Para calcular o trabalho necessário para bombear água da parte afunilada do ladrão, de $y = 325$ a $y = 375$, precisamos calcular ΔV para fazer uma aproximação dos elementos do funil, como se vê na Figura 6.63. O raio das fatias varia com a altura y.

Nos exercícios 33 e 34, pede-se completar a análise, determinando o trabalho total necessário para bombear a água e também a potência das bombas necessárias para bombear o ladrão.

Exercícios 6.6

Molas

1. **Constante da mola** Foram necessários 1.800 J de trabalho para esticar uma mola desde seu comprimento original de 2 m até 5 m. Determine a constante de força da mola.

2. **Esticando uma mola** Uma mola tem um comprimento original de 10 pol. Uma força de 800 lb a estica até 14 pol.
   (a) Determine a constante de força.
   (b) Quanto trabalho será necessário para esticar a mola de 10 a 12 pol?
   (c) Até onde, além de seu comprimento original, uma força de 1.600 lb esticará a mola?

3. **Esticando um elástico** Uma força de 2 N estica um elástico 2 cm (0,02 m) além de seu comprimento original. Considerando que a lei de Hooke se aplica igualmente ao elástico, quanto uma força de 4 N esticará o elástico? Quanto trabalho será necessário para esticar o elástico até esse ponto?

4. **Esticando uma mola** Se uma força de 90 N estica uma mola 1 m além de seu comprimento inicial, quanto trabalho será necessário para esticar a mola 5 m além de seu comprimento original?

5. **Molas dos vagões do metrô** É necessário aplicar uma força de 21.714 lb para comprimir um sistema de mola espiral, para vagões do sistema metroviário da cidade de Nova York, da altura expandida de 8 pol até sua altura totalmente comprimida de 5 pol.
   (a) Qual é a constante de força do sistema?
   (b) Quanto trabalho será necessário para comprimir a primeira meia polegada nesse sistema? E a segunda meia polegada? Aproxime sua resposta para o inteiro mais próximo em pol · lb.

   (Dados fornecidos por cortesia da Bombardier, Inc., Divisão de Transporte Coletivo, sobre o sistema de molas usado nos vagões entregues para a Rede Metroviária da cidade de Nova York de 1985 a 1987.)

6. **Balança para banheiro** Uma balança para banheiro sofre uma compressão de 1/16 pol quando uma pessoa de 150 lb sobe nela. Considerando que a balança se comporta como uma mola que obedece à lei de Hooke, quanto deve pesar alguém que, ao se pesar, comprima a balança em 1/8 pol? Quanto trabalho será realizado nesse caso?

Trabalho realizado por uma força variável

7. **Puxando uma corda** Um alpinista precisa recolher uma corda de 50 m de comprimento. Quanto trabalho será preciso realizar se a corda pesar 0,624 N/m?

8. **Saco de areia furado** Um saco de areia pesando inicialmente 144 lb foi elevado a uma taxa constante. Ao subir, a areia também vazou a uma taxa constante. Metade da areia se foi quando o saco foi elevado 18 pés acima. Quanto trabalho foi realizado ao se elevar a areia até aí? (Despreze o peso do saco e do equipamento de transporte.)

9. **Elevando um cabo para elevador** Um elevador elétrico, com um motor no alto, tem um cabo trançado que pesa

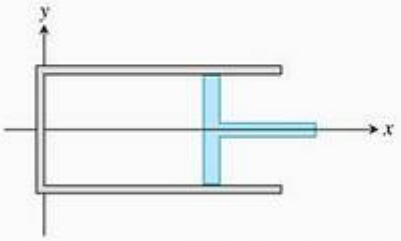
4,5 lb/pé. Quando o elevador está no primeiro andar, 180 pés de cabo estão estendidos e, por outro lado, 0 pé está estendido quando ele está no último andar. Quanto trabalho o motor realiza para elevar só o cabo ao transportar o elevador do primeiro ao último andar?

10. **Força de atração** Quando uma partícula de massa m está em $(x, 0)$, ela é atraída em direção à origem com uma força cuja magnitude é k/x^2. Considerando que a partícula parte do repouso em $x = b$ e não há outras forças agindo, determine o trabalho realizado sobre a partícula até o momento em que ela atinge $x = a$, $0 < a < b$.

11. **Comprimindo um gás** Suponha que o gás contido em um cilindro com área de seção transversal A esteja sendo comprimido por um pistão. Se p for a pressão do gás em libras por pol^2 e V o volume em pol^3, mostre que o trabalho realizado na compressão do gás, do estado (p_1, V_1) até o estado (p_2, V_2), é dado pela equação

$$\text{Trabalho} = \int_{(p_1, V_1)}^{(p_2, V_2)} p\, dV$$

(*Dica*: Nas coordenadas sugeridas pela figura, $dV = A\, dx$. A força contra o pistão é pA.)



12. (*Continuação do Exercício 11*) Use a integral do Exercício 11 para determinar o trabalho realizado ao comprimir o gás de $V_1 = 243$ pol^3 a $V_2 = 32$ pol^3, se $p_1 = 50$ lb/pol^3 e p e V obedecem à lei dos gases $pV^{1,4}$ = constante (para processos adiabáticos).

13. **Balde furado** Suponha que o balde do Exemplo 4 esteja vazando. Ele começa com 2 galões de água (16 lb) e vaza a uma taxa constante. A água termina de sair toda exatamente quando o balde atinge a superfície. Quanto trabalho foi realizado para elevar apenas a água? (*Dica*: Não inclua a corda e o balde; determine a proporção de água que restava quando o balde estava a x pés do chão.)

14. (*Continuação do Exercício 13.*) Os trabalhadores do Exemplo 4 e do Exercício 13 trocaram o balde por outro maior, que comporta 5 galões de água (40 lb), porém seu vazamento é maior, de modo que ele também chega vazio ao topo. Considerando que a água vaza a uma taxa constante, quanto trabalho foi realizado para elevar apenas a água? (Não inclua a corda e o balde.)

Bombeando líquidos para fora de recepientes

O peso específico da água

Devido à rotação da Terra e às variações em seu campo gravitacional, o peso de um pé cúbico de água ao nível do mar pode variar de aproximadamente 62,26 lb no Equador a 62,59 lb perto dos pólos, uma variação de aproximadamente 0,5%. Um pé cúbico, que pesa aproximadamente 62,4 lb em Melbourne ou na cidade de Nova York, pesará 62,5 lb no Alasca ou em Estocolmo. Embora 62,4 seja um valor típico e comum nos textos, há considerável variação.

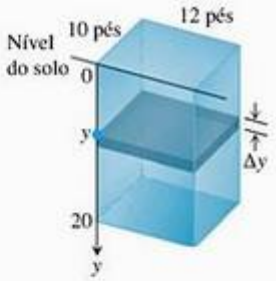
15. **Bombeando água** O tanque retangular mostrado na figura a seguir, com o seu topo no nível do solo, é usado para captar água pluvial. Considere que o peso específico da água seja 62,4 lb/pé^3.

    (a) Quando o tanque estiver cheio, quanto trabalho será necessário para esvaziá-lo bombeando a água de volta para o nível do solo?

    (b) Se a água for bombeada para o nível do solo com um motor de 5/11 HP (potência 250 pés · lb/s), quanto tempo levará para esvaziar o tanque cheio (arredonde para o minuto mais próximo)?

    (c) Mostre que a bomba no item (b) reduzirá o nível da água em 10 pés (pela metade) durante os primeiros 25 minutos de bombeamento.

    (d) **O peso específico da água** Quais são as respostas para os itens (a) e (b) em um local onde o peso específico da água é 62,26 lb/pé^3? E 62,59 lb/pé^3?



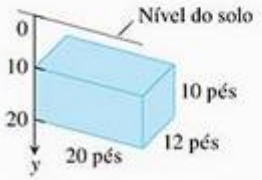
16. **Esvaziando uma cisterna** A cisterna retangular (tanque para armazenagem da água pluvial) apresentada abaixo tem seu topo 10 pés abaixo do nível do solo. Atualmente cheia, deve ser esvaziada para inspeção, bombeando-se o conteúdo até o nível do solo.

    (a) Quanto trabalho será necessário para esvaziar a cisterna?

    (b) Quanto tempo uma bomba com potência de 1/2 HP, a uma taxa de 275 pés · lb/s, demorará para esvaziar o tanque?

(c) Quanto tempo a bomba no item (b) demorará para drenar o tanque até a metade? (Será menos que a metade do tempo necessário para esvaziar o tanque completamente.)

(d) **O peso específico da água** Quais são as respostas para os itens (a) até (c) em um local onde o peso específico da água é 62,26 lb/pé^3? E 62,59 lb/pé^3?

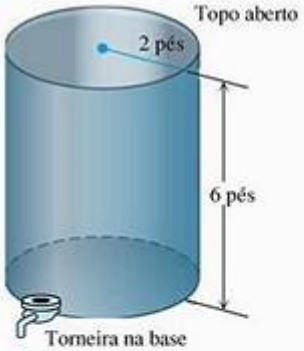


17. **Bombeando óleo** No Exemplo 5, quanto trabalho será preciso realizar para que o óleo do tanque seja bombeado até o topo, se o tanque estiver completamente cheio?

18. **Bombeando óleo de um tanque cheio pela metade** Suponha que no Exemplo 5, em vez de o tanque estar cheio, seu conteúdo esteja só pela metade. Quanto trabalho será necessário para que o óleo restante seja bombeado até 4 m acima do topo?

19. **Esvaziando um tanque** Um tanque cilíndrico reto vertical mede 30 pés de altura e 20 pés de diâmetro. Ele está cheio de querosene cujo peso específico é 51,2 lb/pé^3. Quanto trabalho será necessário para que o querosene seja bombeado até o topo do tanque?

20. O tanque cilíndrico mostrado a seguir pode ser preenchido bombeando-se água de um lago cuja superfície está 15 pés abaixo da parte inferior do tanque. Há duas maneiras de fazer isso. Uma delas é bombear a água por uma mangueira conectada à torneira que está na parte inferior do tanque. A outra é fixar a mangueira na borda do tanque e deixar que a água escoe para dentro. Qual é o modo mais rápido? Justifique sua resposta.

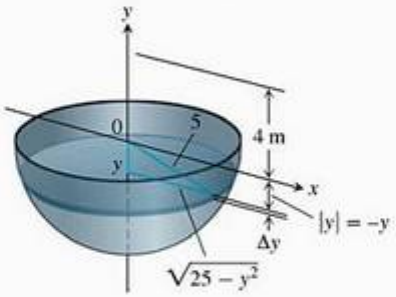


21. (a) **Bombeando leite** Suponha que o contêiner cônico do Exemplo 5, em vez de azeite de oliva, contenha leite (cujo peso específico é 64,5 lb/pé^3). Quanto trabalho será necessário realizar para que o conteúdo seja bombeado até a borda?

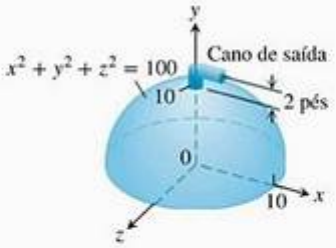
(b) **Bombeando azeite** No Exemplo 5, quanto trabalho será necessário realizar para que o azeite seja bombeado até 3 pés acima da borda do cone?

22. **Bombeando água do mar** Para projetar a superfície interna de um enorme tanque de aço inoxidável, você gira a curva $y = x^2$, $0 \le x \le 4$, em torno do eixo y. O recipiente, com dimensões em metros, será enchido com água do mar cujo peso específico é 10.000 N/m^3. Bombeando a água até o topo do tanque, quanto trabalho será necessário para que o tanque seja esvaziado?

23. **Esvaziando um reservatório de água** Descrevemos o bombeamento do conteúdo de recipientes esféricos da mesma maneira que fazemos com outros reservatórios, com o eixo de integração ao longo do eixo vertical da esfera. Considere a figura a seguir e determine quanto trabalho será necessário para que um reservatório hemisférico, de raio 5 m, cheio de água, seja esvaziado ao se bombear seu conteúdo até uma altura 4 m acima do topo do reservatório. O peso específico da água é 9.800 N/m^3.



24. Você é responsável pela drenagem e reparo do tanque de armazenamento mostrado a seguir. O tanque é um hemisfério com raio de 10 pés, cheio de benzeno cujo peso específico é 56 lb/pé^3. Uma empresa que você contatou garante que pode esvaziar o tanque a um custo de 1/2¢ para cada libra-pé de trabalho. Determine o trabalho necessário para esvaziar o tanque ao se bombear o benzeno até uma saída que está 2 pés acima do tanque. Se você tiver \$ 5.000 para pagar o trabalho, poderá contratar essa empresa?



Trabalho e energia cinética

25. **Energia cinética** Quando uma força de magnitude $F(x)$ desloca um corpo de massa m ao longo do eixo x de x_1 a

x_2, a velocidade v do corpo pode ser escrita como dx/dt (onde t representa o tempo). Use a segunda lei do movimento de Newton $F = m(dv/dt)$ e a regra da cadeia

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

para mostrar que o trabalho resultante realizado pela força ao movimentar o corpo de x_1 a x_2 é:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2}$$

em que v_1 e v_2 são as velocidades dos corpos em x_1 e x_2. Em física, a expressão $(1/2)mv^2$ é chamada de *energia cinética* de um corpo de massa m em movimento com velocidade v. Portanto, *o trabalho realizado por uma força é igual à variação da energia cinética do corpo* e podemos determinar o trabalho calculando essa variação.

Nos exercícios 26–32, use o resultado do Exercício 25.

26. Tênis Uma bola de tênis com massa de 2 onças foi sacada a 160 pés/s (aproximadamente 109 mi/h). Qual o trabalho realizado sobre a bola para que atingisse essa velocidade? (Para calcular a massa da bola a partir de seu peso, expresse o peso em libras e divida por 32 pé/s^2, a aceleração da gravidade.)

27. Beisebol Quantos pés-libras de trabalho são necessários para arremessar uma bola de beisebol a 90 mi/h? Uma bola de beisebol pesa 5 onças ou 0,3125 lb.

28. Golfe Uma bola de golfe de 1,6 onça é arremessada a uma velocidade de 280 pés/s (aproximadamente 191 mi/h). Quantos pés-libras de trabalho são necessários para arremessar a bola?

29. Tênis Durante uma partida, na qual Pete Sampras ganhou em 1990 o Campeonato Aberto de Tênis masculino dos Estados Unidos, Sampras sacou a 124 mi/h e foi considerado fenomenal. Quanto trabalho o tenista realizou sobre a bola de 2 onças para que ela atingisse aquela velocidade?

30. Futebol Um zagueiro arremessou uma bola de 14,5 onças a 88 pés/s (60 mi/h). Quantos pés-libras de trabalho foram necessários para que a bola atingisse aquela velocidade?

31. Softball Quanto trabalho foi necessário realizar sobre uma bola de softball com massa de 6,5 onças para arremessá-la a 132 pés/s (90 mi/h)?

32. Uma esfera de aço Uma esfera de aço com massa de 2 onças é colocada sobre uma mola vertical cuja constante de força é $k = 18$ lb/pé. A mola sofre uma compressão de 2 pol e depois é liberada. Aproximadamente que altura a esfera de aço atingirá?

33. Bombeando o funil do "ladrão" (*Continuação do Exemplo 6.*)

(a) Determine o raio da seção transversal (parte do funil) do "ladrão" do Exemplo 6, em função da altura y acima do fundo da barragem (de $y = 325$ a $y = 375$).

(b) Determine ΔV para a seção do funil do "ladrão" (de $y = 325$ a $y = 375$).

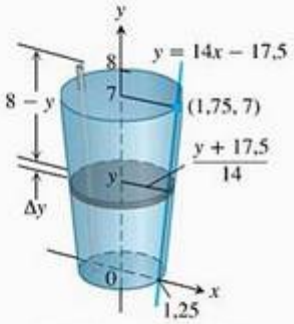
(c) Determine o trabalho necessário para bombear a seção do funil, formulando e avaliando a integral definida apropriada.

34. Bombeando a água de um "ladrão" (*Continuação do Exercício 33.*)

(a) Determine o trabalho total necessário para bombear o "ladrão", somando o trabalho necessário para bombear ambas as seções, da garganta e do funil.

(b) Sua resposta para o item **(a)** está em pés-libras. Uma forma mais usual é expressar em HP-horas, pois os motores são padronizados em HP. Para converter de pés · libra para HP-horas, divida por $1{,}98 \times 10^6$. Considerando que o motor seja totalmente eficiente, quantas horas levará um motor de 1.000 HP para bombear o "ladrão"?

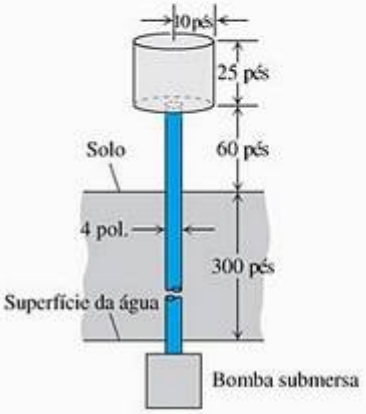
35. Tomando um milkshake O copo em forma de cone truncado mostrado na figura a seguir está cheio de milkshake de morango cujo peso específico é 4/9 onças/pol^3. Como se pode ver, ele tem 7 pol de profundidade, diâmetro de 2,5 pol na base e 3,5 pol no topo (um copo de tamanho-padrão). O canudo estende-se uma polegada acima do topo. Aproximadamente, quanto trabalho é necessário para tomar o milkshake com o canudo (desprezando o atrito)? Responda em polegadas-onças.



Dimensões em polegadas

36. Caixa d'água Sua cidade decidiu perfurar um poço para melhorar seu fornecimento de água. Como engenheiro da cidade, você determinou que será preciso uma caixa d'água para fornecer a pressão necessária para distribuição e projetou o sistema mostrado a seguir. A água será bombeada de um poço de 300 pés de profundidade por um cano vertical de 4 pol para a base de um tanque cilíndrico de 20 pés de diâmetro e 25 pés de altura. A base do tanque estará 60 pés acima do solo. A bomba é de 3 HP, classificada em 1.650 pés · libras/s. Quanto tempo demorará para encher o tanque da primeira vez

(arredonde para a hora mais próxima)? (Inclua o tempo necessário para encher o cano.) Considere que o peso específico da água seja 62,4 lb/pé^3.



FORA DE ESCALA

37. Colocando um satélite em órbita A força do campo gravitacional da Terra varia conforme a distância r do centro do planeta, e a magnitude da força gravitacional experimentada por um satélite de massa m durante e após o lançamento é

$$F(r) = \frac{mMG}{r^2}$$

Aqui, $M = 5{,}975 \times 10^{24}$ kg é a massa da Terra, $G = 6{,}6720 \times 10^{-11}$ N · m^2 kg^{-2} é a constante gravitacional universal e r é medido em metros. O trabalho necessário para elevar um satélite de 1.000 kg da superfície da Terra até uma órbita circular 35.780 km acima do centro da Terra é, portanto, dado pela integral

$$\text{Trabalho} = \int_{6.370.000}^{35.780.000} \frac{1.000MG}{r^2}\,dr \text{ joules}$$

Calcule a integral. O limite inferior de integração é o raio da Terra em metros no local do lançamento. (Esse cálculo não leva em conta a energia gasta ao elevar o veículo de lançamento ou a energia gasta trazendo o satélite para a velocidade de órbita.)

38. Forçando um par de elétrons Dois elétrons longe um do outro r metros repelem-se com uma força de

$$F = \frac{23 \times 10^{-29}}{r^2} \text{ newtons}$$

(a) Suponha que um elétron seja mantido fixo no ponto (1, 0) no eixo x (unidades em metros). Quanto trabalho será necessário para deslocar um segundo elétron ao longo do eixo x do ponto (−1, 0) para a origem?

(b) Suponha que um elétron seja mantido fixo em cada um dos pontos (−1, 0) e (1, 0). Quanto trabalho será necessário para deslocar um terceiro elétron ao longo do eixo x de (5, 0) a (3, 0)?

6.7 Forças e pressões de fluido

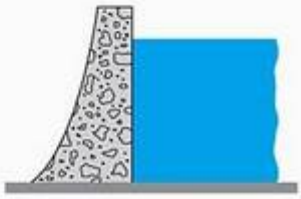


FIGURA 6.64 Para resistir ao aumento da pressão, as barragens são mais espessas na parte inferior.

Projetamos barragens com a parte inferior mais grossa do que a parte superior (Figura 6.4), pois a pressão aumenta com a profundidade. A pressão em qualquer ponto da barragem depende somente da distância entre a superfície e o ponto e não de quanto a superfície da barragem está inclinada naquele ponto. A pressão em libras por pé quadrado em um ponto h pés abaixo da superfície é sempre $62{,}4h$. O número 62,4 é o peso específico da água em libras por pé cúbico. A pressão h pés abaixo da superfície de qualquer fluido é o *peso específico* do fluido vezes h.

A equação pressão-profundidade

Em um fluido que se mantém parado, a pressão p em uma profundidade h é o peso específico do fluido w vezes h:

$$p = wh \qquad (1)$$

Nesta seção, usamos a equação $p = wh$ para deduzir a fórmula para a força total exercida por um fluido contra toda ou parte de uma parede vertical ou horizontal.

Peso específico

O peso específico de um fluido é o seu peso por unidade de volume. Valores típicos (em libras por pé cúbico) são

Gasolina	42
Mercúrio	849
Leite	64,5
Melaço	100
Azeite	57
Água do mar	64
Água	62,4

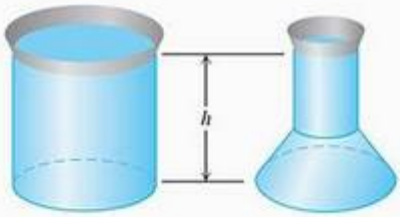


FIGURA 6.65 Esses recipientes contêm a mesma profundidade de água e têm a mesma área de base. A força total é, portanto, a mesma no fundo de cada recipiente. A forma do recipiente não é importante.

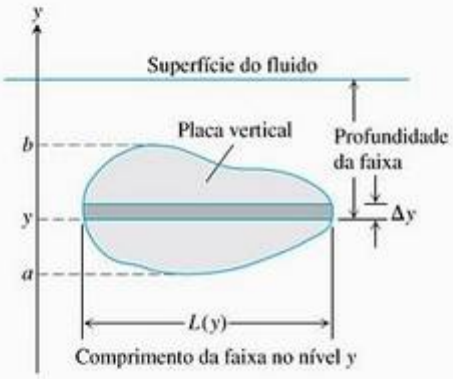


FIGURA 6.66 A força exercida pelo fluido contra um lado de uma faixa estreita é aproximadamente ΔF = pressão × área = w × (profundidade da faixa) × $L(y)\,\Delta y$.

A fórmula de profundidade constante para força de fluido

Em um recipiente para fluido com uma base plana horizontal, a força total exercida pelo fluido contra a base pode ser calculada multiplicando-se a área da base pela pressão na base. Podemos fazer isso porque a força total é igual à força por unidade de área (pressão) vezes a área (veja a Figura 6.65). Se F, p e A são a força total, a pressão e a área, então

$$\begin{aligned} F &= \text{Força total} = \text{Força por unidade de área} \times \text{Área} \\ &= \text{Pressão} \times \text{Área} = pA \\ &= whA \qquad\qquad p = wh \text{ da Equação (1)} \end{aligned}$$

Força do fluido em uma superfície com profundidade constante

$$F = pA = whA \tag{2}$$

Por exemplo, o peso específico da água é 62,4 lb/pés^3, logo a força do fluido no fundo de uma piscina retangular de 10 pés × 20 pés e 3 pés de profundidade é

$$\begin{aligned} F &= whA = (62{,}4 \text{ lb/pés}^3)(3 \text{ pés})(10 \cdot 20 \text{ pés}^2) \\ &= 37.440 \text{ lb} \end{aligned}$$

Para uma placa plana submersa *horizontalmente*, como o fundo dessa piscina, a força descendente que age sobre ela devido à pressão do líquido é dada pela Equação (2). Se a placa estiver submersa *verticalmente*, então a pressão contra ela será diferente a diferentes profundidades, e a Equação (2) não será mais usada nessa forma (porque h varia). Dividindo a placa em várias faixas horizontais, podemos criar uma soma de Riemann cujo limite seja a força de fluido contra o lado da placa vertical submersa. O procedimento é mostrado a seguir.

Fórmula da profundidade variável

Suponha que queiramos conhecer a força exercida pelo fluido de peso específico w contra um lado de uma placa vertical nele submersa. Para determiná-la, modelamos a placa como uma região que se estende de $y = a$ a $y = b$ no plano xy (Figura 6.66). Fazemos a partição de $[a, b]$ da maneira usual e imaginamos que a região seja cortada em faixas finas na horizontal por planos perpendiculares ao eixo y nos pontos da partição. A faixa típica de y a $y + \Delta y$ tem Δy unidades de largura por $L(y)$ unidades de comprimento. Consideramos que $L(y)$ seja uma função contínua de y.

A pressão varia ao longo da faixa de cima para baixo. Se, entretanto, a faixa for suficientemente estreita, a pressão ficará próximo do valor da borda inferior de w × (profundidade da faixa). A força exercida pelo fluido contra um lado da faixa será aproximadamente

$$\begin{aligned} \Delta F &= (\text{pressão ao longo da borda inferior}) \times \text{área} \\ &= w \cdot (\text{profundidade da faixa}) \cdot L(y)\Delta y \end{aligned}$$

Suponha que haja n faixas associadas à partição de $a \le y \le b$ e que y_k seja a borda inferior da k-ésima faixa, tendo comprimento de $L(y_k)$ e largura Δy_k. A força contra a placa toda será aproximadamente

$$F \approx \sum_{k=1}^{n} (w \cdot (\text{profundidade da faixa})_k \cdot L(y_k))\,\Delta y_k \tag{3}$$

A soma na Equação (3) é uma soma de Riemann para uma função contínua de $[a, b]$, e esperamos que as aproximações melhorem conforme a norma da partição tenda a zero. A força exercida contra a placa é o limite dessas somas.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(w\cdot\begin{pmatrix}\text{profundidade}\\ \text{da faixa}\end{pmatrix}_k\cdot L(y_k)\right)\Delta y_k = \int_a^b w\cdot\begin{pmatrix}\text{profundidade}\\ \text{da faixa}\end{pmatrix}\cdot L(y)\,dy$$

A integral para a força de um fluido contra uma placa plana vertical

Suponha que uma placa submersa verticalmente no fluido de peso específico w vá de $y = a$ a $y = b$ no eixo y. Seja $L(y)$ o comprimento da faixa horizontal medido da esquerda para a direita ao longo da superfície da placa no nível y. Então a força exercida pelo fluido contra um lado da placa é

$$F = \int_a^b w\cdot(\text{profundidade da faixa})\cdot L(y)\,dy \qquad (4)$$

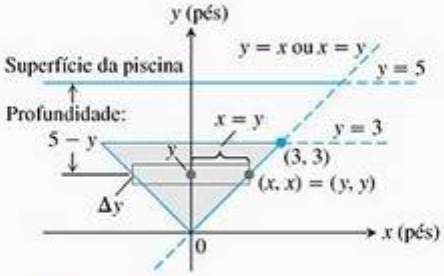


FIGURA 6.67 Para calcular a força sobre um lado da placa submersa do Exemplo 1, podemos usar um sistema de coordenadas como este.

EXEMPLO 1 Aplicando a integral para a força de fluido

Uma placa plana triangular com dois lados iguais, base de 6 pés e altura de 3 pés, está submersa verticalmente, com a base virada para cima, 2 pés abaixo da superfície de uma piscina. Determine a força exercida pela água contra um lado da placa.

SOLUÇÃO Estabelecemos um sistema de coordenadas para trabalhar colocando a origem no vértice de baixo da placa e calculando o eixo y sobre o eixo de simetria da placa (Figura 6.67). A superfície da piscina situa-se ao longo da reta $y = 5$ e a extremidade superior da placa ao longo da reta $y = 3$. A extremidade à direita da placa situa-se ao longo da reta $y = x$, com o vértice superior direito em (3, 3). O comprimento de uma faixa fina no nível y é

$$L(y) = 2x = 2y$$

A profundidade da faixa abaixo da superfície é $(5 - y)$. A força exercida pela água contra um lado da placa é, portanto,

$$\begin{aligned}
F &= \int_a^b w\cdot\begin{pmatrix}\text{profundidade}\\ \text{da faixa}\end{pmatrix}\cdot L(y)\,dy \quad \text{Equação (4)}\\
&= \int_0^3 62{,}4(5-y)2y\,dy\\
&= 124{,}8\int_0^3 (5y - y^2)\,dy\\
&= 124{,}8\left[\frac{5}{2}y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 1684{,}8 \text{ lb}
\end{aligned}$$

Forças de fluidos e centróides

Se soubermos a localização do centróide de uma placa vertical plana submersa (Figura 6.68), poderemos pegar um "atalho" e determinar a força contra um lado da placa mais rapidamente. Segundo a Equação (4),

$$F = \int_a^b w\times(\text{profundidade da faixa})\times L(y)\,dy$$

FIGURA 6.68 A força contra um lado da placa é $w \cdot \bar{h} \cdot$ área da placa.

$$= w\int_a^b (\text{profundidade da faixa}) \times L(y)\, dy$$

$$= w \times (\text{momento em torno da reta que forma a superfície da região ocupada pela placa})$$

$$= w \times (\text{profundidade do centróide da placa}) \times (\text{área da placa})$$

Forças de fluidos e centróides

A força de um fluido de peso específico w contra um lado de uma placa vertical plana submersa é o produto entre w, a distância $\bar{h}$ do centróide da placa até a superfície do fluido e a área da placa:

$$F = w\bar{h}A \tag{5}$$

EXEMPLO 2 Determinando a força de um fluido com a Equação (5)

Use a Equação (5) para determinar a força no Exemplo 1.

SOLUÇÃO O centróide do triângulo (Figura 6.67) fica no eixo y, a um terço do caminho entre a base e o vértice, logo $\bar{h} = 3$. A área do triângulo é

$$A = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$$

$$F = \frac{23 \times 10^{-29}}{r^2} \qquad = \frac{1}{2}(6)(3) = 9$$

Portanto,

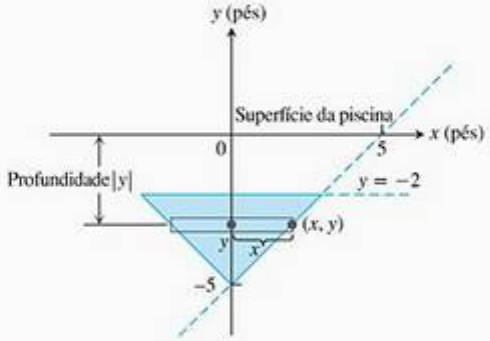
$$F = w\bar{h}A = (62{,}4)(3)(9)$$

$$= 1.684{,}8 \text{ lb}$$

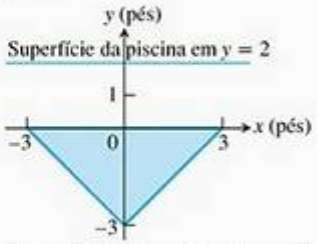
Exercícios 6.7

O peso específico dos fluidos nos exercícios a seguir está na tabela da página 490.

1. **Placa triangular** Calcule a força do fluido em um lado da placa do Exemplo 1 usando o sistema de coordenadas mostrado aqui.



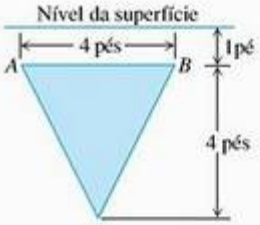
2. **Placa triangular** Calcule a força do fluido em um lado da placa do Exemplo 1 usando o sistema de coordenadas mostrado a seguir.



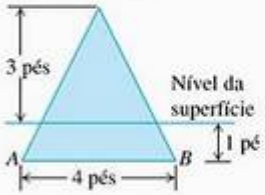
3. **Placa triangular afundada** A placa do Exemplo 1 é afundada mais 2 pés dentro da água. Qual é a força do fluido em um lado da placa agora?

4. **Placa triangular puxada** A placa do Exemplo 1 é puxada para cima até seu extremo superior atingir a superfície da piscina. Qual é a força do fluido em um lado da placa agora?

5. **Placa triangular** A placa triangular isósceles mostrada a seguir está verticalmente submersa 1 pé abaixo da superfície de um lago de água doce.
   (a) Determine a força exercida pelo fluido contra um lado da placa.
   (b) Qual seria a força exercida pelo fluido sobre um lado da placa se a água fosse do mar em vez de doce?



6. **Placa triangular girada** A placa do Exercício 5 é girada 180° em torno da reta AB, de modo que parte dela fique para fora do lago, como se vê aqui. Que força a água exerce sobre um lado da placa agora?



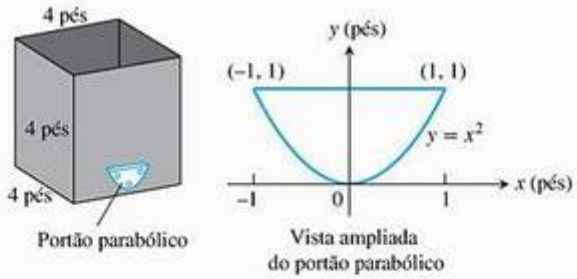
7. **Aquário de New England** O vidro de exibição típico de um tanque de peixes no aquário de New England, em Boston, tem 63 pol de largura e vai de 0,5 pol até 33,5 pol abaixo da superfície da água. Determine a força do fluido contra esse vidro. O peso específico da água do mar é 64 lb/pé^3. (Caso você queira saber, o vidro tem 3/4 pol de espessura e a altura das paredes do tanque é de 4 pol acima da superfície da água, para evitar que os peixes pulem para fora.)

8. **Tanque de peixes** Um tanque horizontal e retangular de peixes com base de 2×4 pés e altura de 2 pés (dimensões interiores) é enchido com água doce até a altura de 2 pol abaixo do topo.
   (a) Determine a força do fluido contra cada lado e extremidade do tanque.
   (b) Se o tanque for fechado e deitado (sem derramamento), de modo que uma das extremidades seja a base, o que isso faz com as forças de fluido nos lados retangulares?

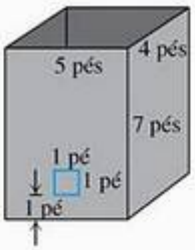
9. **Placa semicircular** Uma placa semicircular de 2 pés de diâmetro é colocada diretamente na água doce com o diâmetro ao longo da superfície. Determine a força exercida pela água em um lado da placa.

10. **Caminhão de leite** Um caminhão-tanque carrega leite em um tanque cilíndrico horizontal circular reto de 6 pés de diâmetro. Quanta força o leite exerce em cada extremidade do tanque quando este está pela metade?

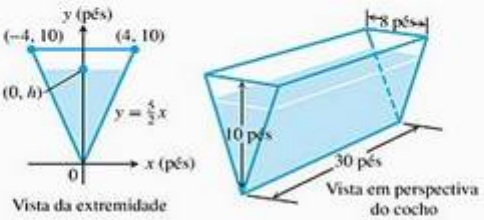
11. O tanque metálico cúbico que se vê aqui tem um portão parabólico que é mantido no lugar por parafusos e é projetado para resistir a uma força de fluido de 160 lb sem se romper. O líquido que você planeja armazenar tem peso específico de 50 lb/pé^3.
   (a) Qual é a força que o fluido exerce sobre o portão quando o líquido está a 2 pés de profundidade?
   (b) Qual é a altura máxima que se pode encher o tanque sem que se exceda a limitação de projeto deste?



12. O tanque retangular que se vê na figura tem, acima da base, um vidro quadrado de 1×1 pé. O vidro foi projetado para resistir a uma força de fluido de 312 lb sem se romper.
   (a) Que força de fluido o vidro terá de suportar se o tanque contiver um nível de água de 3 pés?
   (b) Qual é o nível de água que o tanque pode conter sem exceder a limitação do projeto do vidro?



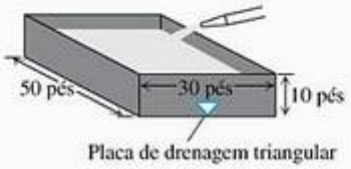
13. As placas nas extremidades do cocho que se vê aqui foram projetadas para resistir a uma força de fluido de 6.667 libras. Quantos pés cúbicos de água o tanque pode conter sem exceder essa limitação? Arredonde para o pé cúbico mais próximo.

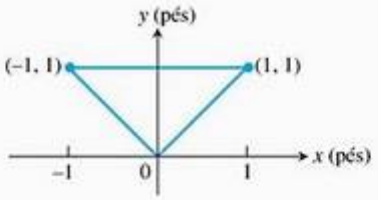


14. A água está entrando na piscina retangular mostrada a seguir a uma taxa de 1.000 pés^3/h.

(a) Determine a força do fluido contra a placa de drenagem triangular depois de a água estar entrando na piscina há 9 horas.

(b) A placa de drenagem foi projetada para resistir a uma força de fluido de 520 lb. A que nível você pode encher a piscina sem exceder essa limitação?



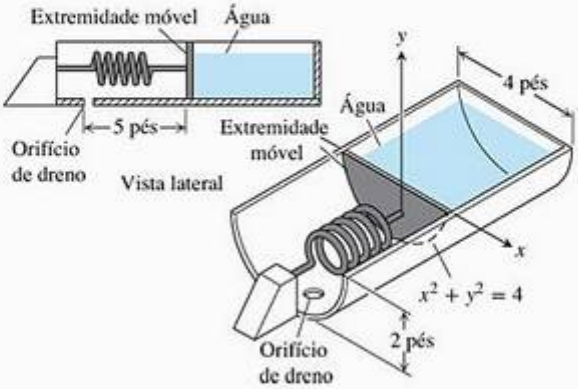


Visão ampliada da placa de drenagem

15. Uma placa retangular vertical com a unidades de comprimento por b unidades de largura é submersa em um fluido de peso específico w com suas bordas mais longas paralelas à superfície do fluido. Determine o valor médio da pressão ao longo das dimensões verticais da placa.

16. (*Continuação do Exercício 15.*) Mostre que a força exercida pelo fluido em um lado da placa é o valor médio da pressão (determinada no Exercício 15) vezes a área da placa. Justifique sua resposta.

17. A água verte a 4 pés^3/min para dentro do tanque que se vê na figura. As seções transversais do tanque são semicírculos com 4 pés de diâmetro. Uma extremidade do tanque é móvel, mas, ao movimentá-la para aumentar o volume, comprime-se uma mola. A constante da mola é $k = 100$ lb/pé. Se a extremidade do tanque se deslocar 5 pés contra a mola, a água escoará por um orifício de segurança na parte inferior a 5 pés^3/min. A extremidade móvel atingirá o orifício antes que o tanque transborde?



18. Cocho As extremidades verticais de um cocho são quadrados com lados medindo 3 pés.

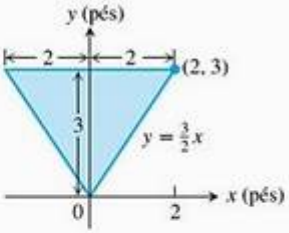
(a) Determine a força de fluido contra as extremidades quando o cocho está cheio.

(b) Em quantas polegadas você tem de baixar o nível de água no cocho para reduzir a força de fluido em 25%?

19. Caixa de leite Uma caixa de leite retangular mede 3,75 × 3,75 pol na base e 7,75 pol na altura. Determine a força do leite em um lado quando a caixa está cheia.

20. Lata de azeite de oliva Uma lata de azeite de oliva comum mede 5,75 × 3,5 pol na base e tem 10 pol de altura. Determine a força de fluido contra a base e contra cada lado quando a lata está cheia.

21. Cocho As extremidades verticais de um cocho são triângulos isósceles como o que se vê aqui (dimensões em pés).

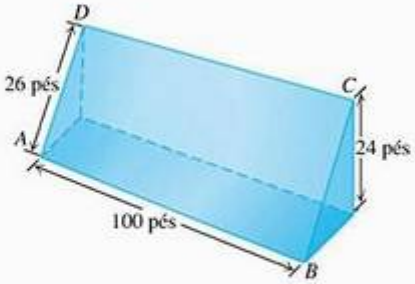


(a) Determine a força de fluido contra as extremidades quando o cocho está cheio.

(b) Em quantas polegadas você tem de baixar o nível de água no cocho para reduzir pela metade a força de fluido nas extremidades? (Responda arredondando para a meia polegada mais próxima.)

(c) O comprimento do cocho tem importância? Justifique sua resposta.

22. A frente de uma barragem é um retângulo, $ABCD$, de dimensões $AB = CD = 100$ pés, $AD = BC = 26$ pés. O plano $ABCD$ não é vertical, e sim inclinado, conforme indica a figura a seguir, sendo o topo da barragem 24 pés mais alto que a base. Determine a força devido à pressão da água sobre a barragem quando a superfície da água está nivelada com o topo.



Questões de revisão

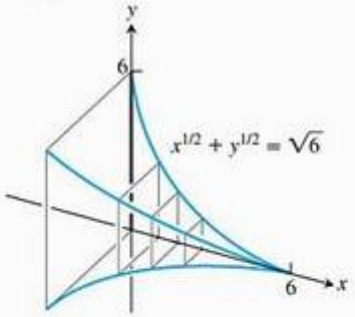
1. Como você define e calcula os volumes de sólidos pelo método de fatiamento? Dê um exemplo.
2. Como os métodos do disco e do anel para calcular volumes são deduzidos do método do fatiamento? Dê exemplos.
3. Descreva o método das cascas cilíndricas. Dê um exemplo.
4. Como você determina o comprimento de uma curva parametrizada lisa $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$? Por que é preciso que a curva seja lisa para ser possível calcular seu comprimento? O que mais você precisa saber sobre a parametrização para determinar o comprimento da curva? Dê exemplos.
5. Como você determina o comprimento do gráfico de uma função lisa em um intervalo fechado? Dê um exemplo. E no caso de funções que não têm primeiras derivadas contínuas?
6. O que é um centro de massa?
7. Como você localiza o centro de massa de uma barra ou faixa reta e estreita de material? Dê um exemplo. Se a densidade do material é constante, você pode dizer imediatamente onde o centro de massa está. Onde ele está?
8. Como você localiza o centro de massa de uma chapa plana e fina de material? Dê um exemplo.
9. Como você define e calcula a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico de uma função lisa $y = f(x)$, $a \le x \le b$? Dê um exemplo.
10. Sob quais condições você pode determinar a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, de uma curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le x \le b$? E em torno do eixo y? Dê exemplos.
11. O que dizem os dois teoremas de Pappus? Dê exemplos de como eles são usados para calcular áreas de superfície e volumes e para localizar centróides.
12. Como você define e calcula o trabalho exercido por uma força variável direcionada ao longo de uma parte do eixo x? Como você calcula o trabalho necessário para bombear líquido de um tanque? Dê exemplos.
13. Como você calcula a força exercida por um líquido contra uma parte de uma parede vertical plana? Dê um exemplo.

Exercícios práticos

Volumes

Determine o volume dos sólidos nos exercícios 1–16.

1. O sólido situa-se entre planos perpendiculares ao eixo x em $x = 0$ e $x = 1$. As seções transversais perpendiculares ao eixo x entre esses planos são discos circulares cujos diâmetros vão da parábola $y = x^2$ à parábola $y = \sqrt{x}$.
2. A base do sólido é a região no primeiro quadrante entre a reta $y = x$ e a parábola $y = 2\sqrt{x}$. As seções transversais do sólido por planos perpendiculares ao eixo x são triângulos eqüiláteros cujas bases estendem-se da reta à curva.
3. O sólido situa-se entre planos perpendiculares ao eixo x em $x = \pi/4$ e $x = 5\pi/4$. As seções transversais entre esses planos são discos circulares cujos diâmetros vão da curva $y = 2\cos x$ à curva $y = 2\,\text{sen}\, x$.
4. O sólido situa-se entre planos perpendiculares ao eixo x em $x = 0$ e $x = 6$. As seções transversais entre esses planos são quadrados cujas bases vão do eixo x à curva $x^{1/2} + y^{1/2} = \sqrt{6}$.



5. O sólido situa-se entre planos perpendiculares ao eixo x em $x = 0$ e $x = 4$. As seções transversais do sólido perpendiculares ao eixo x entre esses planos são discos circulares cujos diâmetros vão da curva $x^2 = 4y$ à curva $y^2 = 4x$.
6. A base do sólido é a região limitada pela parábola $y^2 = 4x$ e pela reta $x = 1$ no plano xy. Cada seção transversal

perpendicular ao eixo x é um triângulo eqüilátero com um extremo no plano. (Todos os triângulos situam-se no mesmo lado do plano.)

7. Determine o volume do sólido resultante ao se girar a região limitada pelo eixo x, pela curva $y = 3x^4$ e pelas retas $x = 1$ e $x = -1$ em torno (a) do eixo x; (b) do eixo y; (c) da reta $x = 1$; (d) da reta $y = 3$.

8. Determine o volume do sólido resultante ao se girar a região "triangular" limitada pela curva $y = 4/x^3$ e pelas retas $x = 1$ e $y = 1/2$ em torno (a) do eixo x; (b) do eixo y; (c) da reta $x = 2$; (d) da reta $y = 4$.

9. Determine o volume do sólido resultante ao se girar a região limitada à esquerda pela parábola $x = y^2 + 1$ e à direita pela reta $x = 5$ em torno (a) do eixo x; (b) do eixo y; (c) da reta $x = 5$.

10. Determine o volume do sólido resultante ao se girar a região limitada pela parábola $y^2 = 4x$ e pela reta $y = x$ em torno (a) do eixo x; (b) do eixo y; (c) da reta $x = 4$; (d) da reta $y = 4$.

11. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região "triangular" limitada pelo eixo x, pela reta $x = \pi/3$ e pela curva $y = \operatorname{tg} x$ no primeiro quadrante.

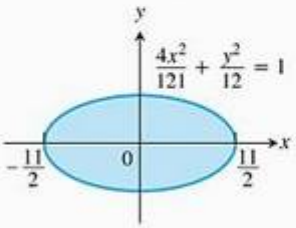
12. Determine o volume do sólido resultante ao se girar a região limitada pela curva $y = \operatorname{sen} x$ e pelas retas $x = 0$, $x = \pi$ e $y = 2$ em torno da reta $y = 2$.

13. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região delimitada pela curva $x = e^{y^2}$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $y = 1$.

14. Determine o volume do sólido resultante ao se girar, em torno do eixo x, a região limitada por $y = 2 \operatorname{tg} x$, $y = 0$, $x = -\pi/4$ e $x = \pi/4$. (A região situa-se no primeiro e no terceiro quadrantes e assemelha-se a uma gravata-borboleta inclinada.)

15. **Volume de um orifício de uma esfera sólida** É feito um orifício redondo de raio $\sqrt{3}$ pés através do centro de uma esfera sólida de raio 2 pés. Determine o volume do material removido da esfera.

16. **Volume de uma bola de futebol americano** O perfil de uma bola de futebol americano lembra a elipse mostrada aqui. Determine o volume da bola de futebol aproximando até a polegada cúbica mais próxima.

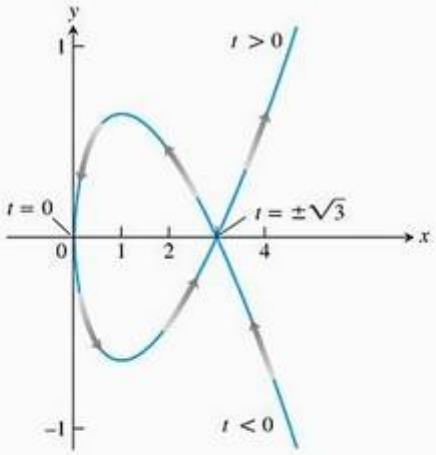


Comprimento de curvas

Determine o comprimento das curvas nos exercícios 17–23.

17. $y = x^{1/2} - (1/3)x^{3/2}, \quad 1 \le x \le 4$
18. $x = y^{2/3}, \quad 1 \le y \le 8$
19. $y = x^2 - (\ln x)/8, \quad 1 \le x \le 2$
20. $x = (y^3/12) + (1/y), \quad 1 \le y \le 2$
21. $x = 5\cos t - \cos 5t, \quad y = 5 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 5t, \quad 0 \le t \le \pi/2$
22. $x = t^3 - 6t^2, \quad y = t^3 + 6t^2, \quad 0 \le t \le 1$
23. $x = 3\cos\theta, \quad y = 3 \operatorname{sen}\theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$

24. Determine o comprimento do laço compreendido por $x = t^2$, $y = (t^3/3) - t$ que se vê aqui. O laço começa em $t = -\sqrt{3}$ e termina em $t = \sqrt{3}$.



Centróides e centros de massa

25. Determine o centróide de uma placa plana e fina que cobre a região compreendida pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 3 - x^2$.

26. Determine o centróide de uma placa plana e fina que cobre a região compreendida pelo eixo x, as retas $x = 2$ e $x = -2$ e a parábola $y = x^2$.

27. Determine o centróide de uma placa plana e fina que cobre a região "triangular" no primeiro quadrante limitada pelo eixo y, pela parábola $y = x^2/4$ e pela reta $y = 4$.

28. Determine o centróide de uma placa plana e fina que cobre a região compreendida pela parábola $y^2 = x$ e pela reta $x = 2y$.

29. Determine o centro de massa de uma placa plana e fina que cobre a região compreendida pela parábola $y^2 = x$ e pela reta $x = 2y$ se a função densidade é $\delta(y) = 1 + y$. (Use faixas horizontais.)

30. (a) Determine o centro de massa de uma placa fina de densidade constante que cobre a região entre a curva $y = 3/x^{3/2}$ e o eixo x, de $x = 1$ até $x = 9$.

(b) Determine o centro de massa da placa se, em vez de ser constante, a densidade for $\delta(x) = x$. (Use faixas verticais.)

Áreas de superfície de revolução

Nos exercícios 31–36, determine a área das superfícies geradas pela rotação das curvas em torno dos eixos dados.

31. $y = \sqrt{2x + 1}, \quad 0 \le x \le 3; \quad$ eixo x
32. $y = x^3/3, \quad 0 \le x \le 1; \quad$ eixo x
33. $x = \sqrt{4y - y^2}, \quad 1 \le y \le 2; \quad$ eixo y
34. $x = \sqrt{y}, \quad 2 \le y \le 6; \quad$ eixo y
35. $x = t^2/2, \quad y = 2t, \quad 0 \le t \le \sqrt{5}; \quad$ eixo x
36. $x = t^2 + 1/(2t), \quad y = 4\sqrt{t}, \quad 1/\sqrt{2} \le t \le 1; \quad$ eixo y

Trabalho

37. **Levantando equipamento** Uma alpinista está prestes a erguer 100 N (aproximadamente 22,5 lb) de equipamento que está pendurado abaixo dela na ponta de uma corda de 40 m que pesa 0,8 N por metro. Quanto trabalho será necessário realizar? (*Dica*: Resolva separadamente para a corda e para o equipamento e depois some.)

38. **Caminhão-pipa vazando** Você dirigiu um caminhão-pipa com 800 galões de água do sopé do Monte Washington até o topo e ao chegar descobriu que o tanque estava pela metade. Você começou com o tanque cheio, subiu a uma velocidade constante e chegou à elevação de 4.750 pés em 50 minutos. Admitindo-se que a água tenha vazado a uma taxa constante, quanto trabalho foi realizado ao transportar a água para o topo? Despreze o trabalho realizado de carregar a si próprio e o caminhão para lá. A água pesa 8 lb/galão.

39. **Esticando uma mola** Se é necessário exercer uma força de 20 lb para manter uma mola distendida 1 pé além de seu comprimento original, quanto trabalho é necessário realizar para distender a mola até esse ponto? E até 1 pé a mais?

40. **Mola da porta da garagem** Uma força de 200 N vai esticar uma mola de porta de garagem 0,8 m além de seu comprimento não esticado. Quanto uma força de 300 N esticaria a mola? Quanto trabalho é necessário para esticar a mola até essa distância, a partir de seu comprimento não esticado?

41. **Bombeando um reservatório** Um reservatório em forma de cone circular reto, apontado para baixo, com 8 pés de profundidade e cuja boca tem 20 pés de diâmetro, está cheio de água. Quanto trabalho é necessário para bombear a água para um nível 6 pés acima do topo?

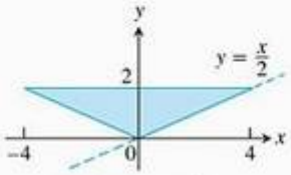
42. **Bombeando um reservatório** (*Continuação do Exercício 41.*) O reservatório contém 5 pés de profundidade de água, que está para ser bombeada para o nível do topo. Quanto trabalho será necessário?

43. **Bombeando um tanque cônico** Um tanque cônico circular reto, apontado para baixo, cuja boca tem raio de 5 pés e cuja altura é 10 pés está cheio com um líquido cujo peso específico é 60 lb/pé^3. Quanto trabalho é necessário para bombear o líquido para um ponto 2 pés acima do tanque? Se a bomba é movida por um motor que trabalha a uma taxa de 275 pés · lb/s (1/2 HP), quanto tempo levará para esvaziar o tanque?

44. **Bombeando um tanque cilíndrico** Um tanque de armazenagem é um cilindro circular reto com 20 pés de comprimento e 8 pés de diâmetro, com eixo horizontal. Se o tanque está pela metade de azeite de oliva pesando 57 lb/pé^3, determine o trabalho realizado para esvaziá-lo através de um cano que vai do fundo do tanque até uma saída 6 pés acima do topo.

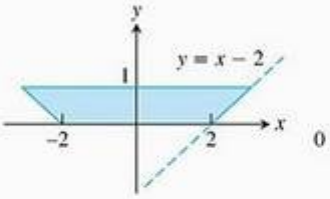
Força de fluido

45. **Cocho de água** A placa triangular vertical mostrada na figura é a base de um cocho cheio de água ($w = 62{,}4$). Qual é a força do fluido contra a placa?



UNIDADES EM PÉS

46. **Cocho de xarope de bordo** A placa trapezoidal vertical mostrada a seguir é a lateral de um cocho cheio de xarope de bordo que pesa 75 lb/pé^3. Qual é a força exercida pelo xarope contra a lateral do cocho quando o líquido tem 10 polegadas de profundidade?



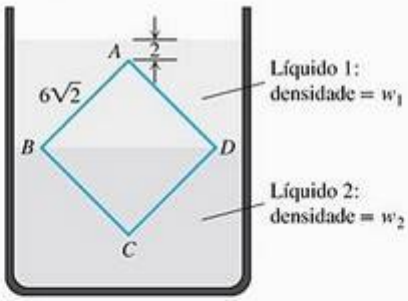
UNIDADES EM PÉS

47. **Força contra um portão parabólico** Um portão plano e vertical na parte frontal de uma barragem tem o mesmo formato da região parabólica entre a curva $y = 4x^2$ e a reta $y = 4$, com medidas em pés. O topo do portão fica 5 pés

abaixo da superfície da água. Determine a força exercida pela água ($w = 62{,}4$).

48. Você pretende armazenar mercúrio ($w = 849$ lb/pés^3) em
T um tanque retangular vertical que tem uma base quadrada medindo 1 pé de cada lado. A parede interior do tanque pode suportar uma força de fluido total de 40.000 lb. Aproximadamente, quantos pés cúbicos de mercúrio você vai poder armazenar no tanque de cada vez?

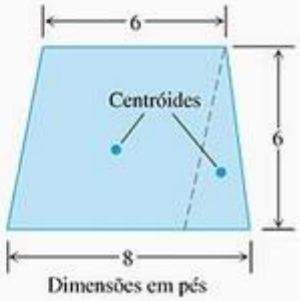
49. A vasilha que se vê abaixo está cheia com dois líquidos não miscíveis de peso específico w_1 e w_2. Determine a força de fluido em um lado da placa quadrada vertical $ABCD$. Os pontos B e D situam-se na fronteira entre os líquidos, e o quadrado tem $6\sqrt{2}$ pés de lado.



50. A placa trapezoidal isósceles mostrada na figura está submersa verticalmente em água ($w = 62{,}4$), com sua borda superior 4 pés abaixo da superfície. Determine a força do fluido em um lado da placa de dois modos diferentes:

(a) Calculando uma integral.

(b) Dividindo a placa em um paralelogramo e um triângulo isósceles, depois localizando seus centróides e usando a equação $F = w\bar{h}A$ da Seção 6.7.



Exercícios adicionais

Volume e comprimento

1. Um sólido é gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelo gráfico da função contínua positiva $y = f(x)$, pelo eixo x, pela reta fixa $x = a$ e pela reta variável $x = b$, $b > a$. Seu volume, para qualquer b, é $b^2 - ab$. Determine $f(x)$.

2. Um sólido é gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelo gráfico da função contínua positiva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = a$. Seu volume, para qualquer $a > 0$, é $a^2 + a$. Determine $f(x)$.

3. Suponha que a função crescente $f(x)$ seja lisa para $x \geq 0$ e que $f(0) = a$. Faça $s(x)$ denotar o comprimento do gráfico de f de $(0, a)$ até $(x, f(x))$, $x > 0$. Determine $f(x)$ se $s(x) = Cx$ para algum C constante. Quais são os valores permitidos para C?

4. (a) Mostre que, para $0 < \alpha \leq \pi/2$,

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{1+\cos^2\theta}\, d\theta > \sqrt{\alpha^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

(b) Generalize o resultado do item **(a)**.

Momentos e centros de massa

5. Encontre o centróide da região limitada inferiormente pelo eixo x e superiormente pela curva $y = 1 - x^n$, sendo n um inteiro positivo e par. Qual é a posição-limite do centróide quando $n \to \infty$?

6. Se um poste telefônico é transportado em um carrinho de duas rodas atrás de um caminhão, o ideal é que as rodas estejam cerca de 3 pés atrás do centro de massa do poste, para permitir uma distribuição de peso adequada. Os postes de madeira NYNEX classe 1, de 40 pés, têm 27 polegadas de circunferência no topo e 43,5 na base. Aproximadamente, a que distância do topo fica o centro de massa?

7. Suponha que uma placa de metal fina de área A e densidade constante δ ocupe uma região R no plano xy e considere M_y o momento da placa em torno do eixo y. Mostre que o momento da placa em torno da reta $x = b$ é

(a) $M_y - b\delta A$ se a placa situa-se à direita da reta;

(b) $b\delta A - M_y$ se a placa situa-se à esquerda da reta.

8. Determine o centro de massa de uma placa fina que cobre a região limitada pela curva $y^2 = 4ax$ e pela reta $x = a$, $a =$

constante positiva, se a densidade em (x, y) é diretamente proporcional a **(a)** x, **(b)** $|y|$.

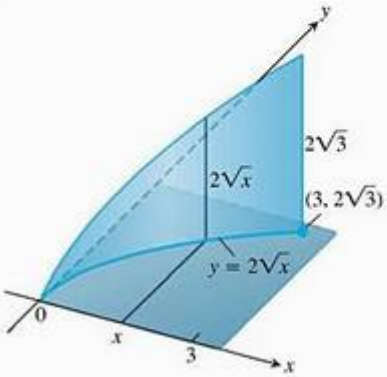
9. (a) Determine o centróide da região no primeiro quadrante limitada por dois círculos concêntricos e pelos eixos das coordenadas, se os círculos têm raios a e b, $0 < a < b$, e seus centros estão na origem.

(b) Determine os limites das coordenadas do centróide quando a se aproxima de b e discuta o significado do resultado.

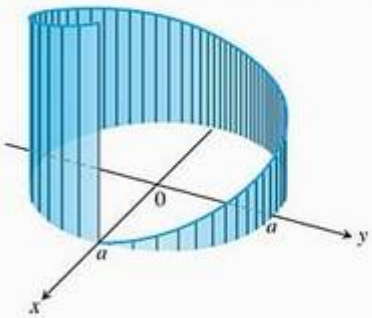
10. Uma ponta triangular é cortada de um quadrado cujo lado é 1 pé. A área do triângulo removido é 36 pol^2. Se o centróide da região remanescente está a 7 pol de um lado do quadrado original, a que distância ele está dos lados restantes?

Área de superfície

11. Em certos pontos da curva $y = 2\sqrt{x}$, segmentos de reta de comprimento $h = y$ são traçados perpendicularmente ao plano xy. (Veja a figura a seguir.) Determine a área da superfície formada por essas retas perpendiculares de $(0, 0)$ a $(3, 2\sqrt{3})$.



12. Em certos pontos de um círculo de raio a, segmentos de reta são traçados perpendicularmente ao plano do círculo, tendo a reta perpendicular a cada ponto P comprimento ks, onde s é o comprimento do arco do círculo medido em sentido anti-horário de $(a, 0)$ até P, e k é uma constante positiva, conforme mostrado a seguir. Determine a área da superfície formada pelas retas perpendiculares ao longo do arco que começa em $(a, 0)$ e se estende uma única vez em volta do círculo.



Trabalho

13. Uma partícula de massa m parte do repouso no instante $t = 0$ e se move ao longo do eixo x com aceleração constante a de $x = 0$ a $x = h$ contra uma força variável de magnitude $F(t) = t^2$. Determine o trabalho realizado.

14. Trabalho e energia cinética Suponha que uma bola de golfe de 1,6 onça seja colocada sobre uma mola vertical com força constante $k = 2$ lb/pol. A mola é comprimida 6 polegadas e solta. Aproximadamente, que altura atinge a bola de golfe (medida a partir da posição de repouso da mola)?

Força de fluido

15. Uma placa triangular ABC é submersa em água verticalmente. O lado AB, com 4 pés de extensão, está 6 pés abaixo da superfície da água, enquanto o vértice C está 2 pés abaixo da superfície. Determine a força exercida pela água em um lado da placa.

16. Uma placa retangular vertical é submersa em um fluido com seu lado superior paralelo à superfície do fluido. Mostre que a força exercida pelo fluido em um lado da placa é igual ao valor médio da pressão de cima para baixo da placa vezes a área da placa.

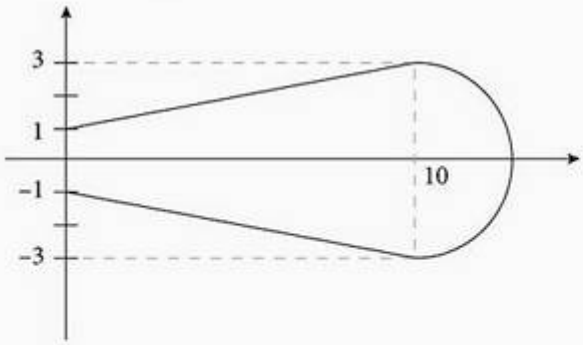
17. O *centro de pressão* em um lado de uma região plana submersa em um fluido é definido como o ponto no qual a força total exercida pelo fluido pode ser aplicada sem que se altere seu momento total em torno de qualquer eixo no plano. Determine a profundidade do centro de pressão **(a)** em um retângulo vertical de altura h e largura b, se sua borda superior estiver na superfície do fluido; **(b)** em um triângulo vertical de altura h e base b, se o vértice oposto a b estiver a pés abaixo da superfície do fluido e a base b estiver $(a + h)$ pés abaixo da mesma superfície.

Exercícios avançados

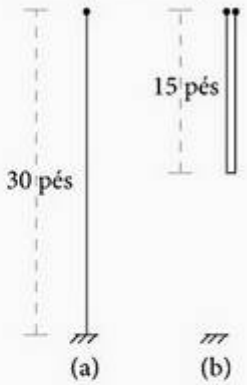
1. Calcule, pelo método dos discos, o volume dos sólidos obtidos girando a região entre o eixo x e o gráfico de $y = x^4$, para $0 \leq x \leq 1$, em torno
   (a) do eixo x
   (b) do eixo y
   (c) da reta $x = 1$
2. Repita o Exercício 1 usando o método das cascas.
3. Calcule o centróide da região plana descrita no Exercício 1. Use o teorema de Pappus para reobter os volumes pedidos no Exercício 1. Qual dos três métodos usados nos Exercícios 1–3 para calcular esses volumes você considera mais vantajoso?
4. Seja L o comprimento da curva $y = x^4$, para $0 \leq x \leq 1$. Expresse L como uma integral e mostre, usando a definição de comprimento de uma curva e de integral, que $1{,}4 < L < 2{,}7$. A seguir, use um SAC para calcular numericamente L, o centróide da curva e a área das superfícies obtidas girando essa curva em torno
   (a) do eixo x
   (b) do eixo y
   (c) da reta $x = 1$

   Verifique diretamente que o teorema de Pappus para áreas é válido no caso dessas três superfícies.
5. Encontre o volume do sólido no primeiro octante cuja base é a região limitada por $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 2x/\pi$ e cujas seções transversais perpendiculares ao eixo x são
   (a) quadrados
   (b) triângulos eqüiláteros
6. O interior de um tanque é descrito pelos pontos obtidos girando a região no primeiro quadrante do plano xz delimitada pelos eixos coordenados, pelo gráfico de $z = ax^b$, em que a e b são reais positivos, e $z = a$, em torno do eixo z. Suponha que o tanque esteja com água até a metade de sua capacidade. Desenhe um esboço do tanque e determine a altura da água no tanque.
7. O gráfico da função derivável $y = f(x)$, positiva em $x > 0$, passa pela origem. Para todo $x > 0$, o comprimento da curva de $(0, 0)$ a $(x, f(x))$ é dado por $L(x) = \int_0^x \sqrt{1 + 4\,e^{t/2}}\,dt$

   Determine a função f. Ela é única?
8. Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, uma curva lisa, com $\alpha'(t) \neq 0$, para $a \leq t \leq b$. Dada uma função crescente, com derivada contínua positiva, $u : [c, d] \to [a, b]$, a curva $\beta(w) = \alpha(u(w))$ (isto é, $\beta = \alpha \circ u$), $c \leq w \leq d$, é chamada uma re-parametrização de α. Mostre que β é uma curva lisa, com $\beta'(w) \neq 0$, para $c \leq t \leq d$, que a imagem de α e de β coincidem e que o comprimento de α é igual ao comprimento de β.
9. A pá de um ventilador pode ser modelada por uma placa fina de densidade constante, com a forma de um trapézio unido a um semicírculo, como mostra a figura. Encontre o centróide da placa.

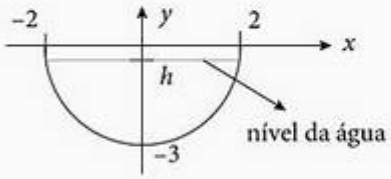


10. Um cabo de aço tem densidade de quatro libras por pé e comprimento de 30 pés, e está inicialmente em repouso sobre o chão. Calcule o trabalho necessário para
    (a) erguer uma ponta do cabo a 30 pés do chão, de modo que ele fique esticado;
    (b) a partir da posição em (a) erguer a outra ponta do cabo a 30 pés de altura, de modo que o cabo fique dobrado no meio, pendurado por ambas as pontas.



11. A seção transversal vertical de um canal de irrigação é modelado por $y = -\frac{1}{2}\sqrt{36 - 9x^2}$ em que x, em metros,

é medido a partir do centro do canal. Suponha que a superfície da água esteja h metros abaixo do topo do canal. Calcule a força do fluido contra um portão vertical usado para impedir o fluxo de água no canal.



12. Um triângulo isóscele T tem base $2r$ e altura h. A base de T coincide com o diâmetro de uma região semicircular D de raio r. Determine a relação que r e h devem satisfazer para que o centróide de $T \cup D$ caia dentro do triângulo.

Projetos de aplicação de tecnologia

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Usando somas de Riemann para estimar áreas, volumes e comprimentos de curvas

Visualize e aproxime áreas e volumes nas **partes I e II** (volumes de revolução) e na **Parte III** (comprimentos de curvas).

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Modelando um salto de "bungee jump"

Colete dados (ou use dados previamente coletados) para construir e refinar um modelo para a força exercida por uma corda de *bungee jump* durante um salto. Use o teorema do trabalho-energia para calcular a distância da queda sofrida por dada pessoa para dado comprimento da corda.

7 Funções transcendentes e integrais

RESUMO Até agora, tratamos as funções exponenciais e logarítmicas de modo bem informal, apelando à intuição e aos gráficos para explicar algumas de suas características. Neste capítulo, faremos uma abordagem rigorosa das definições e propriedades dessas funções, e estudaremos ampla variedade de problemas práticos nos quais elas entram em jogo. Também introduziremos as funções hiperbólicas e suas inversas, com aplicações em integração, pára-quedismo, transporte de mercadorias e cabos suspensos.

7.1 O logaritmo definido como uma integral

No Capítulo 1, apresentamos a função logaritmo natural $\ln x$ como o inverso da função exponencial e^x. Consideramos e^x aquela função na família das funções exponenciais gerais a^x, $a > 0$ cujo gráfico tem coeficiente angular 1 quando cruza o eixo y. A função a^x, porém, foi apresentada intuitivamente, com base em seu gráfico em valores racionais de x.

Nesta seção, vamos rever a teoria das funções logarítmicas e exponenciais de uma perspectiva totalmente diferente. Agora, vamos definir essas funções analiticamente e identificar outra vez seu comportamento. Para tanto, começaremos usando o teorema fundamental do cálculo para definir a função logaritmo natural $\ln x$ como uma integral. Depois, apresentaremos rapidamente suas propriedades, incluindo as propriedades algébricas, geométricas e analíticas que já vimos. Em seguida, introduziremos a função e^x como a função inversa de $\ln x$ e determinaremos suas propriedades vistas anteriormente. Definir $\ln x$ como uma integral e e^x como sua inversa é uma abordagem indireta. Embora à primeira vista possa parecer estranho, isso vai nos proporcionar uma ferramenta poderosa e elegante para obter com precisão as propriedades mais importantes das funções logarítmicas e exponenciais.

Definição da função logaritmo natural

O logaritmo natural de um número positivo x, escrito na forma $\ln x$, é o valor de uma integral.

Definição A função logaritmo natural

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \qquad x > 0$$

Se $x > 1$, então $\ln x$ é a área sob a curva $y = 1/t$ de $t = 1$ a $t = x$ (Figura 7.1). Para $0 < x < 1$, $\ln x$ fornece o oposto da área sob a curva de x a 1. A função não é definida para $x \leq 0$. Em conseqüência da regra do intervalo de largura zero para integrais definidas, também temos que

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$$

TABELA 7.1 Valores típicos de $\ln x$ para duas casas decimais

x	$\ln x$
0	indefinido
0,05	−3,00
0,5	−0,69
1	0
2	0,69
3	1,10
4	1,39
10	2,30

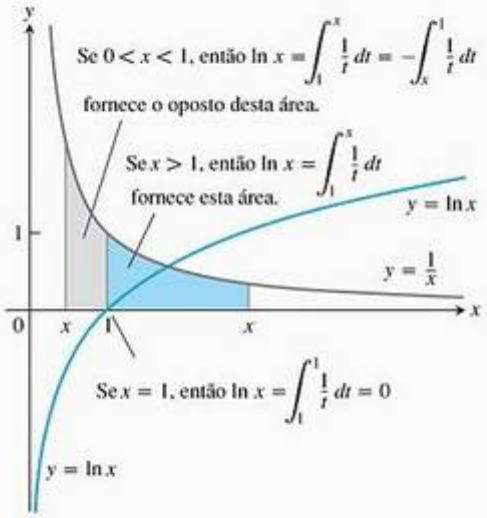


FIGURA 7.1 O gráfico de $y = \ln x$ e sua relação com a função $y = 1/x$, $x > 0$. O gráfico do logaritmo fica acima do eixo x à medida que x se desloca de 1 para a direita, e cai abaixo do eixo x à medida que x se desloca de 1 para a esquerda.

Note que apresentamos o gráfico de $y = 1/x$ na Figura 7.1, mas utilizamos $y = 1/t$ na integral. Utilizando x para tudo, escreveríamos

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx$$

com x significando duas coisas diferentes. Então, mudamos a variável de integração para t.

Usando retângulos para obter aproximações finitas da área sob a curva de $y = 1/t$ e ao longo do intervalo entre $t = 1$ e $t = x$, conforme vimos na Seção 5.1, podemos aproximar os valores da função $\ln x$. A Tabela 7.1 fornece vários desses valores. Existe um importante número cujo logaritmo natural é igual a 1.

Definição **O número e**

O número e é aquele número no domínio do logaritmo natural que satisfaz

$$\ln(e) = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1$$

Geometricamente, o número e corresponde ao ponto no eixo x para o qual a área sob a curva de $y = 1/t$ e acima do intervalo $[1, e]$ equivale à área da unidade quadrada. A área da região sombreada na Figura 7.1 é 1 unidade quadrada quando $x = e$. Veremos adiante que este é o mesmo número $e \approx 2{,}718281828$ que encontramos antes.

A derivada de $y = \ln x$

Pela primeira parte do teorema fundamental do cálculo (Seção 5.4),

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

Para qualquer valor positivo de x, temos

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Portanto, a função $y = \ln x$ é uma solução para o problema de valor inicial $dy/dx = 1/x$, $x > 0$, com $y(1) = 0$. Observe que, como a derivada é sempre positiva, o logaritmo natural é uma função crescente; logo, é injetora e tem uma inversa.

Se u é uma função derivável de x cujos valores são positivos, de maneira que $\ln u$ seja definida, então, aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \qquad u > 0 \tag{2}$$

Se a Equação (2) for aplicada à função $u = bx$, onde b é qualquer constante com $bx > 0$, obteremos

$$\frac{d}{dx}\ln bx = \frac{1}{bx}\cdot\frac{d}{dx}(bx) = \frac{1}{bx}(b) = \frac{1}{x}$$

Em particular, se $b = -1$ e $x < 0$,

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{x}$$

Uma vez que $|x| = x$ quando $x > 0$, e $|x| = -x$ quando $x < 0$, a equação anterior combinada com a Equação (1) nos leva a este importante resultado

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0 \tag{3}$$

O gráfico e a imagem de $\ln x$

A derivada $d(\ln x)/dx = 1/x$ é positiva para $x > 0$, logo $\ln x$ é uma função crescente de x. A segunda derivada, $-1/x^2$, é negativa, logo o gráfico de $\ln x$ é côncavo para baixo.

A função $\ln x$ tem as seguintes propriedades algébricas:

1. $\ln bx = \ln b + \ln x$
2. $\ln \frac{b}{x} = \ln b - \ln x$
3. $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
4. $\ln x^r = r \ln x$, sendo r qualquer número racional

Essas propriedades são decorrentes da Equação (2) e o teorema do valor médio para derivadas, conforme visto na Seção 4.2. A propriedade (4) permanece válida para qualquer número real r, conforme veremos logo mais.

Podemos estimar o valor de ln 2 considerando a área sob a curva de $y = 1/x$ e acima do intervalo $[1, 2]$. Na Figura 7.2, um retângulo de altura 1/2 ao longo do intervalo $[1, 2]$ cabe embaixo da curva. Portanto, a área sob a curva, que é ln 2, é maior que a área, 1/2, do retângulo. Assim, $\ln 2 > 1/2$. Sabendo disso, temos

$$\ln 2^n = n \ln 2 > n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}$$

Esse resultado mostra que $\ln(2^n) \to \infty$ quando $n \to \infty$. Como $\ln x$ é uma função crescente, temos que

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$$

Temos também

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{t \to \infty} \ln t^{-1} = \lim_{t \to \infty} (-\ln t) = -\infty \qquad x = 1/t = t^{-1}$$

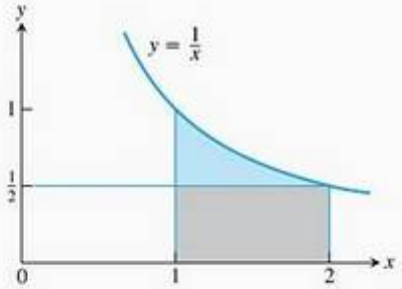


FIGURA 7.2 O retângulo de altura $y = 1/2$ cabe embaixo da curva de $y = 1/x$ no intervalo $1 \le x \le 2$.

Definimos $\ln x$ para $x > 0$, logo o domínio de $\ln x$ é o conjunto de números reais positivos. A discussão anterior e o teorema do valor intermediário mostram que sua imagem é a reta real inteira, o que leva ao gráfico de $y = \ln x$ mostrado na Figura 7.1.

A integral $\int (1/u)\, du$

A Equação (3) leva à seguinte fórmula integral:

Se u é uma função derivável nunca igual a zero,

$$\int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C \qquad (4)$$

A Equação (4) se aplica a qualquer parte do domínio de $1/u$, os pontos onde $u \neq 0$.

Sabemos que

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1 \text{ e racional}$$

A Equação (4) diz o que fazer quando n é igual a -1. Ela nos diz que as integrais que têm certa *forma* conduzem a logaritmos. Se $u = f(x)$, então $du = f'(x)\, dx$ e

$$\int \frac{1}{u}\, du = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

Então a Equação (4) leva a

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

toda vez que $f(x)$ for uma função derivável que mantenha sinal constante ao longo de seu domínio.

EXEMPLO 1 Aplicando a Equação (4)

(a) $$\int_0^2 \frac{2x}{x^2-5}\,dx = \int_{-5}^{-1} \frac{du}{u} = \ln|u|\Big]_{-5}^{-1} \qquad u = x^2-5,\quad du = 2x\,dx,\quad u(0) = -5,\quad u(2) = -1$$

$$= \ln|-1| - \ln|-5| = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5$$

(b) $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4\cos\theta}{3+2\,\text{sen}\,\theta}\,d\theta = \int_1^5 \frac{2}{u}\,du \qquad u = 3+2\,\text{sen}\,\theta,\quad du = 2\cos\theta\,d\theta,\quad u(-\pi/2) = 1,\quad u(\pi/2) = 5$$

$$= 2\ln|u|\Big]_1^5$$

$$= 2\ln|5| - 2\ln|1| = 2\ln 5$$

Observe que $u = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta$ é sempre positiva em $[-\pi/2, \pi/2]$, portanto a Equação (4) se aplica.

A inversa de ln x e o número e

A função $\ln x$, por ser uma função crescente de x com domínio $(0, \infty)$ e imagem $(-\infty, \infty)$, possui uma inversa $\ln^{-1} x$ com domínio $(-\infty, \infty)$ e imagem $(0, \infty)$. O gráfico de $\ln^{-1} x$ é o gráfico de $\ln x$ refletido na reta $y = x$. Como você pode observar na Figura 7.3,

$$\lim_{x\to\infty} \ln^{-1} x = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} \ln^{-1} x = 0$$

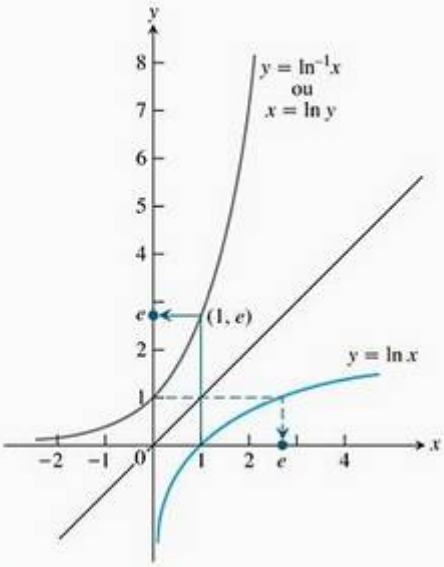


FIGURA 7.3 Os gráficos de $y = \ln x$ e $y = \ln^{-1} x = \exp x$. O número e é $\ln^{-1} 1 = \exp(1)$.

A função $\ln^{-1} x$ também é indicada por $\exp x$. Mostraremos agora que $\ln^{-1} x = \exp x$ é uma função exponencial de base e.

O número e satisfaz a equação $\ln(e) = 1$, logo $e = \ln^{-1}(1) = \exp(1)$. No Teorema 6 da Seção 3.7, já havíamos expressado e como um limite.

Podemos elevar o número e a um expoente racional x da maneira habitual:

$$e^2 = e \cdot e, \quad e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \quad e^{1/2} = \sqrt{e}$$

e assim por diante. Uma vez que e é positivo, e^r é positivo também. Dessa forma, e^r possui um logaritmo. Quando tomamos o logaritmo, vemos que

$$\ln e^r = r \ln e = r \cdot 1 = r$$

Uma vez que $\ln x$ é injetora e $\ln(\ln^{-1} r) = r$, essa equação nos diz que

$$e^r = \ln^{-1} r = \exp r \qquad \text{para } r \text{ racional.} \tag{5}$$

Ainda não descobrimos uma maneira de dar um significado óbvio a e^x quando x é irracional. Mas $\ln^{-1} x$ tem significado para qualquer x, racional ou irracional. Assim, a Equação (5) oferece um modo de estender a definição de e^x a valores irracionais de x. A função $\ln^{-1} x$ é definida para qualquer x, então podemos utilizá-la para atribuir um valor a e^x em qualquer ponto no qual e^x não possua definição prévia.

Valores típicos de e^x

x	e^x (arredondado)
−1	0,37
0	1
1	2,72
2	7,39
10	22,026
100	$2{,}6881 \times 10^{43}$

Definição A função exponencial natural
Para qualquer número real x, $e^x = \ln^{-1} x = \exp x$

Pela primeira vez, temos um significado preciso para um expoente irracional. Normalmente, a função exponencial é indicada por e^x e não por $\exp x$. Uma vez que $\ln x$ e e^x são inversas uma da outra, temos que

Equações inversas para e^x e $\ln x$

$$e^{\ln x} = x \qquad \text{(para qualquer } x > 0\text{)}$$
$$\ln(e^x) = x \qquad \text{(para qualquer } x\text{)}$$

Números e funções transcendentes

Números que são soluções de equações polinomiais com coeficientes racionais são denominados **algébricos**: -2 é algébrico porque satisfaz a equação $x + 2 = 0$ e $\sqrt{3}$ é algébrico porque satisfaz a equação $x^2 - 3 = 0$. Números que não são algébricos são denominados **transcendentes**, como e e π. Em 1873, Charles Hermite provou a transcendência de e no sentido que descrevemos. Em 1882, C. L. F. Lindemann demonstrou a transcendência de π.

Hoje, dizemos que uma função $y = f(x)$ é algébrica se ela satisfaz uma equação do tipo

$$P_n y^n + \quad + P_1 y + P_0 = 0$$

na qual os P's são polinômios em x com coeficientes racionais. A função $\log_b x = \dfrac{\ln a}{\ln b}$ é algébrica porque satisfaz a equação $(x + 1)y^2 - 1 = 0$. Aqui os polinômios são $P_2 = x + 1$, $P_1 = 0$ e $P_0 = -1$. Funções não algébricas são denominadas transcendentes.

A derivada e a integral de e^x

A função exponencial é derivável, uma vez que é a inversa de uma função derivável cuja derivada nunca é zero. Calcularemos sua derivada usando o Teorema 5 da Seção 3.7 e nosso conhecimento da derivada de $\ln x$. Seja

$$f(x) = \ln x \qquad \text{e} \qquad y = e^x = \ln^{-1} x = f^{-1}(x)$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) &= \frac{d}{dx}\ln^{-1} x \\
&= \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \\
&= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Teorema 5, Seção 3.7} \\
&= \frac{1}{f'(e^x)} && f^{-1}(x) = e^x \\
&= \frac{1}{\left(\dfrac{1}{e^x}\right)} && f'(z) = \frac{1}{z} \text{ com } z = e^x \\
&= e^x
\end{aligned}$$

Isto é, para $y = e^x$, descobrimos que $dy/dx = e^x$, portanto a função exponencial natural e^x é a própria derivada. Na próxima seção, veremos que as únicas funções que se comportam dessa maneira são múltiplos constantes de e^x. A regra da cadeia amplia esse resultado da maneira habitual para uma forma mais geral.

Se u é qualquer função derivável de x, então

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} \tag{6}$$

Como $e^x > 0$, sua derivada também é positiva em qualquer ponto, portanto é uma função crescente e contínua para qualquer x, tendo limites

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

Conseqüentemente, o eixo x ($y = 0$) é uma assíntota horizontal do gráfico $y = e^x$.

A integral equivalente à Equação (6) é

$$\int e^u \, du = e^u + C$$

Se $f(x) = e^x$, então, a partir da Equação (6), temos que $f'(0) = e^0 = 1$. Isto é, a função exponencial $e^x = \exp x = \ln^{-1} x$ tem coeficiente angular 1 quando cruza o eixo y em $x = 0$. Isso está de acordo com o que dissemos sobre a exponencial natural na Seção 3.1.

EXEMPLO 2 Resolvendo um problema de valor inicial

Resolva o problema de valor inicial

$$e^y \frac{dy}{dx} = 2x, \qquad x > \sqrt{3}; \qquad y(2) = 0$$

SOLUÇÃO Integramos ambos os lados da equação diferencial em relação a x para obter

$$e^y = x^2 + C$$

Utilizamos a condição inicial $y(2) = 0$ para determinar C:

$$\begin{aligned} C &= e^0 - (2)^2 \\ &= 1 - 4 = -3 \end{aligned}$$

Isso completa a fórmula para e^y:

$$e^y = x^2 - 3$$

Para determinar y, tomamos o logaritmo de ambos os lados:

$$\begin{aligned} \ln e^y &= \ln (x^2 - 3) \\ y &= \ln (x^2 - 3) \end{aligned}$$

Observe que a solução é válida para $x > \sqrt{3}$.

Vamos tirar a prova da solução na equação original.

$$\begin{aligned} e^y \frac{dy}{dx} &= e^y \frac{d}{dx} \ln (x^2 - 3) \\ &= e^y \frac{2x}{x^2 - 3} && \text{Derivada de } \ln (x^2 - 3) \\ &= e^{\ln (x^2 - 3)} \frac{2x}{x^2 - 3} && y = \ln (x^2 - 3) \\ &= (x^2 - 3) \frac{2x}{x^2 - 3} && e^{\ln z} = z \\ &= 2x \end{aligned}$$

A solução confere.

Leis dos expoentes

Muito embora e^x seja definida como $\ln^{-1} x$ de uma maneira aparentemente tortuosa, ela obedece às leis algébricas dos expoentes. O Teorema 1 nos mostra que essas leis são conseqüência das definições de $\ln x$ e e^x.

Teorema 1 **Leis dos expoentes para e^x**
Para todos os números x, x_1 e x_2, a exponencial natural e^x obedece às seguintes leis:

1. $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$
2. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
3. $\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$
4. $(e^{x_1})^r = e^{rx_1}$, se r é racional

PROVA DA LEI 4 Seja

$$y_1 = (e^{x_1})^r \tag{7}$$

Então

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln (e^{x_1})^r \\ &= r \ln (e^{x_1}) && \text{Regra do produto para logaritmos.} \\ &= rx_1 && \ln e^u = u \end{aligned}$$

Logo

$$y = e^{xr_1} \qquad \text{Propriedade da inversa.}$$

As leis 2 e 3 são conseqüência da Lei 1, que foi provada na Seção 4.2. A Lei 4 é, na verdade, válida para qualquer número real r. Esse fato é uma conseqüência da propriedade da completude do sistema de números reais, estabelecida informalmente no Apêndice 4.A. A prova pode ser encontrada em livros mais avançados.

A função exponencial geral a^x

Uma vez que $a = e^{\ln a}$ para qualquer número positivo a, podemos pensar em a^x como $(e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$. Estabelecemos, assim, a seguinte definição.

Definição Funções exponenciais gerais
Para quaisquer números reais $a > 0$ e x, a função exponencial com base a é

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Quando $a = e$, a definição leva a $a^x = e^{x \ln a} = e^{x \ln e} = e^{x \cdot 1} = e^x$

O Teorema 1 também é válido para a^x, a função exponencial de base a. Por exemplo,

$$\begin{aligned} a^{x_1} \cdot a^{x_2} &= e^{x_1 \ln a} \cdot e^{x_2 \ln a} && \text{Definição de } a^x. \\ &= e^{x_1 \ln a + x_2 \ln a} && \text{Lei 1} \\ &= e^{(x_1+x_2)\ln a} && \text{Fatore } \ln a. \\ &= a^{x_1+x_2}. && \text{Definição de } a^x. \end{aligned}$$

Podemos agora definir x^n para qualquer $x > 0$ e qualquer número real n quando $x^n = e^{n \ln x}$. Portanto, o n da equação $\ln x^n = n \ln x$ não precisa mais ser racional — pode ser qualquer número, desde que $x > 0$:

$$\ln x^n = (\ln \ e^{n \ln x}) = n \ln x \qquad \ln e^u = u, \text{ qualquer } u$$

Juntas, a lei $a^x/a^y = a^{x-y}$ e a definição $x^n = e^{n \ln x}$ permitem estabelecer novamente a regra da potenciação para derivação em sua forma final, válida para quaisquer expoentes reais r:

$$\frac{d}{dx} x^r = \frac{d}{dx} e^{r \ln x} = (e^{r \ln x}) \frac{d}{dx}(r \ln x) = x^r \cdot \frac{r}{x} = rx^{r-1}$$

Começando com a definição $a^x = e^{x \ln a}$, $a > 0$, temos a derivada

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = (\ln a) e^{x \ln a} = (\ln a) a^x$$

portanto

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

Alternativamente, obtemos a mesma regra da derivada aplicando derivação logarítmica:

$$\begin{aligned} y &= a^x \\ \ln y &= x \ln a && \text{Tomando logaritmos.} \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \ln a && \text{Derivando em relação a } x. \\ \frac{dy}{dx} &= y \ln a = a^x \ln a \end{aligned}$$

Obtemos uma forma mais geral aplicando a regra da cadeia.

Se $a > 0$ e u é uma função derivável de x, então a^u é uma função derivável de x e

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

A integral equivalente a esse último resultado é

$$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

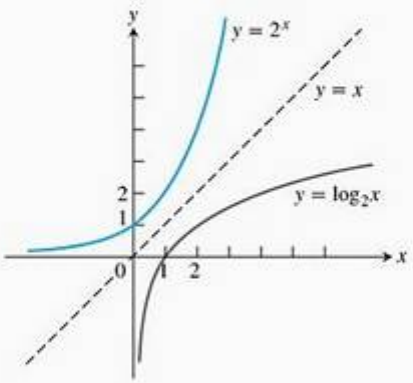


FIGURA 7.4 O gráfico de 2^x e sua inversa, $\log_2 x$.

Logaritmos com base a

Se a é qualquer número positivo diferente de 1, a função a^x é injetora e tem uma derivada não nula em qualquer ponto. Tem, portanto, uma inversa derivável. Chamamos essa inversa de **logaritmo de x com base a** e a indicamos por $\log_a x$.

Definição $\log_a x$
Para qualquer número positivo $a \neq 1$,

$$\log_a x \text{ é a função inversa de } a^x.$$

O gráfico de $y = \log_a x$ pode ser obtido refletindo-se o gráfico de $y = a^x$ na reta a 45° $y = x$ (Figura 7.4). Quando $a = e$, temos $\log_e x$ = inversa de $e^x = \ln x$. Como as funções a^x e $\log_a x$ são inversas uma da outra, compô-las em qualquer ordem resulta na função identidade.

Equações inversas para a^x e $\log_a x$

$$a^{\log_a x} = x \qquad (x > 0)$$

$$\log_a (a^x) = x \qquad (\text{qualquer } x)$$

TABELA 7.2 Regras para logaritmos de base a

Para quaisquer números $x > 0$ e $y > 0$,

1. *Regra do produto:*
   $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. *Regra do quociente:*
   $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3. *Regra da recíproca:*
   $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$
4. *Regra da potenciação:*
   $\log_a x^y = y \log_a x$

A função $\log_a x$ é, na verdade, apenas um múltiplo numérico de $\ln x$. Para perceber isso, vamos supor $y = \log_a x$ e, em seguida, tomar o logaritmo natural de ambos os lados da equação equivalente $a^y = x$, obtendo assim $y \ln a = \ln x$. Determinando y na equação, temos

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

A partir disso, percebemos facilmente que as regras aritméticas satisfeitas por $\log_a x$ são iguais às satisfeitas por $\ln x$. Tais regras, dadas na Tabela 7.2, podem ser provadas se dividirmos as regras correspondentes para a função logaritmo natural por $\ln a$. Por exemplo,

$$\ln xy = \ln x + \ln y \qquad \text{Regra 1 para logaritmos naturais...}$$

$$\frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} \qquad \text{... dividida por } \ln a\text{...}$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \text{... leva à Regra 1 para logaritmos de base } a.$$

Derivadas e integrais envolvendo $\log_a x$

Para determinar derivadas ou integrais envolvendo logaritmos de base a, temos de convertê-los em um logaritmo natural. Se u é uma função positiva derivável de x, então

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

EXEMPLO 3

(a) $$\frac{d}{dx}\log_{10}(3x+1) = \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{3x+1}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{(\ln 10)(3x+1)}$$

(b) $$\int \frac{\log_2 x}{x}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int u\,du \qquad u = \ln x,\quad du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{\ln 2}\frac{(\ln x)^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2\ln 2} + C$$

Resumo

Nesta seção, usamos o cálculo para dar definições precisas das funções logarítmicas e exponenciais. Essa abordagem é um pouco diferente do tratamento que demos anteriormente às funções trigonométricas, racionais e polinomiais. Antes, primeiro, definíamos a função e, depois, estudávamos suas derivadas e integrais. Aqui, começamos com uma integral e, a partir dela, as funções de interesse foram obtidas. A intenção dessa abordagem foi evitar dificuldades matemáticas que surgem quando tentamos definir funções do tipo a^x para qualquer número real x, racional ou irracional. Definindo $\ln x$ como a integral da função $1/t$ de $t = 1$ a $t = x$, podemos seguir em frente e definir todas as funções exponenciais e logarítmicas, derivando depois todas as suas principais propriedades analíticas e algébricas.

Exercícios 7.1

Integração

Calcule as integrais dos exercícios 1–46.

1. $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x}$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{3\,dx}{3x-2}$
3. $\displaystyle\int \frac{2y\,dy}{y^2-25}$
4. $\displaystyle\int \frac{8r\,dr}{4r^2-5}$
5. $\displaystyle\int \frac{3\sec^2 t}{6+3\operatorname{tg} t}\,dt$
6. $\displaystyle\int \frac{\sec y \operatorname{tg} y}{2+\sec y}\,dy$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+2x}$
8. $\displaystyle\int \frac{\sec x\,dx}{\sqrt{\ln(\sec x + \operatorname{tg} x)}}$
9. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\,dx$
10. $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} e^{-x}\,dx$
11. $\displaystyle\int 8e^{(x+1)}\,dx$
12. $\displaystyle\int 2e^{(2x-1)}\,dx$
13. $\displaystyle\int_{\ln 4}^{\ln 9} e^{x/2}\,dx$
14. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 16} e^{x/4}\,dx$
15. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\,dr$
16. $\displaystyle\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\,dr$
17. $\displaystyle\int 2t\,e^{-t^2}\,dt$
18. $\displaystyle\int t^3 e^{(t^4)}\,dt$
19. $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,dx$
21. $\displaystyle\int e^{\sec \pi t}\sec \pi t \operatorname{tg} \pi t\,dt$
22. $\displaystyle\int e^{\operatorname{csc}(\pi+t)}\operatorname{cosec}(\pi+t)\operatorname{cotg}(\pi+t)\,dt$
23. $\displaystyle\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)} 2e^v \cos e^v\,dv$
24. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\ln \pi}} 2xe^{x^2}\cos(e^{x^2})\,dx$
25. $\displaystyle\int \frac{e^r}{1+e^r}\,dr$
26. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$
27. $\displaystyle\int_{0}^{1} 2^{-\theta}\,d\theta$
28. $\displaystyle\int_{-2}^{0} 5^{-\theta}\,d\theta$
29. $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{2}} x2^{(x^2)}\,dx$
30. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
31. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} 7^{\cos t}\operatorname{sen} t\,dt$
32. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\operatorname{tg} t}\sec^2 t\,dt$
33. $\displaystyle\int_{2}^{4} x^{2x}(1+\ln x)\,dx$
34. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{2^{\ln x}}{x}\,dx$
35. $\displaystyle\int_{0}^{3} (\sqrt{2}+1)x^{\sqrt{2}}\,dx$
36. $\displaystyle\int_{1}^{e} x^{(\ln 2)-1}\,dx$

37. $\int \frac{\log_{10} x}{x}\,dx$

38. $\int_1^4 \frac{\log_2 x}{x}\,dx$

39. $\int_1^4 \frac{\ln 2 \log_2 x}{x}\,dx$

40. $\int_1^e \frac{2 \ln 10 \log_{10} x}{x}\,dx$

41. $\int_0^2 \frac{\log_2 (x+2)}{x+2}\,dx$

42. $\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(10x)}{x}\,dx$

43. $\int_0^9 \frac{2 \log_{10}(x+1)}{x+1}\,dx$

44. $\int_2^3 \frac{2 \log_2 (x-1)}{x-1}\,dx$

45. $\int \frac{dx}{x \log_{10} x}$

46. $\int \frac{dx}{x(\log_8 x)^2}$

Problemas de valor inicial

Resolva os problemas de valor inicial dos exercícios 47–52.

47. $\frac{dy}{dt} = e^t \operatorname{sen}(e^t - 2), \quad y(\ln 2) = 0$

48. $\frac{dy}{dt} = e^{-t} \sec^2(\pi e^{-t}), \quad y(\ln 4) = 2/\pi$

49. $\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^{-x}, \quad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 0$

50. $\frac{d^2y}{dt^2} = 1 - e^{2t}, \quad y(1) = -1 \quad \text{e} \quad y'(1) = 0$

51. $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x}, \quad y(1) = 3$

52. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x, \quad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1$

Teoria e aplicações

53. A região entre a curva $y = 1/x^2$ e o eixo x de $x = 1/2$ a $x = 2$ é girada em torno do eixo y, gerando um sólido. Determine o volume do sólido.

54. No Exercício 6 da Seção 6.2, giramos em torno do eixo y a região entre a curva $y = 9x/\sqrt{x^3+9}$ e o eixo x de $x = 0$ a $x = 3$ para gerar um sólido de volume 36π. Qual volume teremos se agora girarmos a região em volta do eixo x? (Veja o gráfico no exercício mencionado.)

Nos exercícios 55 e 56, determine o comprimento das curvas.

55. $y = (x^2/8) - \ln x, \quad 4 \le x \le 8$

56. $x = (y/4)^2 - 2\ln(y/4), \quad 4 \le y \le 12$

57. **A linearização de $\ln(1+x)$ em $x = 0$** Em vez de aproximar $\ln x$ em $x = 1$, aproximamos $\ln(1+x)$ em $x = 0$. Obtemos uma fórmula mais simples dessa maneira.

T

(a) Deduza a linearização $\ln(1+x) \approx x$ quando $x = 0$.

(b) Estime com 5 casas decimais o erro envolvido na substituição de $\ln(1+x)$ por x no intervalo $[0; 0{,}1]$.

(c) Trace o gráfico de $\ln(1+x)$ e x juntos para $0 \le x \le 0{,}5$, utilizando cores diferentes, se possível. Em que pontos a aproximação de $\ln(1+x)$ parece melhor? E pior? Lendo as coordenadas do gráfico, determine o melhor limite superior para o erro que sua calculadora permitir.

58. **A linearização de e^x quando $x = 0$**

T

(a) Deduza a aproximação linear $e^x \approx 1 + x$ em $x = 0$.

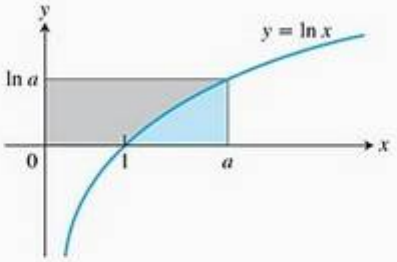
(b) Estime com 5 casas decimais a magnitude do erro envolvido na substituição de e^x por $1 + x$ ao longo do intervalo $[0; 0{,}2]$.

(c) Faça os gráficos de e^x e $1 + x$ juntos para $-2 \le x \le 2$, utilizando cores diferentes, se possível. Em que intervalos a aproximação parece superestimar e^x? E subestimar e^x?

59. Demonstre que, para qualquer número $a > 1$,

$$\int_1^a \ln x\,dx + \int_0^{\ln a} e^y\,dy = a \ln a$$

(Veja a figura a seguir.)

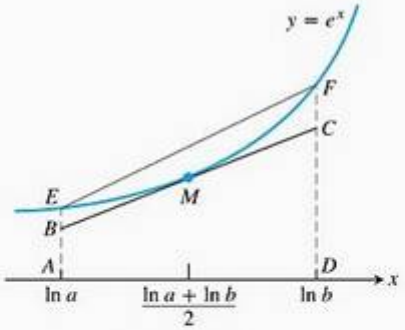


60. **A desigualdade satisfeita pelas médias geométrica, logarítmica e aritmética**

(a) Demonstre que o gráfico de e^x é côncavo para cima em qualquer intervalo de valores de x.

(b) Demonstre, em relação à figura a seguir, que, se $0 < a < b$, então

$$e^{(\ln a + \ln b)/2} \cdot (\ln b - \ln a) < \int_{\ln a}^{\ln b} e^x\,dx < \frac{e^{\ln a} + e^{\ln b}}{2} \cdot (\ln b - \ln a)$$



FORA DE ESCALA

(c) Utilize a desigualdade do item (b) para concluir que

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$$

Essa desigualdade diz que a média geométrica de dois números positivos é menor do que a média logarítmica deles, que, por sua vez, é menor que a média aritmética.

(Para saber mais sobre essa desigualdade, veja Frank Burk, "The geometric, logarithmic, and arithmetic mean inequality", *American Mathematical Monthly*, v. 94, n. 6, jun./jul. 1987, p. 527-528.)

Construindo gráficos

61. Faça juntos os gráficos de $\ln x$, $\ln 2x$, $\ln 4x$, $\ln 8x$ e $\ln 16x$ (quantos você puder) para $0 < x \leq 10$. O que está acontecendo? Explique.

62. Faça o gráfico de $y = \ln |\text{sen } x|$ na janela $0 \leq x \leq 22$, $-2 \leq y \leq 0$. Explique o que você vê. Como você mudaria a fórmula para que os arcos ficassem virados para baixo?

63. **(a)** Faça juntos o gráfico de $y = \text{sen } x$ e as curvas $y = \ln (a + \text{sen } x)$ para $a = 2, 4, 8, 20$ e 50 e $0 \leq x \leq 23$.

(b) Por que as curvas se achatam à medida que a aumenta? (*Dica*: Encontre um limite superior dependente de a para $|y'|$.)

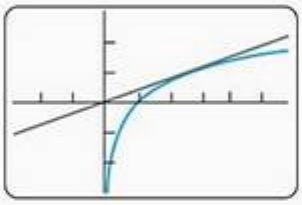
64. O gráfico de $y = \sqrt{x} - \ln x$, $x > 0$, tem um ponto de inflexão? Tente responder a essa pergunta **(a)** fazendo um gráfico, **(b)** usando cálculo.

65. T A equação $x^2 = 2^x$ apresenta três soluções: $x = 2$, $x = 4$ e uma terceira. Determine essa solução graficamente do modo mais preciso possível.

66. T Existe a possibilidade de $x^{\ln 2}$ ser igual a $2^{\ln x}$ para $x > 0$? Trace as duas funções e descreva o que você observou.

67. **Qual é maior: π^e ou e^π?** T As calculadoras diminuíram o mistério dessa questão, que já foi desafiadora. (Continue e verifique: você verá que eles estão surpreendentemente próximos.) Você também pode responder à pergunta sem usar uma calculadora.

(a) Encontre uma equação para a reta que passa pela origem e é tangente ao gráfico de $y = \ln x$.



[−3, 6] por [−3, 3]

(b) Cite um argumento, baseado nos gráficos de $y = \ln x$ e da reta tangente, para explicar por que $\ln x < x/e$ para qualquer positivo $x \neq e$.

(c) Mostre que $\ln (x^e) < x$ para qualquer valor positivo $x \neq e$.

(d) Mostre que $x^e < e^x$ para qualquer valor positivo $x \neq e$.

(e) Então, qual é maior: π^e ou e^π?

68. **Uma representação decimal de e** T Determine e para o máximo de casas decimais que sua calculadora permitir, resolvendo a equação $\ln x = 1$ pelo método de Newton, visto na Seção 4.7.

Cálculos com outras bases

69. T A maioria das calculadoras científicas tem teclas para $\log_{10} x$ e $\ln x$. Para determinar logaritmos com outras bases, usamos a equação $\log_a x = (\ln x)/(\ln a)$. Determine os seguintes logaritmos com cinco casas decimais.

(a) $\log_3 8$ **(b)** $\log_7 0{,}5$

(c) $\log_{20} 17$ **(d)** $\log_{0,5} 7$

(e) $\ln x$, dado que $\log_{10} x = 2{,}3$

(f) $\ln x$, dado que $\log_2 x = 1{,}4$

(g) $\ln x$, dado que $\log_2 x = -1{,}5$

(h) $\ln x$, dado que $\log_{10} x = -0{,}7$

70. **Fatores de conversão**

(a) Mostre que a equação para converter logaritmos de base 10 em logaritmos de base 2 é

$$\log_2 x = \frac{\ln 10}{\ln 2} \log_{10} x$$

(b) Mostre que a equação para converter logaritmos de base a em logaritmos de base b é

$$\log_b x = \frac{\ln a}{\ln b} \log_a x$$

7.2 Crescimento e decaimento exponencial

Funções exponenciais crescem ou decrescem muito rapidamente à medida que a variável independente varia. Elas servem para descrever o crescimento ou decaimento em ampla gama de situações, tanto naturais quanto geradas pela ação humana. Em parte, a importância de tais funções está na variedade de modelos que se baseiam nelas.

A lei da variação exponencial

Ao modelar muitas situações do mundo real, vemos que uma quantidade y cresce ou decresce a uma taxa proporcional a seu tamanho em dado momento t. Exemplos de tais quantidades incluem a quantidade de um material radioativo em decaimento, os juros pagos por um investimento bancário, o tamanho de uma população e a diferença de temperatura entre uma xícara de café quente e o ambiente onde ela está. Essas quantidades mudam de acordo com a *lei da variação exponencial*, à qual vamos chegar nesta seção.

Se a quantidade presente no instante $t = 0$ é chamada y_0, então podemos determinar y em função de t resolvendo o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} &\text{Equação diferencial:} && \frac{dy}{dt} = ky \\ &\text{Condição inicial:} && y = y_0 \quad \text{quando } t = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Se y é positiva e crescente, então k é positiva, e usamos a Equação (1) para dizer que a taxa de crescimento é proporcional àquilo que já foi acumulado. Se y é positiva e decrescente, então k é negativa, e usamos a Equação (1) para dizer que a taxa de decaimento é proporcional à quantidade ainda restante.

Percebemos de imediato que a função constante $y = 0$ é a solução da Equação (1) se $y_0 = 0$. Para achar soluções diferentes de zero, dividimos a Equação (1) por y:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} &= k \\ \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\,dt &= \int k\,dt && \text{Integre em relação a } t; \\ \ln|y| &= kt + C && \textstyle\int (1/u)\,du = \ln|u| + C. \\ |y| &= e^{kt+C} && \text{Faça a exponenciação.} \\ |y| &= e^C \cdot e^{kt} && e^{a+b} = e^a \cdot e^b \\ y &= \pm e^C e^{kt} && \text{Se } |y| = r, \text{ então } y = \pm r. \\ y &= Ae^{kt} && A \text{ é um nome mais curto para } \pm e^C. \end{aligned}$$

Ao permitir que A assuma o valor 0 junto com todos os possíveis valores $\pm e^C$, podemos incluir a solução $y = 0$ na fórmula.

Determinamos o valor de A para o problema de valor inicial calculando A quando $y = y_0$ e $t = 0$:

$$y_0 = Ae^{k \cdot 0} = A$$

A solução do problema de valor inicial é, portanto, $y = y_0e^{kt}$.

Quando as quantidades variam dessa maneira, dizemos que elas estão em processo de **crescimento exponencial**, se $k > 0$, ou de **decaimento exponencial**, se $k < 0$.

A lei da variação exponencial

$$y = y_0e^{kt} \tag{2}$$

Crescimento: $k > 0$ Decaimento: $k < 0$

O número k é a **constante de taxa** da equação.

O raciocínio que nos leva à Equação (2) mostra que apenas funções que sejam as próprias derivadas podem ser múltiplos constantes da função exponencial.

Crescimento ilimitado da população

Estritamente falando, o número de indivíduos em uma população (de pessoas, plantas, raposas ou bactérias, por exemplo) é uma função descontínua do tempo, pois assume apenas valores inteiros. No entanto, quando o número de indivíduos atinge determinado nível, a população pode ser aproximada por uma função contínua. A diferenciabilidade (derivabilidade) da função de aproximação é outra hipótese razoável em muitas situações, permitindo assim o uso do cálculo para modelar e prever tamanhos de população.

Se supomos que a proporção de indivíduos capazes de se reproduzir permanece constante e supomos também uma fertilidade constante, então, em qualquer instante t, a taxa de nascimentos será proporcional ao número $y(t)$ de indivíduos. Vamos supor, também, que a taxa de mortes seja estável e proporcional a $y(t)$. Se, além disso, desconsiderarmos saídas e chegadas de indivíduos, a taxa de crescimento dy/dt será a taxa de nascimentos menos a taxa de mortes — ou seja, a diferença entre as duas proporcionalidades que pressupusemos. Em outras palavras, $dy/dt = ky$, de modo que $y = y_0e^{kt}$, onde y_0 é o tamanho da população no instante $t = 0$. Como acontece com todos os tipos de crescimento, pode haver limitações impostas pelo ambiente ao redor, mas não vamos tratar disso aqui. (Essa situação será analisada na Seção 9.5.)

No exemplo a seguir, pressupomos esse modelo populacional para examinar como o número de indivíduos afetados por uma doença dentro de dada população diminui à medida que a doença é adequadamente tratada.

EXEMPLO 1 Reduzindo o número de casos de uma doença infecciosa

É possível modelar a maneira como uma doença desaparece quando tratada adequadamente assumindo que a taxa dy/dt, à qual o número de pessoas infectadas se altera, é proporcional ao número y. O número de pessoas curadas é proporcional ao número daquelas que contraem a doença. Suponha que, no curso de um ano qualquer, o número de casos de uma doença seja reduzido em 20%. Se existem 10.000 casos hoje, quantos anos serão necessários para que esse número seja reduzido a 1.000?

SOLUÇÃO Usaremos a equação $y = y_0e^{kt}$. Temos, então, de achar três coisas: o valor de y_0, o valor de k e o instante t em que $y = 1.000$.

O valor de y_0. Temos a liberdade de contar o tempo a partir de onde quisermos. Se contarmos a partir de hoje, então $y = 10.000$ quando $t = 0$, logo $y_0 = 10.000$. Assim, nossa equação será

$$y = 10.000e^{kt} \tag{3}$$

O valor de k. Quando $t = 1$ ano, o número de casos será 80% de seu valor presente, ou 8.000. Desse modo,

$$\begin{aligned} 8.000 &= 10.000e^{k(1)} && \text{Equação (3) com } t = 1 \text{ e } y = 8.000 \\ e^k &= 0{,}8 \\ \ln\,(e^k) &= \ln 0{,}8 && \text{Logaritmos de ambos.} \\ k &= \ln 0{,}8 < 0 \end{aligned}$$

Em qualquer dado instante t,

$$y = 10.000e^{(\ln 0{,}8)t} \tag{4}$$

O valor de t que torna $y = 1.000$. Estabelecemos que y é igual a 1.000 na Equação (4) e determinamos t:

$$\begin{aligned} 1.000 &= 10.000\,e^{(\ln 0{,}8)t} \\ e^{(\ln 0{,}8)t} &= 0{,}1 \\ (\ln 0{,}8)t &= \ln 0{,}1 && \text{Logaritmos de ambos os lados.} \\ t &= \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \approx 10{,}32 \text{ anos} \end{aligned}$$

Levará pouco mais de dez anos para reduzir o número de casos a 1.000.

Juros compostos continuamente

Se você investe uma quantia A_0 a uma taxa de juros anuais fixa r (expressa como um decimal) e se os juros são depositados na sua conta k vezes por ano, a fórmula para a quantia que você terá no fim de t anos é

$$A_t = A_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} \tag{5}$$

Os juros podem ser depositados ("compostos", como dizem os economistas) mensalmente ($k = 12$), semanalmente ($k = 52$), diariamente ($k = 365$), ou, com mais freqüência ainda, a cada hora ou a cada minuto, por exemplo. Se calcularmos o limite quando os juros são compostos a intervalos cada vez menores, chegaremos à seguinte fórmula para o saldo após t anos,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} A_t &= \lim_{k\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} \\ &= A_0 \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{r}\cdot rt} \\ &= A_0\left[\lim_{\frac{r}{k}\to 0}\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{r}}\right]^{rt} && \text{Quando } k \to \infty,\ \frac{r}{k} \to 0 \end{aligned}$$

$$= A_0 \left[\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} \right]^{rt} \qquad \text{Substitua } x = \frac{r}{k}$$

$$= A_0 e^{rt} \qquad \text{Teorema 6 da Seção 3.7}$$

A fórmula resultante para o saldo da sua conta após t anos é

$$A(t) = A_0 e^{rt} \tag{6}$$

Os juros pagos de acordo com essa fórmula são chamados juros **compostos continuamente**. O número r é denominado **taxa de juros contínua**. O saldo após t anos é calculado com a lei da variação exponencial, dada na Equação (6).

EXEMPLO 2 Conta de poupança

Suponha que você tenha depositado \$ 621 em uma conta de poupança que paga 6% de juros compostos continuamente. Quanto dinheiro você terá daqui a 8 anos?

SOLUÇÃO Usamos a Equação (6) com $A_0 = 621$, $r = 0{,}06$ e $t = 8$:

$$A(8) = 621e^{(0{,}06)(8)} = 621e^{0{,}48} = 1.003{,}58 \qquad \text{Centavo mais próximo}$$

Se o banco pagasse juros por trimestre ($k = 4$ na Equação 5), o saldo da sua conta seria \$ 10.000,01. Assim, o efeito da composição contínua, em comparação com a composição trimestral, foi um acréscimo de \$ 3,57. Um banco pode achar que vale a pena anunciar essa diferença: "Nós compomos os juros a cada segundo, dia e noite — ou, melhor dizendo, compomos os juros continuamente".

Radioatividade

Alguns átomos são instáveis e podem perder massa espontaneamente para o ambiente, ou seja, podem emitir radiação. Esse processo chama-se **decaimento radioativo**, e o elemento cujos átomos passam por esse processo é chamado **radioativo**. Às vezes, quando um átomo emite parte de sua massa na forma de radiação, a parte restante passa a constituir um novo elemento. Por exemplo, o carbono 14 decai para nitrogênio; o rádio, após uma série de etapas intermediárias, acaba por decair para chumbo.

Experimentos mostram que, em qualquer dado instante, a taxa à qual um elemento radioativo decai (medida pelo número de núcleos que se alteram por unidade de tempo) é aproximadamente proporcional ao número de núcleos radioativos presentes. Assim, o decaimento de um elemento radioativo é descrito pela equação $dy/dt = -ky$, $k > 0$. O convencional nesse caso é usar $-k(k > 0)$ em vez de $k(k < 0)$ para enfatizar que y é decrescente. Se y_0 é o número de núcleos radioativos presentes no instante zero, o número remanescente em qualquer tempo t posterior será

$$y = y_0 e^{-kt}, \quad k > 0$$

No caso do gás radônio 222, t é medido em dias e $k = 0{,}18$. No caso do rádio 226, que costumava ser passado em mostradores de relógios para que eles brilhassem no escuro (uma prática perigosa), t é medido em anos e $k = 4{,}3 \times 10^{-4}$.

EXEMPLO 3 Meia-vida de um elemento radioativo

A **meia-vida** de um elemento radioativo é o tempo necessário para que metade dos núcleos radioativos presentes na amostra sofra decaimento. É

muito interessante que a meia-vida seja uma constante que não dependa do número de núcleos radioativos inicialmente presentes na amostra, mas sim do elemento radioativo em si.

Para entendermos o porquê disso, consideremos y_0 como o número de núcleos radioativos inicialmente presentes na amostra. O número y em um tempo t posterior será $y = y_0 e^{-kt}$. Buscamos o valor de t para o qual o número de núcleos radioativos presentes seja a metade do número inicial.

$$y_0 e^{-kt} = \frac{1}{2} y_0$$

$$e^{-kt} = \frac{1}{2}$$

$$-kt = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \qquad \text{Regra da recíproca para logaritmos.}$$

$$t = \frac{\ln 2}{k}$$

O valor de t é a meia-vida do elemento. Ele depende apenas do valor de k; o número y_0 não é levado em conta nos cálculos.

$$\text{Meia-vida} = \frac{\ln 2}{k} \tag{7}$$

EXEMPLO 4 Meia-vida do polônio 210

A vida efetiva do polônio 210 é tão curta que a medimos em dias, e não em anos. O número de átomos radioativos remanescentes após t dias em uma amostra com y_0 átomos radioativos iniciais é

$$y = y_0 e^{-5 \times 10^{-3} t}$$

Determine a meia-vida do elemento.

SOLUÇÃO

$$\text{Meia-vida} = \frac{\ln 2}{k} \qquad \text{Equação (7)}$$

$$= \frac{\ln 2}{5 \times 10^{-3}} \qquad \text{O valor de } k \text{ para a equação do decaimento do polônio.}$$

$$\approx 139 \text{ dias}$$

EXEMPLO 5 Datação com carbono 14

Às vezes, o decaimento de elementos radioativos pode ser usado para datar eventos do passado terrestre. Em um organismo vivo, a razão entre o carbono radioativo — o carbono 14 — e o carbono ordinário permanece razoavelmente constante durante a vida desse organismo, sendo aproximadamente igual à razão verificada no ambiente ao redor na época. Após a morte do organismo, no entanto, nenhum carbono novo é ingerido, e a proporção de carbono 14 nos restos mortais diminui, à medida que ele decai.

Os cientistas que fazem datação por carbono 14 usam um valor de 5.700 anos para sua meia-vida (você verá mais sobre isso nos exercícios). Determine a idade de uma amostra em que 10% dos núcleos radioativos originalmente presentes já decaíram.

SOLUÇÃO Vamos usar a equação de decaimento $y = y_0e^{-kt}$. Há duas coisas a descobrir: o valor de k e o valor de t quando $y = 0{,}9y_0$ (90% dos núcleos radioativos ainda estão presentes). Ou seja, determine t quando $y_0e^{-kt} = 0{,}9y_0$, ou $e^{-kt} = 0{,}9$.

O valor de k. Usamos a Equação (7) da meia-vida:

$$k = \frac{\ln 2}{\text{meia-vida}} = \frac{\ln 2}{5.700} \quad (\text{cerca de } 1{,}2 \times 10^{-4})$$

O valor de t que torna $e^{-kt} = 0{,}9$:

$$e^{-kt} = 0{,}9$$

$$e^{-(\ln 2/5.700)t} = 0{,}9$$

$$-\frac{\ln 2}{5.700}t = \ln 0{,}9 \qquad \text{Logaritmos de ambos os lados.}$$

$$t = -\frac{5.700 \ln 0{,}9}{\ln 2} \approx 866 \text{ anos}$$

A amostra tem cerca de 866 anos.

Transferência de calor: a lei do resfriamento de Newton

Uma sopa quente dentro de uma xícara de metal esfria até a temperatura do ar ao redor. Um lingote de prata quente, imerso em uma grande banheira de água, esfria até a temperatura da água ao redor. Em situações como esta, a taxa de variação da temperatura de um objeto em qualquer tempo dado é aproximadamente proporcional à diferença entre a própria temperatura e a do meio. Essa observação recebe o nome de *lei do resfriamento de Newton* — embora também se aplique ao aquecimento — e existe uma equação para ela.

Se H for a temperatura do objeto no instante t e H_A a temperatura constante do ambiente, então a equação diferencial será

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_A) \tag{8}$$

Se substituirmos y por $(H - H_A)$, então

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}(H - H_A) = \frac{dH}{dt} - \frac{d}{dt}(H_A) \\
&= \frac{dH}{dt} - 0 && H_A \text{ é uma constante.} \\
&= \frac{dH}{dt} \\
&= -k(H - H_A) && \text{Equação (8)} \\
&= -ky && H - H_A = y
\end{aligned}$$

Agora sabemos que a solução de $dy/dt = -ky$ é $y = y_0e^{-kt}$, onde $y(0) = y_0$. Substituindo y por $(H - H_A)$, isso nos diz que

$$H - H_A = (H_0 - H_A)e^{-kt} \tag{9}$$

onde H_0 é a temperatura em $t = 0$. Essa é a equação para a lei do resfriamento de Newton.

EXEMPLO 6 Esfriando um ovo cozido duro

Um ovo duro, a 98 °C, é colocado em uma pia contendo água a 18 °C. Depois de 5 minutos, a temperatura do ovo é de 38 °C. Supondo que durante o experimento a temperatura da água não aumente significativamente, quanto tempo a mais será necessário para que o ovo atinja 20 °C?

SOLUÇÃO Determinamos quanto tempo o ovo levaria para esfriar de 98 °C a 20 °C e subtraímos os 5 minutos que já se passaram. Usando a Equação (9) com $H_A = 18$ e $H_0 = 98$, a temperatura do ovo t minutos depois de ser colocado na pia será

$$H = 18 + (98 - 18)\,e^{-kt} = 18 + 80e^{-kt}$$

Para determinar k, usamos a informação de que $H = 38$ quando $t = 5$:

$$\begin{aligned} 38 &= 18 + 80e^{-5k} \\ e^{-5k} &= \frac{1}{4} \\ -5k &= \ln\frac{1}{4} = -\ln 4 \\ k &= \frac{1}{5}\ln 4 = 0{,}2\ln 4 \qquad \text{(cerca de 0,28)} \end{aligned}$$

A temperatura do ovo no instante t será $H = 18 + 80e^{-(0{,}2\ln 4)t}$. Agora, determine o instante t em que $H = 20$:

$$\begin{aligned} 20 &= 18 + 80e^{-(0{,}2\ln 4)t} \\ 80e^{-(0{,}2\ln 4)t} &= 2 \\ e^{-(0{,}2\ln 4)t} &= \frac{1}{40} \\ -(0{,}2\ln 4)t &= \ln\frac{1}{40} = -\ln 40 \\ t &= \frac{\ln 40}{0{,}2\ln 4} \approx 13 \text{ min} \end{aligned}$$

A temperatura do ovo chegará a 20 °C aproximadamente 13 minutos depois de ele ter sido colocado na água. Como levou 5 minutos para atingir 38 °C, demorará cerca de 8 minutos a mais para chegar a 20 °C.

Exercícios 7.2

As respostas da maioria dos exercícios a seguir são dadas em termos de logaritmos e exponenciais. Uma calculadora pode ajudá-lo, permitindo que você expresse as respostas na forma decimal.

1. **A evolução humana continua** A análise da diminuição dos dentes feita por C. Loring Brace e colaboradores no Museu de Antropologia da Universidade de Michigan indica que o tamanho dos dentes humanos está diminuindo continuamente e que o processo de evolução não parou há 30.000 anos, como muitos cientistas acreditam. Por exemplo, nos europeus do norte a redução no tamanho dos dentes acontece a uma taxa de 1% a cada 1.000 anos.

   (a) Se t representa o tempo em anos e y o tamanho do dente, use a condição em que $y = 0{,}99y_0$, quando $t = 1.000$, para encontrar o valor de k na equação $y = y_0e^{kt}$. Depois, use esse valor para responder às perguntas a seguir.

(b) Em aproximadamente quantos anos os dentes humanos terão 90% do tamanho atual?

(c) Qual será o tamanho dos dentes de nossos descendentes daqui a 20.000 anos (como porcentagem do tamanho atual)?

(*Fonte*: *LSA Magazine*, v. 12, n. 2, 1989, p. 19, Ann Arbor, MI.)

2. **Pressão atmosférica** A pressão atmosférica terrestre p freqüentemente é modelada considerando-se que a taxa dp/dh à qual p varia (em função da altitude h acima do nível do mar) seja proporcional a p. Suponha que a pressão ao nível do mar seja 1.013 milibars (cerca de 14,7 libras por polegada quadrada) e que a pressão a uma altitude de 20 km seja 90 milibars.

(a) Resolva este problema de valor inicial:

Equação diferencial: $dp/dh = kp$ (sendo k uma constante)

Condição inicial: $p = p_0$ quando $h = 0$

para expressar p em termos de h. Determine os valores de p_0 e k a partir dos dados de altitude e pressão fornecidos.

(b) Qual é a pressão atmosférica em $h = 50$ km?

(c) A que altitude a pressão é igual a 900 milibars?

3. **Reações químicas de primeira ordem** Em algumas reações químicas, a taxa à qual a quantidade de uma substância varia em relação ao tempo é proporcional à quantidade presente. Para a transformação da δ-glucono lactona em ácido glucônico, por exemplo,

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}6y$$

quando t é medido em horas. Se houver 100 g de δ-glucono lactona presentes quando $t = 0$, quantos gramas restarão depois da primeira hora?

4. **A inversão do açúcar** O processamento do açúcar não refinado tem um passo chamado "inversão", que altera a estrutura molecular do açúcar. Uma vez iniciado o processo, a taxa de variação de açúcar não refinado é proporcional à quantidade de açúcar não refinado remanescente. Se 1.000 kg de açúcar não refinado se reduzem a 800 kg de açúcar não refinado durante as primeiras 10 horas, quanto açúcar não refinado restará depois de mais 14 horas?

5. **Trabalhando debaixo d'água** A intensidade $L(x)$ de luz x pés sob a superfície do oceano satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dL}{dx} = -kL$$

Como mergulhador no mar do Caribe, a experiência lhe ensinou que a 18 pés de profundidade a intensidade da luz (que incide na superfície) fica reduzida pela metade. Você não consegue trabalhar sem luz artificial quando a intensidade da luz cai a menos de um décimo do valor da superfície. Até que profundidade aproximadamente você pode trabalhar sem luz artificial?

6. **Voltagem em um capacitor sendo descarregado** Suponha que as cargas elétricas acumuladas em um capacitor estejam escapando através de seus terminais a uma taxa proporcional à voltagem V e que, se t for medido em segundos,

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40}V$$

Encontre V nessa equação, usando V_0 para denotar o valor de V quando $t = 0$. Quanto tempo a voltagem demorará para atingir 10% de seu valor inicial?

7. **Bactérias do cólera** Suponha que as bactérias em uma colônia possam crescer ilimitadamente, segundo a lei da variação exponencial. A colônia começa com 1 bactéria e dobra de número a cada meia hora. Quantas bactérias a colônia terá ao final de 24 horas? (Sob condições de laboratório favoráveis, o número de bactérias do cólera pode dobrar a cada 30 minutos. Em uma pessoa infectada, muitas bactérias são destruídas, mas este exemplo ajuda a explicar por que alguém que se sente bem pela manhã pode estar gravemente enfermo à noite.)

8. **Crescimento de bactérias** Uma colônia de bactérias é cultivada sob condições ideais em laboratório, de modo que a população cresce exponencialmente. Ao fim de 3 horas existem 10.000 bactérias. Ao fim de 5 horas há 40.000. Quantas bactérias havia inicialmente?

9. **A incidência de uma doença** (*Continuação do Exemplo 1.*) Suponha que em dado ano o número de casos de uma doença seja reduzido em 25%, e não mais em 20%.

(a) Quanto tempo será necessário para reduzir o número de casos para 1.000?

(b) Quanto tempo será necessário para eliminar a doença, isto é, para reduzir o número de casos a menos de 1?

10. **A população dos Estados Unidos** O Museu de Ciências em Boston possui um painel que mostra a cada momento a população total dos Estados Unidos. Em 11 de maio de 1993, ela crescia a uma taxa de 1 pessoa a cada 14 segundos. A população apresentada no painel para as 15h45 desse dia era de 257.313.431 pessoas.

(a) Considerando um crescimento exponencial com taxa constante, encontre a constante de taxa para o crescimento da população (pessoas por ano de 365 dias).

(b) A essa taxa, qual foi a população dos Estados Unidos às 15h45 (horário de Boston) em 11 de maio de 2008?

11. **Esgotamento de petróleo** Suponha que a quantidade de petróleo bombeada de um dos poços do canyon em Whittier, Califórnia, diminua a uma taxa contínua de 10% por ano. Quando a produção do poço atingirá um quinto de seu valor atual?

12. **Desconto contínuo no preço** Para estimular os compradores a fazer pedidos de 100 unidades, o departamento de vendas de sua empresa aplica um desconto contínuo que torna o preço unitário uma função $p(x)$ do número de unidades x pedidas. O desconto diminui o preço a uma taxa de \$ 0,01 por unidade pedida. O preço unitário para um pedido de 100 unidades é $p(100) = \$\ 20{,}09$.

(a) Determine $p(x)$ resolvendo o seguinte problema de valor inicial:

Equação diferencial: $\dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{1}{100}p$

Condição inicial: $p(100) = 20{,}09$

(b) Determine os preços unitários $p(10)$ para um pedido de 10 unidades e $p(90)$ para um de 90 unidades.

(c) O departamento de vendas pediu-lhe que descobrisse se o desconto oferecido é tanto que a receita $r(x) = x \cdot p(x)$ para um pedido de 100 unidades poderá ser menor que para um de menos unidades, por exemplo, para um pedido de 90 unidades. Tranqüilize-os mostrando que r tem o valor máximo em $x = 100$.

(d) Faça o gráfico da função receita $r(x) = xp(x)$ para $0 \le x \le 200$.

T

13. **Juros compostos continuamente** Você acabou de depositar A_0 dólares em uma conta de investimento que paga 4% de juros, compostos continuamente.

(a) Quanto dinheiro você terá em 5 anos?

(b) Quanto tempo levará para seu investimento dobrar? E triplicar?

14. **A pergunta de John Napier** John Napier (1550-1617), o proprietário de terras escocês que inventou os logaritmos, foi a primeira pessoa a responder à seguinte pergunta: o que acontece se você investe uma quantia a juros de 100%, compostos continuamente?

(a) O que acontece?

(b) Quanto tempo demora para você triplicar seu dinheiro?

(c) Quais serão seus rendimentos em um ano?

Justifique suas respostas.

15. **O testamento de Benjamin Franklin** O Instituto Técnico Franklin, de Boston, deve sua existência a uma provisão em codicilo ao testamento de Benjamin Franklin. Em um trecho do codicilo se lê:

> Eu gostaria de ajudar, até mesmo após minha morte, se possível, a formar e desenvolver outros jovens rapazes que possam ser úteis a seu país, tanto em Boston quanto na Filadélfia. Para esse fim, dedico duas mil libras esterlinas, as quais dôo, mil aos habitantes da cidade de Boston e Massachusetts, e os outros mil aos habitantes da cidade da Filadélfia, em confiança e para os usos, interesses e propósitos a seguir mencionados e declarados.

A idéia de Franklin era emprestar dinheiro a jovens aprendizes a juros de 5%, com a condição de que aquele que recebesse o empréstimo pagasse, a cada ano,

> … além dos juros anuais, uma décima parte do principal, de modo que as somas do principal e dos juros tornem-se novamente disponíveis para outros jovens… Se esse plano for executado e se tudo transcorrer conforme planejado, sem interrupção, durante cem anos, a soma será então de cento e trinta e uma mil libras, das quais cem mil os gestores da doação aos habitantes da cidade de Boston deverão investir em serviços públicos, segundo seu arbítrio… As restantes trinta e uma mil libras, gostaria que fossem deixadas para pagar juros da maneira que acabo de descrever, durante outros cem anos… Ao fim desse segundo período, se nenhum acidente infeliz tiver impedido a operação, a soma será de quatro milhões e sessenta e uma mil libras.

Nem sempre foi possível encontrar tantos jovens dispostos a contrair o empréstimo quanto Franklin havia planejado, mas os gestores fizeram o melhor que puderam. Cem anos após o recebimento da doação de Franklin, feita em janeiro de 1894, o fundo havia aumentado de 1.000 libras para quase 90.000 libras. Em cem anos, o capital inicial havia se multiplicado cerca de 90 vezes, e não 131 vezes, como Franklin havia imaginado.

Qual taxa de juros, compostos continuamente durante cem anos, foi responsável por multiplicar o capital original de Benjamin Franklin por 90?

16. (*Continuação do Exercício 15.*) Ao estimar que as 1.000 libras originais chegariam a 131.000 em cem anos, Benjamin Franklin estava usando uma taxa anual de 5% e compondo os juros apenas uma vez por ano. Qual taxa de juros por ano, compostos continuamente durante cem anos, multiplicaria a quantia original por 131?

17. **Plutônio 239** A meia-vida do isótopo do plutônio é de 24.360 anos. Se 10 g de plutônio forem lançadas na atmosfera por um acidente nuclear, quantos anos vai levar para que 80% do isótopo decaia?

18. **Polônio 210** A meia-vida do polônio é de 139 dias, mas uma amostra que você recebeu não lhe será mais útil quando 95% dos núcleos radioativos presentes no dia em que a amostra chegou tiverem se desintegrado. Por quantos dias, depois da chegada da amostra, você conseguirá usar o polônio?

19. **Vida média de um núcleo radioativo** Usando a equação de radioatividade $y = y_0e^{-kt}$, os físicos chamam o número $1/k$ de *vida média* de um núcleo radioativo. A vida média de um núcleo de radônio é de aproximadamente $1/0{,}18 = 5{,}6$ dias. A de um núcleo de carbono 14 é superior a 8.000 anos. Mostre que 95% dos núcleos radioativos presentes inicialmente em uma amostra terão se desintegrado no tempo equivalente a três vidas médias, isto é, no instante $t = 3/k$. Portanto, a vida média de um núcleo permite estimar rapidamente quanto tempo vai durar a radioatividade de uma amostra.

20. **Califórnio 252** O que custa \$ 27 milhões o grama e pode ser usado para tratar câncer de cérebro, analisar o teor de enxofre do carvão e detectar explosivos em bagagens? A resposta é califórnio 252, um isótopo radioativo tão raro que somente 8 g dele já foram produzidos no mundo ocidental desde sua descoberta, feita por Glenn Seaborg em 1950. A meia-vida do isótopo é de 2.645 anos — longa o suficiente para prestar serviços úteis, mas curta o bastante para ter uma alta radioatividade por unidade de massa. Um micrograma desse isótopo libera 170 milhões de nêutrons por segundo.
    (a) Qual é o valor de k na equação de decaimento para esse isótopo?
    (b) Qual é a vida média do isótopo? (Veja o Exercício 19.)
    (c) Quanto tempo levaria para 95% dos núcleos radioativos de uma amostra se desintegrarem?

21. **Esfriando a sopa** Suponha que, depois de ficar 10 minutos em uma sala a 20 °C, a temperatura de uma tigela com sopa tenha passado de 90 °C para 60 °C. Use a lei do resfriamento de Newton para responder às questões a seguir.
    (a) Quanto tempo a mais levará para a temperatura da sopa baixar para 35 °C?
    (b) Em vez de ficar na sala, a tigela com sopa a 90 °C é colocada em um freezer cuja temperatura é de −15 °C. Quanto tempo levará para a sopa esfriar de 90 °C a 35 °C?

22. **Uma viga de temperatura desconhecida** Uma viga de alumínio foi trazida do frio externo para dentro de uma loja de máquinas, onde a temperatura era mantida em 65 °F. Após 10 minutos, a temperatura da viga chegou a 35 °F e, em mais 10 minutos, atingiu 50 °F. Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a temperatura inicial da viga.

23. **Ambiente com temperatura desconhecida** Uma panela com água quente (46 °C) foi colocada em um refrigerador. Dez minutos depois a temperatura da água era de 39 °C; com mais dez minutos já atingia 33 °C. Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a temperatura do refrigerador.

24. **Prata esfriando em contato com o ar** Neste momento, a temperatura de um lingote de prata é de 60 °C acima da temperatura ambiente. Vinte minutos atrás, era de 70 °C acima da temperatura ambiente. Quantos graus acima da temperatura ambiente o lingote estará
    (a) daqui a 15 minutos?
    (b) daqui a 2 horas?
    (c) Quando o lingote estará 10 °C acima da temperatura ambiente?

25. **A idade do Lago da Cratera** O carvão de uma árvore morta na erupção vulcânica que formou o Lago da Cratera, no Oregon, continha 44,5% do carbono 14 que é encontrado na matéria viva. Qual é a idade aproximada do Lago da Cratera?

26. **A sensibilidade do carbono 14 para datação de fósseis** Para avaliar o efeito de erros relativamente pequenos na estimativa da quantidade do carbono 14 sobre a datação de uma amostra, considere esta situação hipotética:
    (a) Um fóssil encontrado no centro de Illinois (ano 2000) tem 17% de seu conteúdo original de carbono 14. Estime o ano em que o animal morreu.
    (b) Repita o item (a) considerando 18% em vez de 17%.
    (c) Repita o item (a) considerando 16% em vez de 17%.

27. **Falsificação de obra de arte** Uma pintura atribuída a Vermeer (1632-1675), que deveria conter não mais que 96,2% de seu carbono 14 original, em vez disso contém 99,5%. Qual é a idade aproximada dessa falsificação?

7.3 Taxas relativas de crescimento

Nas áreas de matemática, ciência da computação e engenharia, às vezes é importante comparar as taxas às quais funções de x crescem conforme x torna-se grande. Funções exponenciais são importantes nessas comparações por causa de seu crescimento muito rápido, e as funções logarítmicas, por causa de seu crescimento muito lento. Nesta seção, introduzimos a notação do *ozinho* e do *ozão*, usada para descrever os resultados dessas comparações. Restringiremos nossa atenção às funções cujos valores acabam se tornando e permanecendo positivos quando $x \to \infty$.

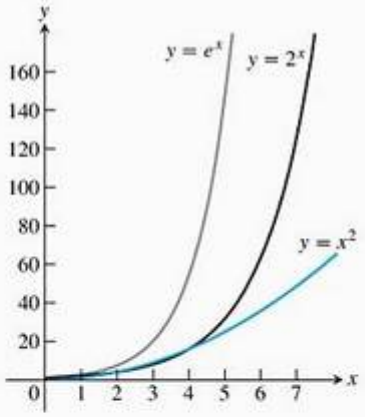


FIGURA 7.5 As curvas de e^x, 2^x e x^2.

Taxas de crescimento de funções

Talvez você tenha percebido que, à medida que x torna-se maior, funções exponenciais como 2^x e e^x parecem crescer mais rapidamente do que funções racionais e polinomiais. Essas exponenciais seguramente crescem mais rápido do que o próprio x, e, na Figura 7.5, você pode ver 2^x crescendo mais rápido que x^2 quando x aumenta. Na verdade, quando $x \to \infty$, as funções 2^x e e^x crescem mais rápido que qualquer potência de x, até mesmo que $x^{1.000.000}$ (Exercício 19).

Para ter uma idéia da rapidez com que os valores de $y = e^x$ aumentam quando x aumenta, você pode fazer o gráfico da função em um grande quadro-negro, usando escala de centímetros nos eixos. Em $x = 1$ cm, a curva é $e^1 \approx 3$ cm acima do eixo x. Em $x = 6$ cm, a curva é $e^6 \approx 403$ cm ≈ 4 m de altura (estará a ponto de atravessar o teto, se é que já não o fez). Em $x = 10$ cm, a curva é $e^{10} \approx 22.026$ cm $\approx$ 220 m de altura, mais alta que a maioria dos edifícios. Em $x = 24$ cm, a curva estará a mais de metade do caminho da Lua, e em $x = 43$ cm da origem, a curva estará alta o suficiente para alcançar o vizinho estelar mais próximo do Sol, a estrela anã vermelha Próxima Centauro:

$$\begin{aligned} e^{43} &\approx 4{,}73 \times 10^{18} \text{ cm} \\ &= 4{,}73 \times 10^{13} \text{ km} \\ &\approx 1{,}58 \times 10^{8} \text{ segundos-luz} \\ &\approx 5 \text{ anos-luz} \end{aligned}$$

No vácuo, a luz viaja a 300.000 km/s.

A distância até Próxima Centauro é de cerca de 4,22 anos-luz. Apesar disso, com $x = 43$ cm da origem, a curva ainda está menos de 2 pés à direita do eixo y.

Por sua vez, as funções logarítmicas como $y = \log_2 x$ e $y = \ln x$ crescem mais lentamente do que qualquer potência positiva de x (Exercício 21) quando $x \to \infty$. Com eixos em centímetros, você tem de avançar aproximadamente 5 anos-luz no eixo x para determinar um ponto onde a curva de $y = \ln x$ tem apenas $y = 43$ cm de altura. (Veja a Figura 7.6.)

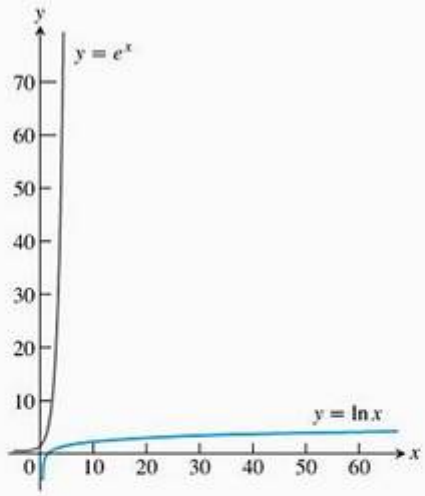


FIGURA 7.6 Desenhos em escala dos gráficos de e^x e $\ln x$.

Podemos tornar precisas essas importantes comparações entre funções exponenciais, polinomiais e logarítmicas definindo o que significa, para uma função $f(x)$, crescer mais rápido que outra função $g(x)$ quando $x \to \infty$.

Definição Taxas de crescimento quando $x \to \infty$

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ positivas para um x suficientemente grande.

1. **f cresce mais rápido do que g** quando $x \to \infty$ se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

ou, de modo equivalente, se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Também dizemos que g **cresce mais lentamente que** f quando $x \to \infty$.

2. f e g **crescem à mesma taxa** quando $x \to \infty$ se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

onde L é finito e positivo.

De acordo com essas definições, $y = 2x$ não cresce mais rápido que $y = x$. As duas funções crescem à mesma taxa porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2$$

que é um limite finito e diferente de zero. A razão para essa aparente desconsideração do senso comum é que queremos que "f cresce mais que g" signifique que, para valores grandes de x, g seja insignificante comparado a f.

EXEMPLO 1 Várias comparações úteis entre taxas de crescimento

(a) e^x cresce mais rapidamente que x^2 quando $x \to \infty$ porque

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\infty/\infty} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}}_{\infty/\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Usando a regra de L'Hôpital duas vezes.

(b) 3^x cresce mais rapidamente que 2^x quando $x \to \infty$ porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty$$

(c) x^2 cresce mais rapidamente que $\ln x$ quando $x \to \infty$ porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x\to\infty} 2x^2 = \infty$$

Regra de L'Hôpita

(d) $\ln x$ cresce mais lentamente que x quando $x \to \infty$ porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1}$$

Regra de L'Hôpital

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

EXEMPLO 2 Funções exponenciais e logarítmicas com bases diferentes

(a) Como o Exemplo 1b sugere, funções exponenciais com bases diferentes nunca crescem à mesma taxa quando $x \to \infty$. Se $a > b > 0$, então a^x cresce mais rápido do que b^x. Como $(a/b) > 1$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \infty$$

(b) Diferentemente das funções exponenciais, as funções logarítmicas com bases diferentes a e b sempre crescem à mesma taxa quando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x/\ln a}{\ln x/\ln b} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

A razão limite é sempre finita e nunca zero.

Se f cresce à mesma taxa que g quando $x \to \infty$, e g cresce à mesma taxa que h quando $x \to \infty$, então f cresce à mesma taxa que h quando $x \to \infty$. O motivo é que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = L_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{g}{h} = L_2$$

juntos implicam

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{h} = \lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} = L_1 L_2$$

Se L_1 e L_2 forem finitos e diferentes de zero, então L_1L_2 também o será.

EXEMPLO 3 Funções crescendo à mesma taxa

Demonstre que $\sqrt{x^2+5}$ e $(2\sqrt{x}-1)^2$ crescem à mesma taxa quando $x \to \infty$.

SOLUÇÃO Demonstramos que as funções crescem à mesma taxa mostrando que ambas crescem à mesma taxa que a função $g(x) = x$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{5}{x^2}} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim_{x\to\infty} \left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4$$

Ordem e notação "o"

Agora vamos introduzir a notação "ozinho" e "ozão", inventada por teóricos de números cem anos atrás e hoje lugar-comum em análise matemática e ciência da computação.

Definição Ozinho

Uma função f é **de ordem menor que** g quando $x \to \infty$ se $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Indicamos essa situação escrevendo $\boldsymbol{f = o(g)}$ ("f é ozinho de g").

Observe que dizer $f = o(g)$ quando $x \to \infty$ é outra maneira de dizer que f cresce mais lentamente que g quando $x \to \infty$.

EXEMPLO 4 Usando a notação ozinho

(a) $\ln x = o(x)$ quando $x \to \infty$ pois $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

(b) $x^2 = o(x^3+1)$ quando $x \to \infty$ pois $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3+1} = 0$

Definição Ozão

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ positivas para um x suficientemente grande. Logo, f é **no máximo da ordem** de g quando $x \to \infty$, caso exista um inteiro positivo M para o qual

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq M$$

para um x suficientemente grande. Indicamos essa situação escrevendo $f = O(g)$ ("f é ozão de g").

EXEMPLO 5 Usando a notação ozão

(a) $x + \text{sen } x = O(x)$ quando $x \to \infty$ pois $\dfrac{x + \text{sen } x}{x} \leq 2$ para um x suficientemente grande.

(b) $e^x + x^2 = O(e^x)$ quando $x \to \infty$ pois $\dfrac{e^x + x^2}{e^x} \to 1$ quando $x \to \infty$

(c) $x = O(e^x)$ quando $x \to \infty$ pois $\dfrac{x}{e^x} \to 0$ quando $x \to \infty$

Se você observar as definições de novo, perceberá que $f = o(g)$ implica $f = O(g)$ no caso de funções que sejam positivas para um x suficientemente grande. Além disso, se f e g crescem à mesma taxa, então $f = O(g)$ e $g = O(f)$ (Exercício 11).

Busca seqüencial contra busca binária

Cientistas da computação muitas vezes medem a eficiência de um algoritmo contando o número de passos que um computador precisa dar para executá-lo. Pode haver diferenças significativas entre a eficiência dos algoritmos, mesmo quando eles são projetados para cumprir a mesma tarefa. Essas diferenças geralmente são descritas em notação ozão. Eis um exemplo.

O *Webster's third new international dictionary* lista cerca de 26 mil palavras da língua inglesa que começam com a letra *a*. Uma maneira de procurar uma palavra, ou descobrir que ela não está lá, é ler a lista palavra por palavra, até encontrá-la ou perceber que ela não está lá. Esse método, denominado busca seqüencial, não faz nenhum uso particular da ordem alfabética. Você com certeza vai achar uma resposta, mas isso pode exigir 26 mil passos.

Outra maneira de achar a palavra ou descobrir que ela não está lá é ir direto ao meio da lista (acrescente ou subtraia algumas palavras). Se você não achar a palavra, então vá para o meio da metade que a contém e esqueça a outra metade. (Você sabe qual metade contém a palavra porque sabe que a lista é ordenada alfabeticamente.) Esse método elimina aproximadamente 13 mil palavras em um único passo. Se você não encontrar a palavra na segunda tentativa, então pule para o meio da metade que a contém. Continue dessa maneira até ter encontrado a palavra ou dividido a lista pela metade tantas vezes que nenhuma palavra tenha sobrado. Quantas vezes você tem de dividir a lista para encontrar ou palavra ou descobrir que ela não está lá? No máximo 15, porque

$$(26.000/2^{15}) < 1$$

É, sem dúvida, bem melhor do que 26 mil tentativas.

Para uma lista de tamanho n, um algoritmo de busca seqüencial necessita da ordem de n passos para encontrar uma palavra ou determinar que ela não está na lista. Uma busca binária, como o segundo algoritmo é chamado, assume a ordem de $\log_2 n$ passos. A razão é que, se $2^{m-1} < n \leq 2^m$, então $m - 1 < \log_2 n \leq m$ e o número de divisões necessárias para afunilar a lista até uma única palavra será no máximo $m = \lceil \log_2 n \rceil$, o menor inteiro maior que $\log_2 n$.

A notação ozão oferece uma maneira compacta de dizer tudo isso. O número de passos em uma busca seqüencial de uma lista ordenada é $O(n)$; em uma busca binária, é $O(\log_2 n)$. Em nosso exemplo, existe uma grande diferença entre os dois (26.000 contra 15), e essa diferença só pode crescer junto com n, pois n cresce mais rapidamente que $\log_2 n$ quando $n \to \infty$ (como no Exemplo 1d).

Exercícios 7.3

Comparações com a exponencial e^x

1. Qual das funções a seguir cresce mais rapidamente que e^x quando $x \to \infty$? Qual cresce à mesma taxa que e^x? Qual cresce mais devagar?
   (a) $x + 3$ (b) $x^3 + \operatorname{sen}^2 x$
   (c) $\sqrt{x}$ (d) 4^x
   (e) $(3/2)^x$ (f) $e^{x/2}$
   (g) $e^x/2$ (h) $\log_{10} x$

2. Qual das funções a seguir cresce mais rapidamente que e^x quando $x \to \infty$? Qual cresce à mesma taxa que e^x? Qual cresce mais devagar?
   (a) $10x^4 + 30x + 1$ (b) $x \ln x - x$
   (c) $\sqrt{1 + x^4}$ (d) $(5/2)^x$
   (e) e^{-x} (f) xe^x
   (g) $e^{\cos x}$ (h) e^{x-1}

Comparações com a potência x^2

3. Qual das funções a seguir cresce mais rapidamente que x^2 quando $x \to \infty$? Qual cresce à mesma taxa que x^2? Qual cresce mais devagar?
   (a) $x^2 + 4x$ (b) $x^5 - x^2$
   (c) $\sqrt{x^4 + x^3}$ (d) $(x + 3)^2$
   (e) $x \ln x$ (f) 2^x
   (g) x^3e^{-x} (h) $8x^2$

4. Qual das funções a seguir cresce mais rapidamente que x^2 quando $x \to \infty$? Qual cresce à mesma taxa que x^2? Qual cresce mais devagar?
   (a) $x^2 + \sqrt{x}$ (b) $10x^2$
   (c) x^2e^{-x} (d) $\log_{10}(x^2)$
   (e) $x^3 - x^2$ (f) $(1/10)^x$
   (g) $(1{,}1)^x$ (h) $x^2 + 100x$

Comparações com o logaritmo $\ln x$

5. Qual das funções a seguir cresce mais rapidamente que $\ln x$ quando $x \to \infty$? Qual cresce à mesma taxa que $\ln x$? Qual cresce mais devagar?
   (a) $\log_3 x$ (b) $\ln 2x$
   (c) $\ln \sqrt{x}$ (d) $\sqrt{x}$
   (e) x (f) $5 \ln x$
   (g) $1/x$ (h) e^x

6. Qual das funções a seguir cresce mais rapidamente que $\ln x$ quando $x \to \infty$? Qual cresce à mesma taxa que $\ln x$? Qual cresce mais devagar?
   (a) $\log_2(x^2)$ (b) $\log_{10} 10x$
   (c) $1/\sqrt{x}$ (d) $1/x^2$
   (e) $x - 2 \ln x$ (f) e^{-x}
   (g) $\ln(\ln x)$ (h) $\ln(2x + 5)$

Ordenando funções segundo a taxa de crescimento

7. Ordene as seguintes funções daquela de crescimento mais lento para aquela de crescimento mais rápido quando $x \to \infty$.
   (a) e^x (b) x^x
   (c) $(\ln x)^x$ (d) e^{x^2}

8. Ordene as seguintes funções daquela de crescimento mais lento para aquela de crescimento mais rápido quando $x \to \infty$.

(a) 2^x (b) x^2
(c) $(\ln 2)^x$ (d) e^x

Ozão e ozinho; ordem

9. Verdadeiro ou falso? Quando $x \to \infty$,

(a) $x = o(x)$ (b) $x = o(x + 5)$
(c) $x = O(x + 5)$ (d) $x = O(2x)$
(e) $e^x = o(e^{2x})$ (f) $x + \ln x = O(x)$
(g) $\ln x = o(\ln 2x)$ (h) $\sqrt{x^2 + 5} = O(x)$

10. Verdadeiro ou falso? Quando $x \to \infty$,

(a) $\dfrac{1}{x+3} = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$
(c) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (d) $2 + \cos x = O(2)$
(e) $e^x + x = O(e^x)$ (f) $x \ln x = o(x^2)$
(g) $\ln(\ln x) = O(\ln x)$ (h) $\ln(x) = o(\ln(x^2 + 1))$

11. Demonstre que, se as funções positivas $f(x)$ e $g(x)$ crescem à mesma taxa quando $x \to \infty$, então $f = O(g)$ e $g = O(f)$.

12. Quando um polinômio $f(x)$ é de ordem menor que um polinômio $g(x)$ quando $x \to \infty$? Justifique sua resposta.

13. Quando um polinômio $f(x)$ é no máximo da mesma ordem que um polinômio $g(x)$ quando $x \to \infty$? Justifique sua resposta.

14. O que as conclusões que tiramos na Seção 2.4 sobre os limites de funções racionais nos dizem sobre o crescimento relativo de polinômios quando $x \to \infty$?

Outras comparações

15. Investigue

T

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+999)}{\ln x}$$

Use, em seguida, a regra de L'Hôpital para explicar o que você descobriu.

16. (*Continuação do Exercício 15.*) Demonstre que o valor de

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+a)}{\ln x}$$

é sempre o mesmo, independentemente do valor que se atribui à constante a. O que isso nos diz sobre as taxas relativas às quais as funções $f(x) = \ln(x + a)$ e $g(x) = \ln x$ crescem?

17. Demonstre que $\sqrt{10x+1}$ e $\sqrt{x+1}$ crescem à mesma taxa quando $x \to \infty$, mostrando que ambas crescem à mesma taxa que $\sqrt{x}$ quando $x \to \infty$.

18. Demonstre que $\sqrt{x^4+x}$ e $\sqrt{x^4+x^3}$ crescem à mesma taxa quando $x \to \infty$, mostrando que ambas crescem à mesma taxa que x^2 quando $x \to \infty$.

19. Demonstre que, quando $x \to \infty$, e^x cresce mais rápido que x^n para qualquer n inteiro positivo, até mesmo $x^{1.000.000}$. (Dica: Qual é a n-ésima derivada de x^n?)

20. **A função e^x cresce mais rápido que qualquer polinômio** Demonstre que, quando $x \to \infty$, e^x cresce mais rápido que qualquer polinômio

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

21. (a) Demonstre que, quando $x \to \infty$, $\ln x$ cresce mais rápido que $x^{1/n}$ para qualquer n inteiro positivo, até mesmo $x^{1/1.000.000}$.

(b) T Embora os valores de $x^{1/1.000.000}$ em certo momento ultrapassem os valores de $\ln x$, isso só acontece depois que avançamos para fora do eixo x. Determine um valor de x maior que 1 para o qual $x^{1/1.000.000} > \ln x$. Você pode começar observando que, quando $x > 1$, a equação $\ln x = x^{1/1.000.000}$ é equivalente à equação $\ln(\ln x) = (\ln x)/1.000.000$.

(c) T Até mesmo $x^{1/10}$ demora bastante para superar $\ln x$. Com uma calculadora, tente achar o valor de x no qual as curvas de $x^{1/10}$ e $\ln x$ se cruzam, ou, em outras palavras, no qual $\ln x = 10 \ln(\ln x)$. Inclua o ponto de interseção entre potências de 10 e, em seguida, isole-o por meio de sucessivas divisões pela metade.

(d) T (*Continuação da parte (c).*) O valor de x no qual $\ln x = 10 \ln(\ln x)$ é tão distante que apenas algumas ferramentas gráficas ou de determinação de raízes são capazes de identificá-lo. Tente no equipamento de que dispõe e veja o que acontece.

22. **A função $\ln x$ cresce mais lentamente que qualquer polinômio** Demonstre que, quando $x \to \infty$, $\ln x$ cresce mais lentamente que qualquer polinômio não constante.

Algoritmos e buscas

23. (a) Suponha que você tenha três diferentes algoritmos para resolver o mesmo problema, cada um deles dando um número de passos que é da ordem de uma das funções listadas aqui:

$$n \log_2 n, \quad n^{3/2}, \quad n(\log_2 n)^2.$$

Qual dos algoritmos é mais eficiente no longo prazo? Justifique sua resposta.

(b) T Faça juntos os gráficos das funções do item (a) para ter

uma idéia da velocidade com que cada uma cresce.

24. Repita o Exercício 23 com as funções

$$n, \quad \sqrt{n}\log_2 n, \quad (\log_2 n)^2$$

25. T Suponha que você esteja procurando um item em uma lista ordenada com um milhão de itens. Quantos passos você pode ter de dar para encontrar esse item com uma busca seqüencial? E com uma busca binária?

26. T Suponha que você esteja procurando um item em uma lista ordenada com 450 mil itens (a extensão de todo o *Webster's Third New International Dictionary*). Quantos passos você pode ter de dar para encontrar esse item com uma busca seqüencial? E com uma busca binária?

7.4 Funções hiperbólicas

As funções hiperbólicas são formadas a partir de combinações de duas funções exponenciais e^x e e^{-x}. As funções hiperbólicas simplificam muitas expressões matemáticas e são importantes em aplicações práticas. São usadas, por exemplo, em problemas tais como calcular a tensão em um cabo suspenso pelas extremidades, no caso de uma linha de transmissão elétrica, por exemplo. Também têm um papel importante na determinação de soluções para equações diferenciais. Nesta seção, faremos uma breve apresentação das funções hiperbólicas, seus gráficos, como suas derivadas são calculadas e por que elas são consideradas primitivas importantes.

As partes par e ímpar da função exponencial

Recorde as definições de funções pares e ímpares vistas na Seção 1.2 e a simetria de seus gráficos. Uma função par f satisfaz a condição $f(-x) = f(x)$, enquanto uma função ímpar satisfaz $f(-x) = -f(x)$. Toda função f que seja definida em um intervalo centrado na origem pode ser escrita de uma maneira única como a soma de uma função par e de uma função ímpar. A decomposição é

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{parte par}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{parte ímpar}}$$

Se escrevermos e^x dessa maneira, teremos

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{\text{parte par}} + \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{\text{parte ímpar}}$$

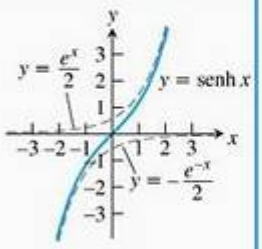
As partes par e ímpar de e^x, denominadas cosseno hiperbólico e seno hiperbólico de x, respectivamente, são úteis à sua maneira. Elas descrevem o movimento de ondas em sólidos elásticos e a forma dos fios suspensos da rede elétrica. A linha central do Portal do Arco do Oeste em St. Louis é uma curva ponderada de cosseno hiperbólico.

Definições e identidades

As funções de cosseno hiperbólico e seno hiperbólico são definidas pelas duas primeiras equações da Tabela 7.3. Essa tabela também apresenta as definições de tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicas. Como veremos, as funções hiperbólicas possuem uma série de similaridades com as funções trigonométricas das quais seus nomes derivam. (Veja também o Exercício 84.)

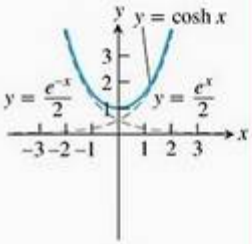
TABELA 7.3 As seis funções hiperbólicas básicas — FIGURA 7.7

Seno hiperbólico de x: $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$



(a)

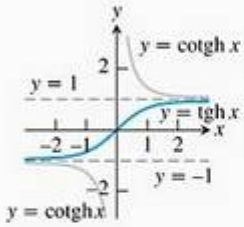
Cosseno hiperbólico de x: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$



(b)

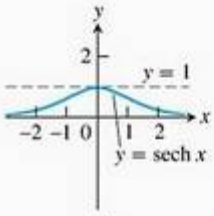
Tangente hiperbólica: $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Cotangente hiperbólica: $\operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$



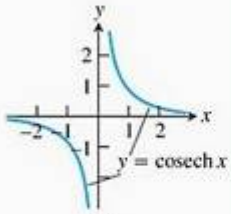
(c)

Secante hiperbólica: $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$



(d)

Cossecante hiperbólica: $\operatorname{cosech} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$



(e)

As funções hiperbólicas satisfazem as identidades da Tabela 7.4. Exceto por diferenças de sinal, são identidades que já conhecemos das funções trigonométricas.

A segunda equação é obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 2\,\text{senh}\,x\cosh x &= 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\ &= \text{senh}\,2x \end{aligned}$$

As outras identidades são obtidas de maneira análoga, fazendo-se substituições nas definições das funções hiperbólicas e usando álgebra. Como muitas funções-padrão, as hiperbólicas e suas inversas são facilmente solucionadas com calculadoras, as quais possuem teclas ou seqüências de teclas especiais para esse propósito.

TABELA 7.4 Identidades satisfeitas pelas funções hiperbólicas

$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$

$\text{senh}\,2x = 2\,\text{senh}\,x\cosh x$

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \text{senh}^2 x$

$\cosh^2 x = \dfrac{\cosh 2x + 1}{2}$

$\text{senh}^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}$

$\text{tgh}^2 x = 1 - \text{sech}^2 x$

$\text{cotgh}^2 x = 1 + \text{cosech}^2 x$

Derivadas e integrais

As seis funções hiperbólicas básicas, sendo combinações racionais das funções deriváveis e^x e e^{-x}, possuem derivadas em todos os pontos nos quais elas estão definidas (Tabela 7.5). Mais uma vez, há similaridades com as funções trigonométricas. As fórmulas das derivadas da Tabela 7.5 levam às fórmulas das integrais da Tabela 7.6.

As fórmulas das derivadas provêm da derivada de e^u:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\text{senh}\,u) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right) && \text{Definição de senh } u. \\ &= \frac{e^u\,du/dx + e^{-u}\,du/dx}{2} && \text{Derivada de } e^u. \\ &= \cosh u\,\frac{du}{dx} && \text{Definição de cosh } u. \end{aligned}$$

Isso nos leva à fórmula da primeira derivada. O cálculo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\text{cosech}\,u) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\text{senh}\,u}\right) && \text{Definição de cosech } u \\ &= -\frac{\cosh u}{\text{senh}^2 u}\frac{du}{dx} && \text{Regra do quociente.} \end{aligned}$$

TABELA 7.5 Derivadas das funções hiperbólicas

$\dfrac{d}{dx}(\text{senh}\,u) = \cosh u\,\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\cosh u) = \text{senh}\,u\,\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\text{tgh}\,u) = \text{sech}^2 u\,\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\text{cotgh}\,u) = -\text{cosech}^2 u\,\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\text{sech}\,u) = -\text{sech}\,u\,\text{tgh}\,u\,\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\text{cosech}\,u) = -\text{cosech}\,u\,\text{cotgh}\,u\,\dfrac{du}{dx}$

TABELA 7.6 Fórmulas das integrais das funções hiperbólicas

$\int \text{senh}\,u\,du = \cosh u + C$

$\int \cosh u\,du = \text{senh}\,u + C$

$\int \text{sech}^2 u\,du = \text{tgh}\,u + C$

$\int \text{cosech}^2 u\,du = -\text{cotgh}\,u + C$

$\int \text{sech}\,u\,\text{tgh}\,u\,du = -\text{sech}\,u + C$

$\int \text{cosech}\,u\,\text{cotgh}\,u\,du = -\text{cosech}\,u + C$

$$= -\frac{1}{\operatorname{senh} u}\frac{\cosh u}{\operatorname{senh} u}\frac{du}{dx}$$ Rearrange os termos.

$$= -\operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u \frac{du}{dx}$$ Definições de cosech u e cotgh u.

leva à ultima fórmula. As outras são obtidas de modo análogo.

EXEMPLO 1 Determinando derivadas e integrais

(a) $$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{tgh}\sqrt{1+t^2}\right) = \operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1+t^2}\right)$$
$$= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}$$

(b) $$\int \coth 5x\,dx = \int \frac{\cosh 5x}{\operatorname{senh} 5x}dx = \frac{1}{5}\int\frac{du}{u}$$ $u = \operatorname{senh} 5x$, $du = 5\cosh 5x\,dx$
$$= \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|\operatorname{senh} 5x| + C$$

(c) $$\int_0^1 \operatorname{senh}^2 x\,dx = \int_0^1 \frac{\cosh 2x - 1}{2}dx$$ Tabela 7.4
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (\cosh 2x - 1)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{senh} 2x}{2} - x\right]_0^1$$
$$= \frac{\operatorname{senh} 2}{4} - \frac{1}{2} \approx 0{,}40672$$ Use uma calculadora.

(d) $$\int_0^{\ln 2} 4e^x \operatorname{senh} x\,dx = \int_0^{\ln 2} 4e^x\,\frac{e^x - e^{-x}}{2}dx = \int_0^{\ln 2}(2e^{2x} - 2)\,dx$$
$$= \left[e^{2x} - 2x\right]_0^{\ln 2} = (e^{2\ln 2} - 2\ln 2) - (1 - 0)$$
$$= 4 - 2\ln 2 - 1$$
$$\approx 1{,}6137$$

Funções hiperbólicas inversas

As inversas das seis funções hiperbólicas básicas são muito úteis na integração. Uma vez que $d(\operatorname{senh} x)/dx = \cosh x > 0$, o seno hiperbólico é uma função crescente de x. Denotamos sua inversa por

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x$$

Para cada valor de x no intervalo $-\infty < x < \infty$, o valor de $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ é o número cujo seno hiperbólico é x. Os gráficos de $y = \operatorname{senh} x$ e $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ são apresentados na Figura 7.8a.

A função $y = \cosh x$ não é injetora, como podemos observar pelo gráfico da Figura 7.7b. Contudo, a função $y = \cosh x$ restrita a $x \geq 0$ é injetora e, portanto, tem uma inversa, denotada por

$$y = \cosh^{-1} x$$

Para cada valor de $x \geq 1$, $y = \cosh^{-1} x$ é o número no intervalo $0 \leq y \leq \infty$ cujo cosseno hiperbólico é x. Os gráficos de $y = \cosh x$, $x \geq 0$, e $y = \cosh^{-1} x$ são apresentados na Figura 7.8b.

Assim como $y = \cosh x$, a função $y = \operatorname{sech} x = 1/\cosh x$ não é injetora, mas sua restrição a valores não negativos de x possui uma inversa, denotada por

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x$$

Para cada valor de x no intervalo $(0, 1]$, $y = \text{sech}^{-1} x$ é o número não negativo cuja secante hiperbólica é x. Os gráficos de $y = \text{sech}\, x$, $x \geq 0$, e $y = \text{sech}^{-1} x$ são apresentados na Figura 7.8c.

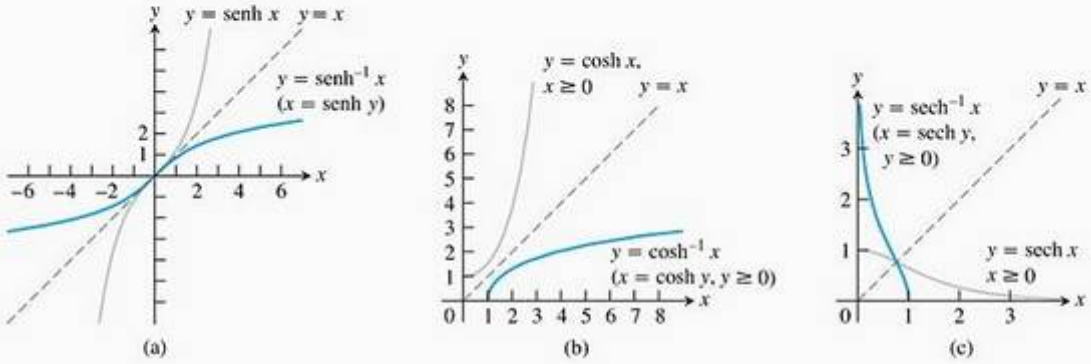


FIGURA 7.8 Os gráficos das inversas de seno, cosseno e secante hiperbólicos de x. Note as simetrias em torno da reta $y = x$.

A tangente, a cotangente e a cossecante hiperbólicas são injetoras em seus domínios, portanto possuem inversas, denotadas por

$$y = \text{tgh}^{-1} x, \qquad y = \text{cotgh}^{-1} x, \qquad y = \text{cosech}^{-1} x.$$

Essas funções estão traçadas na Figura 7.9.

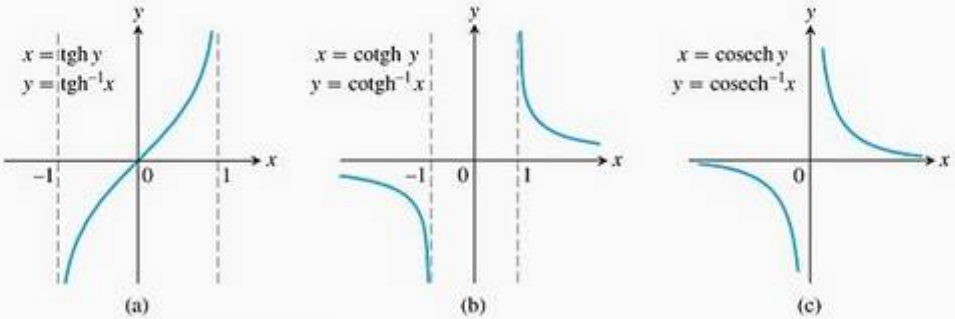


FIGURA 7.9 Os gráficos das inversas de tangente, cotangente e cossecante hiperbólicas de x.

Identidades úteis

Utilizamos as identidades da Tabela 7.7 para calcular os valores de $\text{sech}^{-1} x$, $\text{cosech}^{-1} x$ e $\text{cotgh}^{-1} x$ em calculadoras que nos forneçam apenas $\cosh^{-1} x$, $\text{senh}^{-1} x$ e $\text{tgh}^{-1} x$. Essas identidades são conseqüência direta das definições. Por exemplo, se $0 < x \leq 1$, então

$$\text{sech}\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\cosh\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x$$

ou

TABELA 7.7 Identidades satisfeitas pelas funções hiperbólicas inversas

$\text{sech}^{-1} x$	$= \cosh^{-1} \frac{1}{x}$
$\text{cosech}^{-1} x$	$= \text{senh}^{-1} \frac{1}{x}$
$\text{cotgh}^{-1} x$	$= \text{tgh}^{-1} \frac{1}{x}$

$$\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sech}^{-1} x$$

já que a secante hiperbólica é injetora.

Derivadas e integrais

O principal uso das inversas das funções hiperbólicas está nas integrações que revertem as fórmulas das derivadas da Tabela 7.8.

TABELA 7.8 Derivadas das funções hiperbólicas inversas

$$\frac{d(\operatorname{senh}^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad u > 1$$

$$\frac{d(\operatorname{tgh}^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d(\operatorname{cotgh}^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1$$

$$\frac{d(\operatorname{sech}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{u\sqrt{1-u^2}}, \qquad 0 < u < 1$$

$$\frac{d(\operatorname{cosech}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{|u|\sqrt{1+u^2}}, \qquad u \neq 0$$

As restrições $|u| < 1$ e $|u| > 1$ nas fórmulas derivadas de $\operatorname{tgh}^{-1} u$ e $\operatorname{cotgh}^{-1} u$ originam-se das restrições naturais aos valores dessas funções. (Veja as figuras 7.9a e 7.9b.) A distinção entre $|u| < 1$ e $|u| > 1$ se torna importante quando convertemos as fórmulas derivadas em integrais. Se $|u| < 1$, a integral de $1/(1-u^2)$ é $\operatorname{tgh}^{-1} u + C$. Caso $|u| > 1$, a integral apropriada será $\operatorname{cotgh}^{-1} u + C$.

Ilustraremos como as derivadas das funções hiperbólicas inversas são encontradas no Exemplo 2, no qual calcularemos $d(\cosh^{-1} u)/dx$. As outras derivadas são obtidas por cálculos similares.

Companion Website

Biografia histórica

Sonya Kovalevsky (1850–1891)

EXEMPLO 2 Derivada da inversa de cosseno hiperbólico

Demonstre que, caso u seja uma função derivável de x cujos valores são maiores do que 1, então

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

SOLUÇÃO Primeiro, determinamos a derivada de $y = \cosh^{-1} x$ para $x > 1$ aplicando o Teorema 5 da Seção 3.7, com $f(x) = \cosh x$ e $f^{-1}(x) = \cosh^{-1} x$. O Teorema 5 pode ser aplicado, pois a derivada de $\cosh x$ é positiva para $0 < x$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad \text{Teorema 5, Seção 3.7}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{senh}(\cosh^{-1} x)} \qquad f'(u) = \operatorname{senh} u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1} x) - 1}} \qquad \cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1,\ \operatorname{senh} u = \sqrt{\cosh^2 u - 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \cosh(\cosh^{-1} x) = x$$

Resumidamente,

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

A regra da cadeia fornece o resultado final:

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}$$

Em vez de aplicar o Teorema 5 diretamente, como fizemos no Exemplo 2, podemos também achar a derivada de $y = \cosh^{-1} x$, $x > 1$, usando derivação implícita e a regra da cadeia:

$$y = \cosh^{-1} x$$

$$x = \cosh y \qquad \text{Equação equivalente.}$$

$$1 = \operatorname{senh} y \frac{dy}{dx} \qquad \text{Derivação implícita em relação a } x \text{ e regra da cadeia.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{senh} y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} \qquad \text{Dado } x > 1,\ y > 0 \text{ e } \operatorname{senh} y > 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \cosh y = x$$

Com as substituições apropriadas, as fórmulas das derivadas da Tabela 7.8 nos fornecem as fórmulas das integrais da Tabela 7.9. Cada uma das fórmulas da segunda tabela pode ser verificada derivando-se a expressão do lado direito.

EXEMPLO 3 Utilizando a Tabela 7.9

Calcule

$$\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3 + 4x^2}}$$

SOLUÇÃO A integral indefinida é

$$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{3 + 4x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} \qquad u = 2x,\quad du = 2\,dx,\quad a = \sqrt{3}$$

$$= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad \text{Fórmula da Tabela 7.9}$$

$$= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Portanto,

$$\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3+4x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg]_0^1 = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{senh}^{-1}(0)$$

$$= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 0 \approx 0{,}98665$$

TABELA 7.9 Integrais que conduzem a funções hiperbólicas inversas

1. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad a > 0$

2. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad u > a > 0$

3. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C & \text{se } u^2 < a^2 \\ \frac{1}{a}\operatorname{cotgh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, & \text{se } u^2 > a^2 \end{cases}$

4. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad 0 < u < a$

5. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{cosech}^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C, \qquad u \neq 0 \text{ e } a > 0$

Exercícios 7.4

Valores e identidades das funções hiperbólicas

Cada um dos exercícios 1–4 fornece um valor de senh x ou cosh x. Utilize as definições e a identidade $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ para determinar os valores das outras cinco funções hiperbólicas.

1. $\operatorname{senh} x = -\frac{3}{4}$
2. $\operatorname{senh} x = \frac{4}{3}$
3. $\cosh x = \frac{17}{15}, \quad x > 0$
4. $\cosh x = \frac{13}{5}, \quad x > 0$

Reescreva as expressões dos exercícios 5–10 em termos exponenciais e simplifique os resultados o máximo que puder.

5. $2\cosh(\ln x)$
6. $\operatorname{senh}(2\ln x)$
7. $\cosh 5x + \operatorname{senh} 5x$
8. $\cosh 3x - \operatorname{senh} 3x$
9. $(\operatorname{senh} x + \cosh x)^4$
10. $\ln(\cosh x + \operatorname{senh} x) + \ln(\cosh x - \operatorname{senh} x)$

11. Utilize as identidades

$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

para demonstrar que

(a) $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

(b) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

12. Utilize as definições de cosh x e senh x para demonstrar que

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Derivadas

Nos exercícios 13–24, determine a derivada de y em função da variável adequada.

13. $y = 6\operatorname{senh}\frac{x}{3}$
14. $y = \frac{1}{2}\operatorname{senh}(2x+1)$
15. $y = 2\sqrt{t}\operatorname{tgh}\sqrt{t}$
16. $y = t^2 \operatorname{tgh}\frac{1}{t}$
17. $y = \ln(\operatorname{senh} z)$
18. $y = \ln(\cosh z)$
19. $y = \operatorname{sech}\theta(1 - \ln \operatorname{sech}\theta)$
20. $y = \operatorname{cosech}\theta(1 - \ln \operatorname{cosech}\theta)$
21. $y = \ln\cosh v - \frac{1}{2}\operatorname{tgh}^2 v$
22. $y = \ln\operatorname{senh} v - \frac{1}{2}\operatorname{cotgh}^2 v$
23. $y = (x^2+1)\operatorname{sech}(\ln x)$

(*Dica*: Antes de derivar, expresse em termos de exponenciais e simplifique.)

24. $y = (4x^2 - 1)\operatorname{cosech}(\ln 2x)$

Nos exercícios 25–36, determine a derivada de y em relação à variável apropriada.

25. $y = \operatorname{senh}^{-1} \sqrt{x}$
26. $y = \cosh^{-1} 2\sqrt{x+1}$
27. $y = (1-\theta)\operatorname{tgh}^{-1}\theta$
28. $y = (\theta^2 + 2\theta)\operatorname{tgh}^{-1}(\theta+1)$
29. $y = (1-t)\operatorname{cotgh}^{-1}\sqrt{t}$
30. $y = (1-t^2)\operatorname{cotgh}^{-1} t$
31. $y = \cos^{-1} x - x\operatorname{sech}^{-1} x$
32. $y = \ln x + \sqrt{1-x^2}\operatorname{sech}^{-1} x$
33. $y = \operatorname{cosech}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\theta}$
34. $y = \operatorname{cosech}^{-1} 2^{\theta}$
35. $y = \operatorname{senh}^{-1}(\operatorname{tg} x)$
36. $y = \cosh^{-1}(\sec x), \quad 0 < x < \pi/2$

Fórmulas de integração

Verifique as fórmulas de integração nos exercícios 37–40.

37. (a) $\int \operatorname{sech} x\, dx = \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{senh} x) + C$

(b) $\int \operatorname{sech} x\, dx = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{tgh} x) + C$

38. $\int x\operatorname{sech}^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sech}^{-1} x - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$

39. $\int x\operatorname{cotgh}^{-1} x\, dx = \frac{x^2-1}{2}\operatorname{cotgh}^{-1} x + \frac{x}{2} + C$

40. $\int \operatorname{tgh}^{-1} x\, dx = x\operatorname{tgh}^{-1} x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$

Integrais indefinidas

Calcule as integrais nos exercícios 41–50.

41. $\int \operatorname{senh} 2x\, dx$
42. $\int \operatorname{senh}\frac{x}{5}\, dx$
43. $\int 6\cosh\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right) dx$
44. $\int 4\cosh(3x - \ln 2)\, dx$
45. $\int \operatorname{tgh}\frac{x}{7}\, dx$
46. $\int \operatorname{cotgh}\frac{\theta}{\sqrt{3}}\, d\theta$
47. $\int \operatorname{sech}^2\left(x - \frac{1}{2}\right) dx$
48. $\int \operatorname{cosech}^2(5-x)\, dx$
49. $\int \frac{\operatorname{sech}\sqrt{t}\operatorname{tgh}\sqrt{t}\, dt}{\sqrt{t}}$
50. $\int \frac{\operatorname{cosech}(\ln t)\operatorname{cotgh}(\ln t)\, dt}{t}$

Integrais definidas

Calcule as integrais nos exercícios 51–60.

51. $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \operatorname{cotgh} x\, dx$
52. $\int_0^{\ln 2} \operatorname{tgh} 2x\, dx$
53. $\int_{-\ln 4}^{-\ln 2} 2e^{\theta}\cosh\theta\, d\theta$
54. $\int_0^{\ln 2} 4e^{-\theta}\operatorname{senh}\theta\, d\theta$
55. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cosh(\operatorname{tg}\theta)\sec^2\theta\, d\theta$
56. $\int_0^{\pi/2} 2\operatorname{senh}(\operatorname{sen}\theta)\cos\theta\, d\theta$
57. $\int_1^2 \frac{\cosh(\ln t)}{t}\, dt$
58. $\int_1^4 \frac{8\cosh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$
59. $\int_{-\ln 2}^{0} \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$
60. $\int_0^{\ln 10} 4\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Calculando inversas de funções hiperbólicas e integrais relacionadas

Quando as teclas de função hiperbólica não estão disponíveis em uma calculadora, é possível ainda calcular funções hiperbólicas inversas expressando-as como logaritmos, conforme mostrado aqui.

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad -\infty < x < \infty$$
$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad x \geq 1$$
$$\operatorname{tgh}^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \qquad |x| < 1$$
$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \qquad 0 < x \leq 1$$
$$\operatorname{cosech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \qquad x \neq 0$$
$$\operatorname{cotgh}^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \qquad |x| > 1$$

Utilize as fórmulas da tabela anterior para expressar os números nos exercícios 61–66 em termos de logaritmos naturais.

61. $\operatorname{senh}^{-1}(-5/12)$
62. $\cosh^{-1}(5/3)$
63. $\operatorname{tgh}^{-1}(-1/2)$
64. $\operatorname{cotgh}^{-1}(5/4)$
65. $\operatorname{sech}^{-1}(3/5)$
66. $\operatorname{cosech}^{-1}(-1/\sqrt{3})$

Calcule as integrais nos exercícios 67–74 em termos de

(a) funções hiperbólicas inversas.

(b) logaritmos naturais.

67. $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$
68. $\int_0^{1/3} \frac{6\, dx}{\sqrt{1+9x^2}}$
69. $\int_{5/4}^{2} \frac{dx}{1-x^2}$
70. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$
71. $\int_{1/5}^{3/13} \frac{dx}{x\sqrt{1-16x^2}}$
72. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$
73. $\int_0^{\pi} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$
74. $\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$

Aplicações e teoria

75. (a) Demonstre que, se uma função f for definida em um intervalo simétrico em relação à origem (de modo que f seja definida em $-x$ sempre que for definida em x), então

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \qquad (1)$$

Demonstre então que $(f(x) + f(-x))/2$ é par e que $(f(x) - f(-x))/2$ é ímpar.

(b) A Equação (1) simplifica-se consideravelmente se f, por si só, for (i) par ou (ii) ímpar. Quais seriam as novas equações? Justifique suas respostas.

76. Deduza a fórmula $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $-\infty < x < \infty$. Explique em sua dedução por que o sinal de mais, em vez do sinal de menos, é utilizado na raiz quadrada.

77. **Pára-quedismo** Se um corpo de massa m cai, a partir do repouso, sob ação da gravidade e encontra resistência do ar proporcional ao quadrado de sua velocidade, então a velocidade do corpo t segundos após o início da queda satisfaz a equação diferencial

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

onde k é uma constante que depende das propriedades aerodinâmicas do corpo e da densidade do ar. (Presumimos que a queda seja curta o suficiente para que as variações na densidade do ar não afetem o resultado final significativamente.)

(a) Demonstre que

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\operatorname{tgh}\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t\right)$$

satisfaz a equação diferencial e a condição inicial de que $v = 0$ quando $t = 0$.

(b) Determine a *velocidade terminal* do corpo, $\lim_{t\to\infty} v$.

(c) Para um pára-quedista que pesa 160 libras, com o tempo medido em segundos e a distância em pés, um valor típico para k é 0,005. Qual é a velocidade terminal do pára-quedista?

78. **Acelerações cuja magnitude é proporcional ao deslocamento** Suponha que a posição de um corpo que se desloca sobre um eixo coordenado no momento t seja

(a) $s = a\cos kt + b\operatorname{sen} kt$

(b) $s = a\cosh kt + b\operatorname{senh} kt$

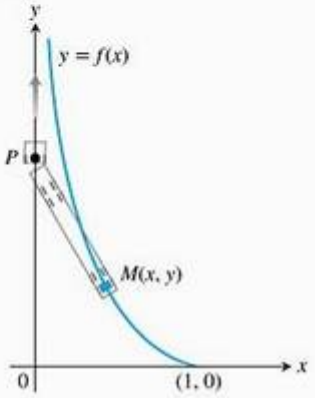
Demonstre que, em ambos os casos, a aceleração d^2s/dt^2 é proporcional a s, mas que, no primeiro caso, é direcionada para a origem, ao passo que, no segundo, é direcionada para longe da origem.

79. **Carretas e a tractriz** Quando uma carreta faz uma curva, suas rodas traseiras seguem uma curva como a apresentada a seguir. (É por isso que, algumas vezes, as rodas traseiras sobem na guia.) Podemos encontrar uma equação para a curva se imaginarmos as rodas traseiras como uma massa M no ponto $(1, 0)$ sobre o eixo x, unidas por uma barra de comprimento unitário a um ponto P que representa a cabine na origem. Conforme o ponto P se desloca para cima no eixo y, arrasta M consigo. Pode-se demonstrar que a curva descrita por M — denominada *tractrix*, palavra derivada do latim *tractum*: arrastar, tracionar — é o gráfico da função $y = f(x)$ que resolve o problema de valor inicial

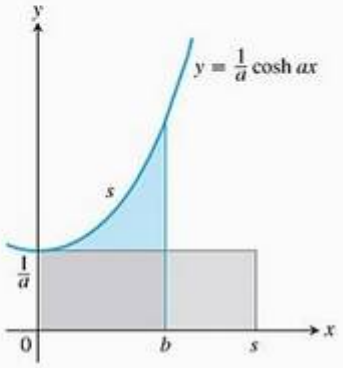
Equação diferencial: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Condição inicial: $y = 0$ quando $x = 1$.

Resolva o problema de valor inicial para encontrar uma equação para a curva. (Você precisa de uma função hiperbólica inversa.)



80. **Área** Demonstre que a área da região do primeiro quadrante determinada pela curva $y = (1/a)\cosh ax$, pelos eixos de coordenadas e pela vreta $x = b$ é a mesma que a área de um retângulo de altura $1/a$ e comprimento s, sendo s o tamanho da curva de $x = 0$ até $x = b$. (Veja a figura a seguir.)

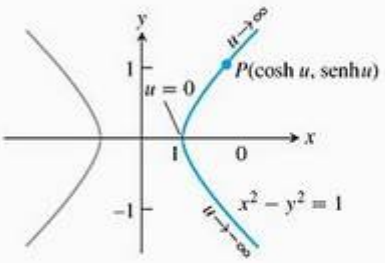


81. **Volume** Uma região do primeiro quadrante é limitada acima pela curva $y = \cosh x$, abaixo pela curva $y = \operatorname{senh} x$ e à esquerda e à direita pelo eixo y e pela reta $x = 2$, respectivamente. Determine o volume do sólido gerado pela rotação dessa região em torno do eixo x.

82. **Volume** A região delimitada pela curva $y = \operatorname{sech} x$, o eixo x e as retas $x = \pm\ln\sqrt{3}$ é girada em torno do eixo x e gera um sólido. Determine o volume desse sólido.

83. **Comprimento de um arco** Determine o comprimento do segmento da curva $y = (1/2)\cosh 2x$ de $x = 0$ até $x = \ln\sqrt{5}$.

84. **A hipérbole nas funções hiperbólicas** Caso esteja se perguntando de onde vem o nome *hiperbólica*, eis a resposta: assim como $x = \cos u$ e $y = \operatorname{sen} u$ são identificados por pontos (x, y) no círculo trigonométrico, as funções $x = \cosh u$ e $y = \operatorname{senh} u$ são identificadas por pontos (x, y) no ramo direito da hipérbole unitária, $x^2 - y^2 = 1$.



Uma vez que $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$, o ponto $(\cosh u, \operatorname{senh} u)$ está no ramo direito da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ para todos os valores de u (Exercício 84).

Outra analogia entre as funções hiperbólicas e circulares é o fato de a variável u, nas coordenadas $(\cosh u, \operatorname{senh} u)$ dos pontos do ramo direito da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, ser o dobro da área do setor AOP ilustrado na figura a seguir. Para verificar o porquê disso, siga os passos indicados.

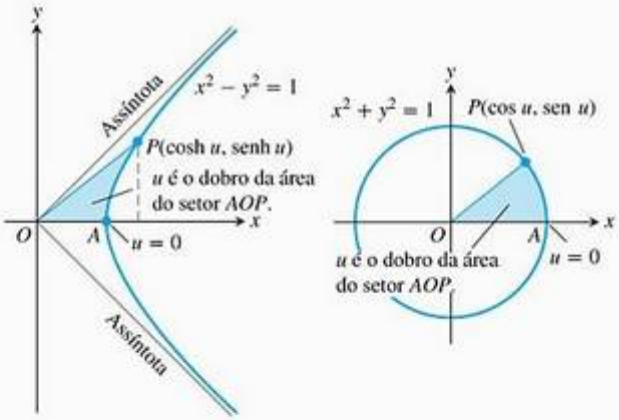
(a) Demonstre que a área $A(u)$ do setor AOP é dada por

$$A(u) = \frac{1}{2}\cosh u \operatorname{senh} u - \int_1^{\cosh u} \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

(b) Derive ambos os lados da equação no item **(a)** em relação a u para demonstrar que

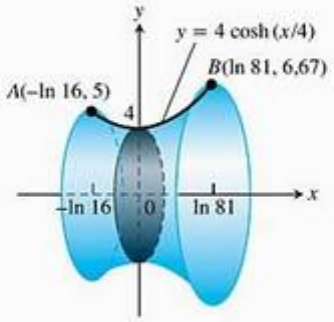
$$A'(u) = \frac{1}{2}$$

(c) Resolva essa última equação para $A(u)$. Qual é o valor de $A(0)$? Qual é o valor da constante de integração C na sua solução? Com C determinada, o que a sua solução indica sobre a relação entre u e $A(u)$?



Uma das analogias entre as funções hiperbólicas e circulares é revelada por esses dois diagramas (Exercício 84).

85. Uma superfície mínima Determine a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, da curva $y = 4\cosh(x/4)$, $-\ln 16 \le x \le \ln 81$.



Pode ser demonstrado que, de todas as curvas continuamente deriváveis que unem os pontos A e B na figura, a curva $y = 4\cosh(x/4)$ gera a superfície de menor área. Se você fizer moldes de arame no formato dos dois círculos das extremidades, aqueles que passam por A e por B, e mergulhá-los em uma solução de água com sabão, a superfície que se formará entre os círculos será aquela gerada pela rotação da curva.

86. (a) Determine o centróide da curva $y = \cosh x$, $-\ln 2 \le x \le \ln 2$.

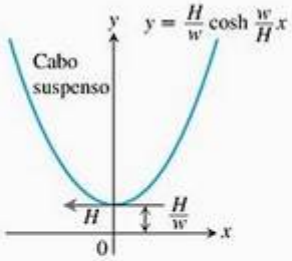
T

(b) Calcule as coordenadas com duas casas decimais. Em seguida, esboce a curva e insira o centróide para demonstrar sua relação com ela.

Cabos suspensos

87. Imagine um cabo, como de telefone ou de TV, preso por dois suportes e solto entre eles. O peso do cabo por unidade de comprimento w e a tensão horizontal em seu ponto mais baixo é um vetor de módulo H. Caso adotemos um sistema cartesiano para o plano do cabo no qual o eixo x seja horizontal, a força da gravidade estará direcionada para baixo, os pontos do eixo y positivo estarão direcionados para cima e o ponto mais baixo do cabo estará em $y = H/w$ no eixo y (veja a figura a seguir), então pode-se demonstrar que o cabo acompanha o gráfico do cosseno hiperbólico

$$y = \frac{H}{w}\cosh\frac{w}{H}x$$



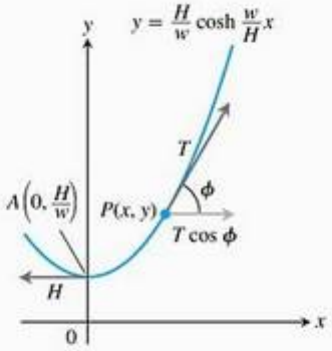
Tal curva às vezes é denominada **curva de corrente** ou **catenária**; esse último termo vem do latim *catena*, que significa "corrente".

(a) Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer no cabo. A figura a seguir apresenta a tensão em P como um vetor de módulo

T, bem como a tensão H em seu ponto mais baixo A. Demonstre que o coeficiente angular do cabo em P é

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{dy}{dx} = \operatorname{senh} \frac{w}{H} x$$

(b) Utilizando o resultado do item **(a)** e o fato de que a tensão horizontal em P deve ser igual a H (o cabo não está se movendo), demonstre que $T = wy$. Isso significa que o módulo da tensão em $P(x, y)$ é exatamente igual ao peso de y unidades do cabo.



88. (*Continuação do Exercício 87.*) O comprimento do arco AP na figura do Exercício 87 é $s = (1/a) \operatorname{senh} ax$, onde $a = w/H$. Demonstre que as coordenadas de P podem ser expressas em termos de s da seguinte maneira

$$x = \frac{1}{a} \operatorname{senh}^{-1} as, \qquad y = \sqrt{s^2 + \frac{1}{a^2}}$$

89. O arqueamento e a tensão horizontal de um cabo As extremidades de um cabo de 32 pés de comprimento que pesa 2 libras por pé estão presas na mesma altura a postes que distam 30 pés um do outro.

(a) Modele o cabo de acordo com a equação

$$y = \frac{1}{a} \cosh ax, \quad -15 \le x \le 15$$

Utilize as informações do Exercício 88 para demonstrar que a satisfaz a equação

$$16a = \operatorname{senh} 15a \qquad (2)$$

(b) Resolva a Equação (2) graficamente estimando as coordenadas dos pontos nos quais os gráficos das equações $y = 16a$ e $y = \operatorname{senh} 15a$ cruzam-se no plano ay.

(c) Resolva a Equação (2) numericamente para a. Compare a solução com o valor determinado no item **(b)**.

(d) Estime a tensão horizontal no cabo no ponto mais baixo dele.

(e) Utilizando o valor encontrado para a no item **(c)**, faça o gráfico da catenária

$$y = \frac{1}{a} \cosh ax$$

ao longo do intervalo $-15 \le x \le 15$. Estime o arqueamento do cabo em seu centro.

Questões de revisão

1. Como a função logaritmo natural é definida como uma integral? Qual é seu domínio, sua imagem e sua derivada? Quais propriedades aritméticas ela possui? Fale sobre seu gráfico.

2. Que integrais geram logaritmos? Exemplifique.

3. Como a função exponencial e^x é definida? Qual é seu domínio, sua imagem e sua derivada? A que leis de expoentes ela obedece? Fale sobre seu gráfico.

4. Como as funções a^x e $\log_a x$ são definidas? Há alguma restrição em a? Como o gráfico de $\log_a x$ está relacionado com o de $\ln x$? O que há de verdade na afirmação de que realmente só há uma função exponencial e uma função logarítmica?

5. O que é lei de variação exponencial? Como ela pode ser deduzida a partir de um problema de valor inicial? Cite algumas das aplicações dessa lei.

6. Como podemos comparar taxas de crescimento de funções positivas quando $x \to \infty$?

7. Quais papéis as funções e^x e $\ln x$ desempenham em comparações de crescimento?

8. Descreva as notações ozinho e ozão. Dê exemplos.

9. O que é mais eficiente: uma busca seqüencial ou uma busca binária? Explique.

10. Quais são as seis funções hiperbólicas básicas? Fale sobre seu domínio, suas imagens e seus gráficos. Cite algumas das identidades que as relacionam.

11. Quais são as derivadas das seis funções hiperbólicas básicas? Quais são as fórmulas integrais correspondentes? Que analogias você percebe aqui com as seis funções trigonométricas básicas?

12. Como são definidas as funções hiperbólicas inversas básicas? Fale sobre seus domínios, suas imagens e seu gráfico. Como você pode determinar valores para $\operatorname{sech}^{-1} x$, $\operatorname{cosech}^{-1} x$ e $\operatorname{cotg}^{-1} x$ utilizando as teclas de uma calculadora para $\cosh^{-1} x$, $\operatorname{senh}^{-1} x$ e $\operatorname{tgh}^{-1} x$?

13. Que integrais geram naturalmente funções hiperbólicas?

Exercícios práticos

Integração

Calcule as integrais dos exercícios 1–12.

1. $\int e^x \operatorname{sen}(e^x)\, dx$
2. $\int e^t \cos(3e^t - 2)\, dt$
3. $\int_0^{\pi} \operatorname{tg} \frac{x}{3}\, dx$
4. $\int_{1/6}^{1/4} 2 \operatorname{cotg} \pi x\, dx$
5. $\int_{-\pi/2}^{\pi/6} \frac{\cos t}{1 - \operatorname{sen} t}\, dt$
6. $\int \frac{dv}{v \ln v}$
7. $\int \frac{\ln(x-5)}{x-5}\, dx$
8. $\int \frac{\cos(1 - \ln v)}{v}\, dv$
9. $\int_1^7 \frac{3}{x}\, dx$
10. $\int_1^{32} \frac{1}{5x}\, dx$
11. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\, dx$
12. $\int_2^4 (1 + \ln t)t \ln t\, dt$

Resolvendo equações com termos logarítmicos ou exponenciais

Nos exercícios 13–16, determine y.

13. $3^y = 2^{y+1}$
14. $4^{-y} = 3^{y+2}$
15. $9e^{2y} = x^2$
16. $3^y = 3 \ln x$

Comparando taxas de crescimento de funções

17. f cresce mais rápido, mais devagar, ou à mesma taxa que g quando $x \to \infty$? Justifique suas respostas.

    (a) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_3$
    (b) $f(x) = x$, $g(x) = x +$
    (c) $f(x) = x/100$, $g(x) = xe^{-x}$
    (d) $f(x) = x$, $g(x) = \operatorname{tg}^{-1}$
    (e) $f(x) = \operatorname{cosec}^{-1} x$, $g(x) = 1/x$
    (f) $f(x) = \operatorname{senh} x$, $g(x) = e^x$

18. f cresce mais rápido, mais devagar, ou à mesma taxa que g quando $x \to \infty$? Justifique suas respostas.

    (a) $f(x) = 3^{-x}$, $g(x) = 2^{-x}$
    (b) $f(x) = \ln 2x$, $g(x) = \ln x^2$
    (c) $f(x) = 10x^3 + 2x^2$, $g(x) = e^x$
    (d) $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}(1/x)$, $g(x) = 1/x$
    (e) $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(1/x)$, $g(x) = 1/x^2$
    (f) $f(x) = \operatorname{sech} x$, $g(x) = e^{-x}$

19. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.

    (a) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$
    (b) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = O\left(\frac{1}{x^4}\right)$
    (c) $x = o(x + \ln x)$
    (d) $\ln(\ln x) = o(\ln x)$
    (e) $\operatorname{tg}^{-1} x = O(1)$
    (f) $\cosh x = O(e^x)$

20. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.

    (a) $\frac{1}{x^4} = O\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$
    (b) $\frac{1}{x^4} = o\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$
    (c) $\ln x = o(x + 1)$
    (d) $\ln 2x = O(\ln x)$
    (e) $\sec^{-1} x = O(1)$
    (f) $\operatorname{senh} x = O(e^x)$

Teoria e aplicações

21. A função $f(x) = e^x + x$, sendo derivável e injetora, tem uma inversa derivável $f^{-1}(x)$. Determine o valor de df^{-1}/dx no ponto $f(\ln 2)$.

22. Determine a inversa da função $f(x) = 1 + (1/x)$, $x \neq 0$. Em seguida, mostre que $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ e que

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{f(x)} = \frac{1}{f'(x)}$$

23. Uma partícula se desloca para cima e para a direita ao longo da curva $y = \ln x$. Sua abscissa aumenta à taxa $(dx/dt) = \sqrt{x}$ m/s. A que taxa a ordenada está variando no ponto $(e^2, 2)$?

24. Uma garota está escorregando em um escorregador com o formato da curva $y = 9e^{-x/3}$. Sua ordenada varia a uma taxa $dy/dt = (-1/4)\sqrt{9 - y}$ pés/s. A que taxa aproximadamente sua abscissa estará variando quando ela alcançar a parte inferior do escorregador em $x = 9$ pés? (Considere e^3 como 20 e aproxime sua resposta para um valor inteiro de pés por segundo.)

25. As funções $f(x) = \ln 5x$ e $g(x) = \ln 3x$ diferem por uma constante. Que constante é esta? Justifique sua resposta.

26. (a) Se $(\ln x)/x = (\ln 2)/2$, deve ser $x = 2$?
    (b) Se $(\ln x)/x = -2 \ln 2$, deve ser $x = 1/2$?

    Justifique suas respostas.

27. A razão $(\log_4 x)/(\log_2 x)$ tem um valor constante. Qual é este valor? Justifique sua resposta.

28. **$\log_x(2)$ contra $\log_2(x)$** Compare $f(x) = \log_x(2)$ e $g(x) = \log_2(x)$ seguindo os passos indicados.

    (a) Use a equação $\log_a b = (\ln b)/(\ln a)$ para expressar $f(x)$ e $g(x)$ em termos do logaritmo natural.
    (b) Faça os gráficos de f e g juntos. Comente o comportamento de f em relação aos sinais e aos valores de g.

29. Qual é a idade de uma amostra de carvão na qual 90% do carbono 14 originalmente presente já decaiu?

30. **Esfriando uma torta** Uma torta de maçã, cuja temperatura interna era de 220 °F, quando tirada do forno, foi colocada numa varanda com temperatura de 40 °F para esfriar. Depois de 15 minutos, a temperatura interna da torta era de 180 °F. Quanto tempo levou para que a temperatura baixasse de 180 °F para 70°F?

Exercícios adicionais

1. Seja $A(t)$ a área da região no primeiro quadrante delimitada pelos eixos de coordenadas, pela curva $y = e^{-x}$ e pela reta vertical $x = t$, $t > 0$. Seja $V(t)$ o volume do sólido gerado pela rotação dessa região em torno do eixo x. Determine os seguintes limites.

   (a) $\lim_{t\to\infty} A(t)$ (b) $\lim_{t\to\infty} V(t)/A(t)$ (c) $\lim_{t\to 0^+} V(t)/A(t)$

2. **Variando a base de um logaritmo**

   (a) Determine $\lim \log_a 2$ quando $a \to 0^+, 1^-, 1^+$ e ∞.

   (b) Faça o gráfico de $y = \log_a 2$ em função de a ao longo do intervalo $0 < a \le 4$.

3. Determine $f'(2)$ se $f(x) = e^{g(x)}$ e $g(x) = \int_2^x \frac{t}{1+t^4}\,dt$

4. (a) Determine df/dx se

$$f(x) = \int_1^{e^x} \frac{2\ln t}{t}\,dt$$

   (b) Determine $f(0)$.

   (c) O que você pode concluir a respeito do gráfico de f? Justifique sua resposta.

5. **Decomposições par-ímpar**

   (a) Suponha que g seja uma função par de x e h uma função ímpar de x. Demonstre que, se $g(x) + h(x) = 0$ para qualquer x, então $g(x) = 0$ para qualquer x e $h(x) = 0$ para qualquer x.

   (b) Use o resultado do item (a) para demonstrar que, se $f(x) = f_E(x) + f_O(x)$ é a soma de uma função ímpar $f_E(x)$ e uma função ímpar $f_O(x)$, então

$$f_E(x) = (f(x) + f(-x))/2 \quad \text{e} \quad f_O(x) = (f(x) - f(-x))/2$$

   (c) Qual é o significado do resultado no item (b)?

6. Seja g uma função derivável ao longo de todo um intervalo aberto que contém a origem. Suponha que g apresente as seguintes propriedades:

   i. $g(x + y) = \dfrac{g(x) + g(y)}{1 - g(x)g(y)}$ para quaisquer números reais x, y e $x + y$ no domínio de g.

   ii. $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$

   iii. $\lim_{h\to 0} \dfrac{g(h)}{h} = 1$

   (a) Demonstre que $g(0) = 0$.

   (b) Demonstre que $g'(x) = 1 + [g(x)]^2$.

   (c) Determine $g(x)$ resolvendo a equação diferencial do item (b).

7. **Centro de massa** Determine o centro de massa de uma placa fina de densidade constante que cobre a região, no primeiro e quarto quadrantes, delimitada pelas curvas $y = 1/(1 + x^2)$ e $y = -1/(1 + x^2)$ e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

8. **Sólido de revolução** A região entre a curva $y = 1/(2\sqrt{x})$ e o eixo x de $x = 1/4$ até $x = 4$ é girada em torno do eixo x, gerando um sólido.

   (a) Determine o volume do sólido.

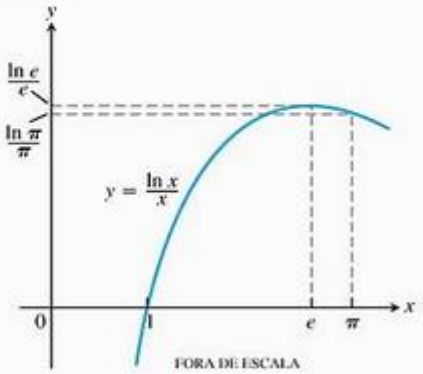
   (b) Determine o centróide da região.

9. **A regra dos 70** Se você usar a aproximação $\ln 2 \approx 0{,}70$ (em vez de 0,69314...), poderá deduzir uma regra que diz: "Para estimar quantos anos uma soma de dinheiro levará para dobrar investindo-se a r por cento composto continuamente, divida 70 por r". Por exemplo, uma quantia investida a 5% dobrará em aproximadamente $70/5 = 14$ anos. Para conseguir o mesmo em 10 anos, você deverá investir a $70/10 = 7\%$. Mostre como a regra dos 70 é deduzida. (Uma regra semelhante, a "regra dos 72" usa 72 em vez de 70, porque 72 tem mais fatores inteiros.)

10. $\pi^e < e^\pi$

   (a) Por que a figura a seguir "prova" que $\pi^e < e^\pi$? (*Fonte*: "Proof without words", de Fouad Nakhil, *Mathematics Magazine*, v. 60, n. 3, jun. 1987, p. 165.)

   (b) A figura a seguir considera que $f(x) = (\ln x)/x$ possui um máximo absoluto em $x = e$. Como você sabe que isso ocorre?



Exercícios avançados

1. Se $a > 1$, pode-se calcular aproximações M e m para ln a satisfazendo $m < \ln a < M$ da seguinte forma: (i) divide-se o intervalo $[1, a]$ em n partes iguais usando pontos $x_0 = 1$, $x_{j+1} = x_j + (a - 1)/n$, $j = 0,1, ..., n - 1$, (ii) calcula-se M integrando-se em $[1, a]$ a função que em cada intervalo $[x_{j-1}, x_j[$ é constante e igual a $1/x_{j-1}$, e calcula-se m integrando-se em $[1, a]$ a função que em cada intervalo $[x_{j-1}, x_j[$ é constante e igual a $1/x_j$.
   (a) Represente graficamente em termos de áreas o valor de ln a, M e m.
   (b) Ache uma fórmula para M e para m.
   (c) Determine um valor de n de forma que o erro absoluto cometido ao aproximar ln 2 por m fique menor que 10^{-1}, e calcule essa aproximação.

Como vimos nos exercícios do Capítulo 4, se f for uma função com derivadas contínuas de ordem 1, 2, ..., $n + 1$ em uma vizinhança de a,

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

é o polinômio de Taylor de ordem de n de f em torno de a. Lembre-se de que, nesse caso,

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(b)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n-1)!}$$

em que b está entre x e a.

2. Mostre que se f tiver derivadas contínuas até ordem $k + 1$, $|f(a + 1/t) - p_k(a + 1/t)| = O(1/t^{k+1})$ quando $t \to \infty$.
3. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 em torno de $a = 0$ de $f(x) = e^x$. Determine uma aproximação de $f(0,5)$ e delimite o erro cometido.

Nos exercícios 4 e 5, f e g são funções positivas tais que f cresce na mesma taxa que x^p e g cresça na mesma taxa que x^q quando $x \to \infty$.

4. Se $h(x) = f(x) + g(x)$ cresce na mesma taxa que x^m quando $x \to \infty$, qual é a relação entre m, p e q? O que aconteceria se permitíssemos que as funções f e g fossem negativas, embora não nulas?
5. Se $h(x) = f(x)/g(x)$ cresce na mesma taxa que x^m quando $x \to \infty$, qual é a relação entre m, p e q? O que aconteceria se permitíssemos que as funções f e g fossem negativas, embora não nulas?
6. Calcule a derivada de $f(x) = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x|$. Qual fórmula de integração você obteve?
7. Mostre que $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$ e que $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$.
8. Determine um ponto do gráfico de $f(x) = e^{2x}$ cuja reta tangente ao gráfico nesse ponto passe pela origem. Esboce o gráfico de f e da reta tangente. Existem outros pontos com essa propriedade?
9. Encontre o retângulo de maior área que pode ser inscrito sob a curva $y = e^{-x^2}$, no primeiro e segundo quadrantes, com um lado sobre o eixo x.
10. A tractriz é a curva definida por
$$y = a \operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}, \; a > 0.$$
Encontre y' e a reta tangente L a um ponto P da curva. Mostre que se L intercepta o eixo y em um ponto Q, então a distância entre P e Q é a.
11. Desenha-se uma reta L passando pelo vértice $(0, a)$ da catenária $y = a \cosh \frac{x}{a}$ e perpendicular à reta tangente à catenária em um ponto P. Mostre que o comprimento do segmento de L determinado pelos eixos coordenados é igual à ordenada y do ponto P.
12. Mostre que $\operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{senh} x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{tgh} x)$.

8 Técnicas de integração

RESUMO O teorema fundamental relaciona primitivas e a integral definida. Calcular a integral indefinida

$$\int f(x)\,dx$$

equivale a encontrar uma função F tal que $F'(x) = f(x)$ e, em seguida, adicionar uma constante arbitrária C:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Neste capítulo, estudaremos uma série de técnicas importantes para determinar integrais indefinidas de funções mais complicadas do que aquelas vistas até agora. O objetivo deste capítulo é mostrar como transformar integrais desconhecidas em integrais que possamos reconhecer, para depois procurá-las em uma tabela ou calculá-las no computador. Também ampliaremos o conceito de integral definida, que passará a incluir *integrais impróprias*, aquelas em que o integrando pode não ser limitada ao longo do intervalo de integração, ou o intervalo em si pode não ser mais finito.

8.1 Fórmulas de integração básica

Para ajudar na determinação de integrais indefinidas, será bom montar uma tabela de fórmulas de integrais invertendo as fórmulas para derivadas, como já fizemos em capítulos anteriores. Depois de pronta essa tabela, tentaremos comparar as integrais que encontrarmos com um dos tipos-padrão. Isso normalmente envolve um pouco de manipulação algébrica, bem como o uso da regra da substituição.

Relembre a regra da substituição, vista na Seção 5.5:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

onde $u = g(x)$ é uma função derivável cuja imagem é um intervalo I, e f é contínua em I. O sucesso na integração muitas vezes depende da habilidade de identificar qual parte do integrando deve ser chamada de u, para que também tenhamos du, de modo que uma fórmula conhecida possa ser aplicada. Isso significa que o primeiro requisito para saber integrar bem é o domínio completo das fórmulas de derivação.

A Tabela 8.1 mostra as formas básicas das integrais que calculamos até agora. Nesta seção, apresentaremos vários métodos algébricos ou de substituição

que nos ajudarão a usar essa tabela. Há outra mais extensa no final deste livro; seu uso será discutido na Seção 8.6.

TABELA 8.1 Fórmulas de integração básica

1. $\int du = u + C$
2. $\int k\,du = ku + C$ (qualquer número k)
3. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$
4. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$
5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
8. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$
9. $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u + C$
10. $\int \sec u \operatorname{tg} u\,du = \sec u + C$
11. $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\,du = -\operatorname{cosec} u + C$
12. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$
13. $\int \operatorname{cotg} u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C = -\ln|\operatorname{cosec} u| + C$
14. $\int e^u\,du = e^u + C$
15. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1)$
16. $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$
17. $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$
18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$
19. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$
20. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\left|\dfrac{u}{a}\right| + C$
21. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C \qquad (a > 0)$
22. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C \qquad (u > a > 0)$

Freqüentemente, precisamos reescrever uma integral para que esta se encaixe em uma fórmula-padrão.

EXEMPLO 1 Realizando uma substituição para simplificar

Calcule

$$\int \frac{2x - 9}{\sqrt{x^2 - 9x + 1}}\,dx$$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x - 9}{\sqrt{x^2 - 9x + 1}}\,dx &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} && u = x^2 - 9x + 1,\ du = (2x - 9)\,dx. \\
&= \int u^{-1/2}\,du \\
&= \frac{u^{(-1/2)+1}}{(-1/2) + 1} + C && \text{Fórmula 4 da Tabela 8.1 com } n = -1/2 \\
&= 2u^{1/2} + C \\
&= 2\sqrt{x^2 - 9x + 1} + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Completando o quadrado

Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}}$$

SOLUÇÃO Completamos o quadrado para simplificar o denominador:

$$\begin{aligned} 8x - x^2 &= -(x^2 - 8x) = -(x^2 - 8x + 16 - 16) \\ &= -(x^2 - 8x + 16) + 16 = 16 - (x - 4)^2 \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{16 - (x - 4)^2}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} && a = 4,\ u = (x - 4),\ du = dx \\ &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C && \text{Fórmula 18 da Tabela 8.1} \\ &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - 4}{4}\right) + C \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Expandindo uma potência e usando uma identidade trigonométrica

Calcule

$$\int (\sec x + \operatorname{tg} x)^2\, dx$$

SOLUÇÃO Expandimos o integrando e temos

$$(\sec x + \operatorname{tg} x)^2 = \sec^2 x + 2 \sec x \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x$$

Os primeiros dois termos do lado direito da equação são conhecidos; podemos integrá-los imediatamente. Mas e $\operatorname{tg}^2 x$? Existe uma identidade que relaciona $\operatorname{tg}^2 x$ a $\sec^2 x$:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x, \quad \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$

Substituímos $\operatorname{tg}^2 x$ por $\sec^2 x - 1$ e obtemos

$$\begin{aligned} \int (\sec x + \operatorname{tg} x)^2\, dx &= \int (\sec^2 x + 2 \sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x - 1)\, dx \\ &= 2\int \sec^2 x\, dx + 2\int \sec x \operatorname{tg} x\, dx - \int 1\, dx \\ &= 2 \operatorname{tg} x + 2 \sec x - x + C \end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Eliminando uma raiz quadrada

Calcule

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\, dx$$

SOLUÇÃO Usamos a identidade

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \text{ou} \qquad 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$$

Com $\theta = 2x$, essa identidade se torna

$$1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\, dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\, dx \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\, dx && \sqrt{u^2} = |u| \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx && \text{Em } [0, \pi/4],\ \cos 2x \geq 0, \text{ então } |\cos 2x| = \cos 2x. \\
&= \sqrt{2}\left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^{\pi/4} && \text{Fórmula 7 da Tabela 8.1; } u = 2x \text{ e } du = 2\,dx \\
&= \sqrt{2}\left[\frac{1}{2} - 0\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Reduzindo uma fração imprópria

Calcule

$$\int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2}\, dx$$

SOLUÇÃO O integrando é uma fração imprópria (grau do numerador maior ou igual ao grau do denominador). Para integrá-lo, dividimos primeiro, obtendo um quociente mais um resto que é uma fração própria:

$$\begin{array}{r|l}
3x^2 - 7x & 3x + 2 \\ \cline{2-2}
-3x^2 - 2x & x - 3 \\ \cline{1-1}
-9x & \\
+9x + 6 & \\ \cline{1-1}
6 &
\end{array}$$

$$\frac{3x^2 - 7x}{3x + 2} = x - 3 + \frac{6}{3x + 2}$$

Então,

$$\int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2}\, dx = \int \left(x - 3 + \frac{6}{3x + 2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln|3x + 2| + C$$

Reduzir uma fração imprópria por meio de uma divisão longa (Exemplo 5) nem sempre nos leva a uma expressão que podemos integrar diretamente. Veremos o que fazer com relação a isso na Seção 8.5.

EXEMPLO 6 Separando uma fração

Calcule

$$\int \frac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

SOLUÇÃO Primeiro separamos o integrando para obter

$$\int \frac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = 3\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Na primeira dessas novas integrais, substituímos

$$u = 1 - x^2, \qquad du = -2x\,dx \qquad \text{e} \qquad x\,dx = -\frac{1}{2}\,du.$$

$$3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 3\int \frac{(-1/2)\,du}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{2}\int u^{-1/2}\,du$$
$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + C_1 = -3\sqrt{1-x^2} + C_1$$

A segunda das novas integrais é uma forma-padrão:

$$2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\,\text{sen}^{-1}x + C_2$$

Combinando esses resultados e renomeando $C_1 + C_2$ como C, temos

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -3\sqrt{1-x^2} + 2\,\text{sen}^{-1}x + C$$

O exemplo final desta seção, a seguir, calcula uma integral importante usando a técnica algébrica de multiplicar o integrando por uma forma de 1, a fim de transformá-lo em outro que possamos integrar.

EXEMPLO 7 Integral de $y = \sec x$ — multiplicando por uma forma de 1

Calcule

$$\int \sec x\,dx$$

SOLUÇÃO

$$\int \sec x\,dx = \int (\sec x)(1)\,dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \text{tg}\,x}{\sec x + \text{tg}\,x}\,dx$$
$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x\,\text{tg}\,x}{\sec x + \text{tg}\,x}\,dx$$
$$= \int \frac{du}{u}$$
$$= \ln|u| + C = \ln|\sec x + \text{tg}\,x| + C$$

$u = \text{tg} + \sec x$,
$du = (\sec^2 x + \sec x\,\text{tg}\,x)\,dx$

Com cossecantes e cotangentes no lugar de secantes e tangentes, o método do Exemplo 7 resulta em uma fórmula análoga para a integral da cossecante (veja o Exercício 95).

Companion Website
Biografia histórica
George David Birkhoff (1884-1944)

TABELA 8.2 As integrais de secante e cossecante

1. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \text{tg}\,u| + C$
2. $\int \text{cosec}\,u\,du = -\ln|\text{cosec}\,u + \text{cotg}\,u| + C$

Procedimento para adequar integrais a fórmulas básicas

Procedimento	Exemplo
Fazendo uma substituição para simplificar	$\dfrac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx = \dfrac{du}{\sqrt{u}}$
Completando o quadrado	$\sqrt{8x-x^2} = \sqrt{16-(x-4)^2}$
Usando uma identidade trigonométrica	$(\sec x + \operatorname{tg} x)^2 = \sec^2 x + 2\sec x \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x$ $= \sec^2 x + 2\sec x \operatorname{tg} x + (\sec^2 x - 1)$ $= 2\sec^2 x + 2\sec x \operatorname{tg} x - 1$
Eliminando uma raiz quadrada	$\sqrt{1+\cos 4x} = \sqrt{2\cos^2 2x} = \sqrt{2}\,\lvert\cos 2x\rvert$
Reduzindo uma fração imprópria	$\dfrac{3x^2-7x}{3x+2} = x - 3 + \dfrac{6}{3x+2}$
Separando uma fração	$\dfrac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$
Multiplicando por uma forma de 1	$\sec x = \sec x \cdot \dfrac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}$ $= \dfrac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}$

Exercícios 8.1

Substituições básicas

Calcule as integrais dos exercícios 1–36 usando uma substituição para reduzi-las à forma-padrão.

1. $\displaystyle\int \frac{16x\,dx}{\sqrt{8x^2+1}}$
2. $\displaystyle\int \frac{3\cos x\,dx}{\sqrt{1+3\operatorname{sen} x}}$
3. $\displaystyle\int 3\sqrt{\operatorname{sen} v}\cos v\,dv$
4. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^3 y \operatorname{cosec}^2 y\,dy$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{16x\,dx}{8x^2+2}$
6. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2 z}{\operatorname{tg} z}\,dz$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$
9. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}(3-7x)\,dx$
10. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}(\pi x - 1)\,dx$
11. $\displaystyle\int e^\theta \operatorname{cosec}(e^\theta+1)\,d\theta$
12. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotg}(3+\ln x)}{x}\,dx$
13. $\displaystyle\int \sec\frac{t}{3}\,dt$
14. $\displaystyle\int x\sec(x^2-5)\,dx$
15. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}(s-\pi)\,ds$
16. $\displaystyle\int \frac{1}{\theta^2}\operatorname{cosec}\frac{1}{\theta}\,d\theta$
17. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln 2}} 2x\,e^{x^2}\,dx$
18. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} (\operatorname{sen} y)e^{\cos y}\,dy$
19. $\displaystyle\int e^{\operatorname{tg} v}\sec^2 v\,dv$
20. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{t}}\,dt}{\sqrt{t}}$
21. $\displaystyle\int 3^{x+1}\,dx$
22. $\displaystyle\int \frac{2^{\ln x}}{x}\,dx$
23. $\displaystyle\int \frac{2^{\sqrt{w}}\,dw}{2\sqrt{w}}$
24. $\displaystyle\int 10^{2\theta}\,d\theta$
25. $\displaystyle\int \frac{9\,du}{1+9u^2}$
26. $\displaystyle\int \frac{4\,dx}{1+(2x+1)^2}$
27. $\displaystyle\int_0^{1/6} \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$
28. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$
29. $\displaystyle\int \frac{2s\,ds}{\sqrt{1-s^4}}$
30. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$
31. $\displaystyle\int \frac{6\,dx}{x\sqrt{25x^2-1}}$
32. $\displaystyle\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2-9}}$
33. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$
34. $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{e^{2y}-1}}$
35. $\displaystyle\int_1^{e^{\pi/3}} \frac{dx}{x\cos(\ln x)}$
36. $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x+4x\ln^2 x}$

Completando o quadrado

Calcule as integrais dos exercícios 37–42 completando o quadrado e usando uma substituição para reduzi-las à forma-padrão.

37. $\displaystyle\int_1^2 \frac{8\,dx}{x^2 - 2x + 2}$

38. $\displaystyle\int_2^4 \frac{2\,dx}{x^2 - 6x + 10}$

39. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{-t^2 + 4t - 3}}$

40. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sqrt{2\theta - \theta^2}}$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x}}$

42. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x - 2)\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$

Identidades trigonométricas

Calcule as integrais dos exercícios 43–46 usando identidades trigonométricas e uma substituição para reduzi-las à forma-padrão.

43. $\displaystyle\int (\sec x + \operatorname{cotg} x)^2\,dx$

44. $\displaystyle\int (\operatorname{cosec} x - \operatorname{tg} x)^2\,dx$

45. $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x \operatorname{sen} 3x\,dx$

46. $\displaystyle\int (\operatorname{sen} 3x \cos 2x - \cos 3x \operatorname{sen} 2x)\,dx$

Frações impróprias

Calcule as integrais dos exercícios 47–52 reduzindo a fração imprópria e usando uma substituição (quando necessário) para reduzi-las à forma-padrão.

47. $\displaystyle\int \frac{x}{x + 1}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2 + 1}\,dx$

49. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{2x^3}{x^2 - 1}\,dx$

50. $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{4x^2 - 7}{2x + 3}\,dx$

51. $\displaystyle\int \frac{4t^3 - t^2 + 16t}{t^2 + 4}\,dt$

52. $\displaystyle\int \frac{2\theta^3 - 7\theta^2 + 7\theta}{2\theta - 5}\,d\theta$

Separando frações

Calcule as integrais dos exercícios 53–56 separando a fração e usando uma substituição (quando necessário) para reduzi-las à forma-padrão.

53. $\displaystyle\int \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

54. $\displaystyle\int \frac{x + 2\sqrt{x - 1}}{2x\sqrt{x - 1}}\,dx$

55. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$

56. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{2 - 8x}{1 + 4x^2}\,dx$

Multiplicando por uma forma de 1

Calcule as integrais dos exercícios 57–62 multiplicando por uma forma de 1 e usando uma substituição (quando necessário) para reduzi-las à forma-padrão.

57. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}\,dx$

58. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \cos x}\,dx$

59. $\displaystyle\int \frac{1}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta}\,d\theta$

60. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cotg}\theta}\,d\theta$

61. $\displaystyle\int \frac{1}{1 - \sec x}\,dx$

62. $\displaystyle\int \frac{1}{1 - \operatorname{cosec} x}\,dx$

Eliminando raízes quadradas

Calcule as integrais dos exercícios 63–70 eliminando a raiz quadrada.

63. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}\,dx$

64. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\,dx$

65. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2t}\,dt$

66. $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \sqrt{1 + \cos t}\,dt$

67. $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \sqrt{1 - \cos^2\theta}\,d\theta$

68. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$

69. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 y}\,dy$

70. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} \sqrt{\sec^2 y - 1}\,dy$

Integrações diversas

Calcule as integrais dos exercícios 71–82 utilizando a técnica que você achar apropriada.

71. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x)^2\,dx$

72. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\sec x + 4\cos x)^2\,dx$

73. $\displaystyle\int \cos\theta \operatorname{cosec}(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$

74. $\displaystyle\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) \operatorname{cotg}(x + \ln x)\,dx$

75. $\displaystyle\int (\operatorname{cosec} x - \sec x)(\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$

76. $\displaystyle\int 3 \operatorname{senh}\left(\frac{x}{2} + \ln 5\right) dx$

77. $\displaystyle\int \frac{6\,dy}{\sqrt{y}(1 + y)}$

78. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$

79. $\displaystyle\int \frac{7\,dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x - 48}}$

80. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x + 1)\sqrt{4x^2 + 4x}}$

81. $\displaystyle\int \sec^2 t \operatorname{tg}(\operatorname{tg} t)\,dt$

82. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{3 + x^2}}$

Potências de funções trigonométricas

83. (a) Calcule $\int \cos^3\theta\,d\theta$. (*Dica*: $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$)

(b) Calcule $\int \cos^5\theta\,d\theta$.

(c) Sem realmente calcular a integral, explique como você calcularia $\int \cos^9\theta\,d\theta$.

84. (a) Calcule $\int \operatorname{sen}^3\theta\,d\theta$. (*Dica*: $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.)

(b) Calcule $\int \operatorname{sen}^5\theta\,d\theta$.

(c) Calcule $\int \operatorname{sen}^7\theta\,d\theta$.

(d) Sem realmente calcular a integral, explique como você calcularia $\int \operatorname{sen}^{13}\theta\,d\theta$.

85. (a) Expresse $\int \text{tg}^3\,\theta\,d\theta$ em termos de $\int \text{tg}\,\theta\,d\theta$. Depois calcule $\int \text{tg}^3\,\theta\,d\theta$. (*Dica*: $\text{tg}^2\,\theta = \sec^2\theta - 1$.)

(b) Expresse $\int \text{tg}^5\,\theta\,d\theta$ em termos de $\int \text{tg}^3\,\theta\,d\theta$.

(c) Expresse $\int \text{tg}^7\,\theta\,d\theta$ em termos de $\int \text{tg}^5\,\theta\,d\theta$.

(d) Expresse $\int \text{tg}^{2k+1}\,\theta\,d\theta$, onde k é um inteiro positivo, em termos de $\int \text{tg}^{2k-1}\,\theta\,d\theta$.

86. (a) Expresse $\int \text{cotg}^3\,\theta\,d\theta$ em termos de $\int \text{cotg}\,\theta\,d\theta$. Depois calcule $\int \text{cotg}^3\,\theta\,d\theta$. (*Dica*: $\text{cotg}^2\,\theta = \text{cosec}^2\,\theta - 1$.)

(b) Expresse $\int \text{cotg}^5\,\theta\,d\theta$ em termos de $\int \text{cotg}^3\,\theta\,d\theta$.

(c) Expresse $\int \text{cotg}^7\,\theta\,d\theta$ em termos de $\int \text{cotg}^5\,\theta\,d\theta$.

(d) Expresse $\int \text{cotg}^{2k+1}\,\theta\,d\theta$, onde k é um inteiro positivo, em termos de $\int \text{cotg}^{2k-1}\,\theta\,d\theta$.

Teoria e exemplos

87. Área Ache a área da região limitada superiormente por $y = 2\cos x$ e inferiormente por $y = \sec x$, $-\pi/4 \le x \le \pi/4$.

88. Área Determine a área da região "triangular" limitada superior e inferiormente pelas curvas $y = \text{cosec}\,x$ e $y = \text{sen}\,x$, $\pi/6 \le x \le \pi/2$, e à esquerda pela reta $x = \pi/6$.

89. Volume Determine o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 87 em torno do eixo x.

90. Volume Determine o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 88 em torno do eixo x.

91. Comprimento do arco Determine o comprimento da curva $y = \ln(\cos x)$, $0 \le x \le \pi/3$.

92. Comprimento do arco Determine o comprimento da curva $y = \ln(\sec x)$, $0 \le x \le \pi/4$.

93. Centróide Encontre o centróide da região limitada pelo eixo x, pela curva $y = \sec x$ e pelas retas $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$.

94. Centróide Encontre o centróide da região limitada pelo eixo x, pela curva $y = \text{cosec}\,x$ e pelas retas $x = \pi/6$, $x = 5\pi/6$.

95. A integral de cosec x Repita a derivação do Exemplo 7 usando co-funções para mostrar que

$$\int \text{cosec}\,x\,dx = -\ln|\text{cosec}\,x + \text{cotg}\,x| + C$$

96. Usando diferentes substituições Mostre que a integral

$$\int ((x^2 - 1)(x + 1))^{-2/3}\,dx$$

pode ser calculada com qualquer uma das substituições a seguir.

(a) $u = 1(x + 1)$

(b) $u = ((x - 1)(x + 1))^k$ para $k = 1, 1/2, 1/3, -1/3, -2/3$ e -1

(c) $u = \text{tg}^{-1}\,x$

(d) $u = \text{tg}^{-1}\sqrt{x}$

(e) $u = \text{tg}^{-1}((x - 1)/2)$

(f) $u = \cos^{-1}x$

(g) $u = \cosh^{-1}x$

Qual é o valor da integral? (*Fonte*: "Problems and solutions", *College Mathematics Journal*, v. 21, n. 5, nov. 1990, p. 425-426.)

8.2 Integração por partes

Uma vez que

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

e

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

é evidente que

$$\int x \cdot x\,dx \neq \int x\,dx \cdot \int x\,dx$$

Em outras palavras, a integral de um produto geralmente *não* é o produto das integrais individuais:

$$\int f(x)g(x)\,dx \text{ não é igual a } \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$$

Integração por partes é uma técnica para simplificar integrais da forma

$$\int f(x)g(x)\,dx$$

na qual f pode ser derivada repetidamente e g pode ser integrada repetidamente sem dificuldade. A integral

$$\int xe^x\,dx$$

é uma integral desse tipo porque $f(x) = x$ pode ser derivada duas vezes para se tornar zero e $g(x) = e^x$ pode ser integrada repetidamente sem dificuldade. A integração por partes também se aplica a integrais como

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

na qual cada parte do integrando aparece novamente após repetidas derivações ou integrações.

Nesta seção, descreveremos a integração por partes e mostraremos como aplicá-la.

Regra do produto na forma de integral

Se f e g são funções deriváveis de x, a regra do produto diz que

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Em termos de integrais indefinidas, essa equação se torna

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx$$

ou

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

Rearranjando os termos dessa última equação, temos

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx - \int f'(x)g(x)\,dx$$

o que leva à **fórmula da integração por partes.**

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \tag{1}$$

Às vezes é mais fácil lembrar a fórmula se a escrevemos na forma diferencial. Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$. Então, $du = f'(x)\,dx$ e $dv = g'(x)\,dx$. Usando a regra da substituição, a fórmula da integração por partes se torna

Fórmula da integração por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{2}$$

Essa fórmula expressa uma integral, $\int u\,dv$, em termos de uma segunda integral, $\int v\,du$. Com uma escolha apropriada de u e v, a segunda integral deve ser mais fácil de calcular que a primeira. Quando usamos essa fórmula, várias escolhas de u e dv tornam-se disponíveis. Os exemplos a seguir ilustram tal técnica.

EXEMPLO 1 Usando a integração por partes

Determine

$$\int x \cos x\,dx$$

SOLUÇÃO Usamos a fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ com

$$u = x, \qquad dv = \cos x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \operatorname{sen} x$$

A primitiva mais simples de cos x.

Então,

$$\int x \cos x\,dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

Vamos examinar as opções disponíveis para u e dv no Exemplo 1.

EXEMPLO 2 Exemplo 1 revisto

Para aplicar a integração por partes a

$$\int x \cos x\,dx = \int u\,dv$$

temos quatro opções possíveis:

1. $u = 1$ e $dv = x \cos x\,dx$
2. $u = x$ e $dv = \cos x\,dx$
3. $u = x \cos x$ e $dv = dx$
4. $u = \cos x$ e $dv = x\,dx$

Vamos examinar uma por uma.

A primeira opção não serve, porque ainda não sabemos como integrar $dv = x \cos x\,dx$ para obter v.

A opção 2 funciona bem, como vimos no Exemplo 1.

A opção 3 leva a

$$u = x \cos x, \qquad dv = dx$$
$$du = (\cos x - x \operatorname{sen} x)\,dx, \qquad v = x$$

e à nova integral

$$\int v\,du = \int (x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x)\,dx$$

Essa integral é pior que a inicial.

A opção 4 leva a

$$u = \cos x, \qquad dv = x\,dx$$
$$du = -\operatorname{sen} x\,dx, \qquad v = x^2/2$$

e à nova integral

$$\int v\,du = -\int \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} x\,dx$$

Essa integral também é pior que a inicial.

O objetivo da integração por partes é passar de uma integral $\int u\,dv$ que não sabemos como calcular para uma integral $\int v\,du$ que podemos calcular. Geralmente, escolhemos dv primeiro sendo a parte do integrando, incluindo dx, que sabemos integrar de maneira imediata; u é a parte restante. Lembre-se de que a integração por partes nem sempre funciona.

EXEMPLO 3 Integral do logaritmo natural

Calcule

$$\int \ln x\,dx$$

SOLUÇÃO Uma vez que $\int \ln x\,dx$ pode ser escrita como $\int \ln x \cdot 1\,dx$, usamos a fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ com

$u = \ln x$ simplificada quando derivada $\quad dv = dx$ Fácil de integrar.

$du = \dfrac{1}{x}\,dx,$ $\quad v = x$ Primitiva mais simples.

Então

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

Às vezes, precisamos utilizar a integração por partes mais de uma vez.

EXEMPLO 4 Uso repetido da integração por partes

Calcule

$$\int x^2 e^x\,dx$$

SOLUÇÃO Com $u = x^2$, $dv = e^x\,dx$, $du = 2x\,dx$ e $v = e^x$, temos

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx$$

A nova integral é menos complicada que a original porque o expoente em x é reduzido em um. Para calcular a integral à direita, integramos por partes novamente com $u = x$, $dv = e^x\,dx$. Então, $du = dx$, $v = e^x$ e

$$\int x e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx = x e^x - e^x + C$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x\,dx &= x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C\end{aligned}$$

A técnica do Exemplo 4 funciona para qualquer integral $\int x^n e^x\,dx$ na qual n seja um inteiro positivo, porque derivar x^n acabará nos levando a zero e integrar e^x é fácil. Falaremos mais sobre isso nesta mesma seção quando tratarmos de *integração tabular*.

Integrais como a do próximo exemplo ocorrem em engenharia elétrica. Suas resoluções exigem duas integrações por partes, seguidas pela resolução de uma equação envolvendo a integral desconhecida.

EXEMPLO 5 Fazendo reaparecer a integral desconhecida

Calcule

$$\int e^x \cos x \, dx$$

SOLUÇÃO Sejam $u = e^x$ e $dv = \cos x \, dx$. Então, $du = e^x \, dx$, $v = \operatorname{sen} x$ e

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

A segunda integral é como a primeira, exceto pelo fato de que tem sen x no lugar de cos x. Para calculá-la, usamos a integração por partes com

$$u = e^x, \qquad dv = \operatorname{sen} x \, dx, \qquad v = -\cos x, \qquad du = e^x \, dx$$

Então

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x - \int (-\cos x)(e^x \, dx)\right)$$

$$= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

A integral desconhecida agora aparece dos dois lados da equação. Adicionando a integral aos dois lados, temos

$$2\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + C_1$$

Dividindo por 2 e renomeando a constante da integração, temos

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + C$$

Calculando por partes integrais definidas

A fórmula da integração por partes da Equação (1) pode ser combinada com a Parte 2 do teorema fundamental e, assim, permitir o cálculo por partes de integrais definidas. Supondo que tanto f' quanto g' sejam contínuas ao longo do intervalo $[a, b]$, a Parte 2 do teorema fundamental nos leva a

Fórmula da integração por partes para integrais definidas

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx \qquad (3)$$

Ao aplicar a Equação (3), normalmente usamos a notação de u e v da Equação (2), pois ela é mais fácil de lembrar. Segue-se um exemplo.

EXEMPLO 6 Encontrando a área

Encontre a área da região delimitada pela curva $y = xe^{-x}$ e pelo eixo x de $x = 0$ a $x = 4$.

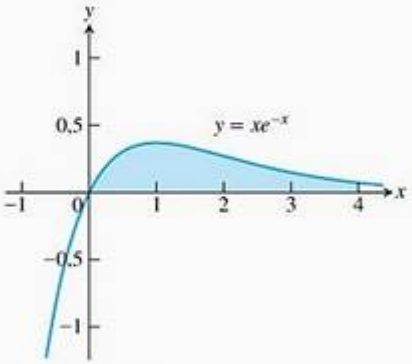


FIGURA 8.1 A região do Exemplo 6.

SOLUÇÃO A região está sombreada na Figura 8.1. Sua área é

$$\int_0^4 xe^{-x}\,dx$$

Seja $u = x$, $dv = e^{-x}\,dx$, $v = -e^{-x}$ e $du = dx$. Então,

$$\begin{aligned}\int_0^4 xe^{-x}\,dx &= -xe^{-x}\Big]_0^4 - \int_0^4 (-e^{-x})\,dx \\ &= [-4e^{-4} - (0)] + \int_0^4 e^{-x}\,dx \\ &= -4e^{-4} - e^{-x}\Big]_0^4 \\ &= -4e^{-4} - e^{-4} - (-e^0) = 1 - 5e^{-4} \approx 0{,}91\end{aligned}$$

Integração tabular

Vimos que integrais da forma $\int f(x)g(x)\,dx$, nas quais f pode ser derivada repetidamente até se tornar zero e g pode ser integrada repetidamente sem dificuldade, são candidatas naturais à integração por partes. Entretanto, quando são necessárias muitas repetições, os cálculos podem ser trabalhosos. Em situações como essas, existe um meio de organizar os cálculos que poupa muito trabalho. Trata-se da chamada **integração tabular**, ilustrada nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 7 Usando a integração tabular

Calcule

$$\int x^2e^x\,dx$$

SOLUÇÃO Com $f(x) = x^2$ e $g(x) = e^x$, relacionamos:

***f(x)* e suas derivadas**		***g(x)* e suas integrais**
x^2	$(+)$	e^x
$2x$	$(-)$	e^x
2	$(+)$	e^x
0		e^x

Combinamos os produtos das funções ligadas por setas de acordo com os sinais de operação acima delas e obtemos

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Compare esse resultado com o do Exemplo 4.

EXEMPLO 8 Usando integração tabular

Calcule

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$$

SOLUÇÃO Com $f(x) = x^3$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$, relacionamos

$f(x)$ e suas derivadas		$g(x)$ e suas integrais
x^3	$(+)$	$\operatorname{sen} x$
$3x^2$	$(-)$	$-\cos x$
$6x$	$(+)$	$-\operatorname{sen} x$
6	$(-)$	$\cos x$
0		$\operatorname{sen} x$

Novamente, combinamos os produtos das funções ligadas por setas de acordo com o sinal de operação acima delas e obtemos

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 6 \operatorname{sen} x + C$$

Os exercícios adicionais no final deste capítulo mostram como a integração tabular pode ser usada quando nem a função f nem a g podem ser derivadas repetidamente até se tornarem zero.

Resumo

Quando a substituição não funciona, tente a integração por partes. Comece com uma integral na qual o integrando seja o produto de duas funções,

$$\int f(x)g(x)\, dx$$

(Lembre-se de que g pode ser a função constante 1, como visto no Exemplo 3.) Faça que ela coincida com uma integral da forma

$$\int u\, dv$$

escolhendo dv como parte do integrando, incluindo dx e possivelmente $f(x)$ ou $g(x)$. Lembre-se de que você deve ser capaz de integrar de maneira imediata dv para obter o lado direito da fórmula.

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Se a nova integral for mais complicada que a original, tente outra opção para u e dv.

EXEMPLO 9 Uma fórmula de redução

Obtenha uma fórmula de "redução" que expresse a integral

$$\int \cos^n x\, dx$$

em termos de uma integral de uma potência mais baixa de $\cos x$.

SOLUÇÃO Podemos pensar em $\cos^n x$ como $\cos^{n-1} x \cdot \cos x$. Então, consideramos

$$u = \cos^{n-1} x \qquad \text{e} \qquad dv = \cos x\, dx$$

de modo que

$$du = (n-1)\cos^{n-2} x\,(-\operatorname{sen} x\, dx) \qquad \text{e} \qquad v = \operatorname{sen} x$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int \cos^n x\, dx &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^2 x \cos^{n-2} x\, dx \\ &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\, dx \\ &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \cos^n x\, dx\end{aligned}$$

Se acrescentamos

$$(n-1)\int \cos^n x\, dx$$

a ambos os lados dessa equação, obtemos

$$n\int \cos^n x\, dx = \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx$$

Dividimos, então, por n, e o resultado final será

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$$

Essa fórmula muito útil nos permite reduzir em 2 o expoente de $\cos x$. Quando n é um inteiro positivo, podemos aplicá-la repetidamente até que a integral restante seja

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C \qquad \text{ou} \qquad \int \cos^0 x\, dx = \int dx = x + C$$

EXEMPLO 10 Usando uma fórmula de redução

Calcule

$$\int \cos^3 x\, dx$$

SOLUÇÃO A partir do resultado do Exemplo 9,

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\, dx &= \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\, dx \\ &= \frac{1}{3}\cos^2 x \operatorname{sen} x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

Exercícios 8.2

Integração por partes

Calcule as integrais dos exercícios 1–24.

1. $\int x \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx$
2. $\int \theta \cos \pi\theta\, d\theta$
3. $\int t^2 \cos t\, dt$
4. $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$
5. $\int_1^2 x \ln x\, dx$
6. $\int_1^e x^3 \ln x\, dx$
7. $\int \operatorname{tg}^{-1} y\, dy$
8. $\int \operatorname{sen}^{-1} y\, dy$
9. $\int x \sec^2 x\, dx$
10. $\int 4x \sec^2 2x\, dx$
11. $\int x^3 e^x\, dx$
12. $\int p^4 e^{-p}\, dp$
13. $\int (x^2 - 5x)e^x\, dx$
14. $\int (r^2 + r + 1)e^r\, dr$
15. $\int x^5 e^x\, dx$
16. $\int t^2 e^{4t}\, dt$
17. $\int_0^{\pi/2} \theta^2 \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$
18. $\int_0^{\pi/2} x^3 \cos 2x\, dx$
19. $\int_{2/\sqrt{3}}^2 t \sec^{-1} t\, dt$
20. $\int_0^{1/\sqrt{2}} 2x \operatorname{sen}^{-1}(x^2)\, dx$
21. $\int e^\theta \operatorname{sen} \theta\, d\theta$
22. $\int e^{-y} \cos y\, dy$
23. $\int e^{2x} \cos 3x\, dx$
24. $\int e^{-2x} \operatorname{sen} 2x\, dx$

Substituição e integração por partes

Calcule as integrais dos exercícios 25–30 usando uma substituição antes da integração por partes.

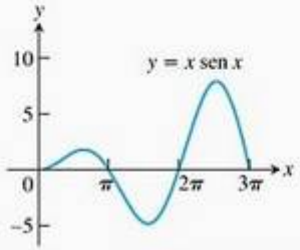
25. $\int e^{\sqrt{3s+9}}\, ds$
26. $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\, dx$
27. $\int_0^{\pi/3} x \operatorname{tg}^2 x\, dx$
28. $\int \ln(x + x^2)\, dx$
29. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$
30. $\int z(\ln z)^2\, dz$

Teoria e exemplos

31. **Determinando a área** Determine a área da região delimitada pela curva $y = x \operatorname{sen} x$ e pelo eixo x (veja a figura a seguir) para

(a) $0 \le x \le \pi$ (b) $\pi \le x \le 2\pi$ (c) $2\pi \le x \le 3\pi$

(d) Qual padrão você reconhece aqui? Qual é a área entre a curva e o eixo x para $n\pi \le x \le (n+1)\pi$, sendo n um número arbitrário inteiro não negativo? Justifique sua resposta.



32. **Determinando a área** Determine a área da região delimitada pela curva $y = x \cos x$ e pelo eixo x (veja a figura a seguir) para

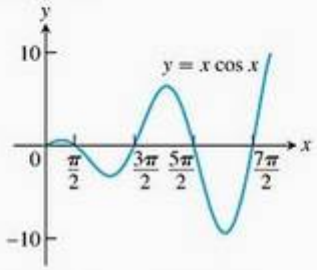
(a) $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$ (b) $3\pi/2 \le x \le 5\pi/2$

(c) $5\pi/2 \le x \le 7\pi/2$

(d) Qual padrão você reconhece aqui? Qual é a área entre a curva e o eixo x, para

$$\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi \le x \le \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi$$

sendo n um número arbitrário inteiro positivo? Justifique sua resposta.



33. **Determinando o volume** Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = \ln 2$, da região do primeiro quadrante delimitada pelos eixos coordenados, pela curva $y = e^x$ e pela reta $x = \ln 2$.

34. **Determinando o volume** Determine o volume do sólido gerado pela rotação da região do primeiro quadrante delimitada pelos eixos coordenados, pela curva $y = e^{-x}$ e pela reta $x = 1$

(a) em torno do eixo y. (b) em torno da reta $x = 1$.

35. **Determinando o volume** Determine o volume do sólido gerado pela rotação da região do primeiro quadrante delimitada pelos eixos coordenados e pela curva $y = \cos x$ $0 \le x \le \pi/2$

(a) em torno do eixo y. (b) em torno da reta $x = \pi/2$.

36. Determinando o volume Determine o volume do sólido gerado pela rotação da região delimitada pelo eixo x e pela curva $y = x \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$, em torno

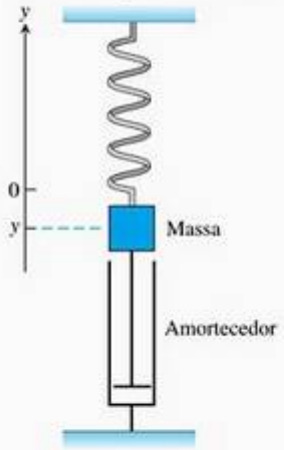
(a) do eixo y. (b) da reta $x = \pi$.

(Veja o gráfico do Exercício 31.)

37. Valor médio Uma força de retardamento, simbolizada pelo amortecedor na figura, diminui o movimento da massa presa à mola, de maneira que a posição da massa no instante t é

$$y = 2e^{-t} \cos t, \qquad t \ge 0.$$

Encontre o valor médio de y no intervalo $0 \le t \le 2\pi$.



38. Valor médio Em um sistema massa-mola-amortecedor como o do Exercício 37, a posição da massa no instante t é

$$y = 4e^{-t}(\operatorname{sen} t - \cos t), \qquad t \ge 0.$$

Determine o valor médio de y no intervalo $0 \le t \le 2\pi$.

Fórmulas de redução

Nos exercícios 39–42, use a integração por partes para estabelecer a *fórmula de redução*.

39. $\displaystyle\int x^n \cos x\, dx = x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1} \operatorname{sen} x\, dx$

40. $\displaystyle\int x^n \operatorname{sen} x\, dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x\, dx$

41. $\displaystyle\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\, dx, \quad a \ne 0$

42. $\displaystyle\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx$

Integrando inversas de funções

A integração por partes leva a uma regra para integrar inversas que geralmente dá bons resultados:

$$\int f^{-1}(x)\, dx = \int y f'(y)\, dy \qquad y = f^{-1}(x),\ x = f(y),\ dx = f'(y)\, dy$$

$$= y f(y) - \int f(y)\, dy \qquad \text{Integração por partes com } u = y,\ dv = f'(y)\, dy$$

$$= x f^{-1}(x) - \int f(y)\, dy$$

A idéia é pegar a parte mais complicada da integral — nesse caso, $f^{-1}(x)$ — e simplificá-la primeiro. Para a integral de $\ln x$, temos

$$\int \ln x\, dx = \int y e^y\, dy \qquad y = \ln x,\ x = e^y,\ dx = e^y\, dy$$

$$= y e^y - e^y + C$$

$$= x \ln x - x + C$$

Para a integral de $\cos^{-1} x$, temos

$$\int \cos^{-1} x\, dx = x \cos^{-1} x - \int \cos y\, dy \qquad y = \cos^{-1} x$$

$$= x \cos^{-1} x - \operatorname{sen} y + C$$

$$= x \cos^{-1} x - \operatorname{sen}(\cos^{-1} x) + C$$

Nos exercícios 43–46, use a fórmula

$$\int f^{-1}(x)\, dx = x f^{-1}(x) - \int f(y)\, dy \qquad y = f^{-1}(x) \qquad (4)$$

para calcular as integrais. Expresse suas respostas em termos de x.

43. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$ **44.** $\displaystyle\int \operatorname{tg}^{-1} x\, dx$

45. $\displaystyle\int \sec^{-1} x\, dx$ **46.** $\displaystyle\int \log_2 x\, dx$

Outra maneira de integrar $f^{-1}(x)$ (quando f^{-1} é integrável, evidentemente) é usar a integração por partes com $u = f^{-1}(x)$ e $dv = dx$ para reescrever a integral de f^{-1} como

$$\int f^{-1}(x)\, dx = x f^{-1}(x) - \int x\left(\frac{d}{dx} f^{-1}(x)\right) dx \qquad (5)$$

Os exercícios 47 e 48 comparam os resultados obtidos com as equações (4) e (5).

47. As equações (4) e (5) dão diferentes fórmulas para a integral de $\cos^{-1} x$:

(a) $\displaystyle\int \cos^{-1} x\, dx = x \cos^{-1} x - \operatorname{sen}(\cos^{-1} x) + C$ Equação (4)

(b) $\displaystyle\int \cos^{-1} x\, dx = x \cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + C$ Equação (5)

Existe a possibilidade de as duas integrações estarem corretas? Explique.

48. As equações (4) e (5) levam a diferentes fórmulas para a integral de $\operatorname{tg}^{-1} x$:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^{-1} x\, dx = x \operatorname{tg}^{-1} x - \ln \sec(\operatorname{tg}^{-1} x) + C$ Equação (4)

(b) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^{-1} x\, dx = x \operatorname{tg}^{-1} x - \ln\sqrt{1 + x^2} + C$ Equação (5)

Existe a possibilidade de as duas integrações estarem corretas? Explique.

Nos exercícios 49 e 50, calcule as integrais com (a) a Equação (4) e (b) a Equação (5). Nos dois casos, verifique sua resposta, derivando-a em relação a x.

49. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^{-1} x\, dx$ **50.** $\displaystyle\int \operatorname{tgh}^{-1} x\, dx$

8.3 Integração de funções racionais por frações parciais

Esta seção mostrará como expressar uma função racional (um quociente de polinômios) como uma soma de frações mais simples, as chamadas *frações parciais*, fáceis de integrar. Por exemplo, a função racional $(5x - 3)/(x^2 - 2x - 3)$ pode ser reescrita como

$$\frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 3}$$

o que pode ser verificado algebricamente colocando-se as frações do lado direito em cima de um denominador comum $(x + 1)(x - 3)$. A habilidade de escrever funções racionais como uma soma desse tipo também é útil em outros contextos (por exemplo, quando se usam certos métodos de transformação para resolver equações diferenciais). Para integrar a função racional $(5x - 3)/(x + 1)(x - 3)$ do lado esquerdo de nossa expressão anterior, simplesmente somamos as integrais das frações do lado direito:

$$\int \frac{5x - 3}{(x + 1)(x - 3)}\,dx = \int \frac{2}{x + 1}\,dx + \int \frac{3}{x - 3}\,dx$$

$$= 2 \ln |x + 1| + 3 \ln |x - 3| + C$$

O método de reescrever funções racionais como uma soma de frações mais simples chama-se **método de frações parciais**. No caso do exemplo acima, o método consiste em achar constantes A e B tais que

$$\frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3} \qquad (1)$$

(Faça de conta, por um momento, que não sabemos que a resposta certa é $A = 2$ e $B = 3$.) Chamamos as frações $A/(x + 1)$ e $B/(x - 3)$ de **frações parciais** porque seus denominadores são apenas parte do denominador original $x^2 - 2x - 3$. Chamamos A e B de **coeficientes indeterminados** até que tenhamos encontrado valores apropriados para eles.

Para encontrar A e B, primeiro eliminamos todas as frações da Equação (1), obtendo

$$5x - 3 = A(x - 3) + B(x + 1) = (A + B)x - 3A + B$$

Isso será uma identidade em x se e somente se os coeficientes de potências iguais de x, nos dois lados, também forem iguais:

$$A + B = 5 \qquad -3A + B = -3$$

Resolvendo essas equações simultaneamente, obtemos $A = 2$ e $B = 3$.

Descrição geral do método

O sucesso ao escrever uma função racional $f(x)/g(x)$ como a soma de frações parciais depende de duas coisas:

- *O grau de $f(x)$ deve ser menor que o grau de $g(x)$.* Ou seja, a fração deve ser própria. Se não for, divida $f(x)$ por $g(x)$ e trabalhe com o resto. Veja o Exemplo 3 desta seção.
- *Devemos conhecer os fatores de $g(x)$.* Na teoria, qualquer polinômio com coeficientes reais pode ser escrito como um produto de fatores

reais lineares e fatores reais quadráticos. Na prática, pode ser difícil encontrar esses fatores.

Veja como achamos as frações parciais de uma fração própria $f(x)/g(x)$ quando os fatores de g são conhecidos.

Método de frações parciais (f(x)/g(x) própria)

1. Seja $x - r$ um fator linear de $g(x)$. Suponha que $(x - r)^m$ seja a maior potência de $x - r$ que divide $g(x)$. Então, associe a esse fator a soma de m frações parciais:

$$\frac{A_1}{x - r} + \frac{A_2}{(x - r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x - r)^m}$$

Faça isso para cada fator linear distinto de $g(x)$.

2. Seja $x^2 + px + q$ um fator quadrático de $g(x)$. Suponha que $(x^2 + px + q)^n$ seja a maior potência desse fator que divide $g(x)$. Então, atribua a esse fator a soma de n frações parciais:

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + px + q)^n}$$

Faça isso para cada fator quadrático distinto de $g(x)$ que não pode ser decomposto como produto de fatores lineares com coeficientes reais.

3. Iguale a fração original $f(x)/g(x)$ à soma de todas essas frações parciais. Elimine as frações da equação resultante e organize os termos em potências decrescentes de x.

4. Iguale os coeficientes das potências correspondentes de x e resolva o sistema de equações obtido desse modo para encontrar os coeficientes indeterminados.

EXEMPLO 1 Fatores lineares distintos

Calcule

$$\int \frac{x^2 + 4x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)}\,dx$$

usando frações parciais.

SOLUÇÃO A decomposição em frações parciais assume a forma

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 3}$$

Para determinar os valores dos coeficientes indeterminados A, B e C, eliminamos as frações e obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 1 &= A(x + 1)(x + 3) + B(x - 1)(x + 3) + C(x - 1)(x + 1) \\ &= (A + B + C)x^2 + (4A + 2B)x + (3A - 3B - C) \end{aligned}$$

Os polinômios nos dois lados da equação anterior são idênticos, por isso igualamos os coeficientes de potências iguais de x, obtendo

$$\begin{aligned} &\text{Coeficiente de } x^2: && A + B + C = 1 \\ &\text{Coeficiente de } x^1: && 4A + 2B = 4 \\ &\text{Coeficiente de } x^0: && 3A - 3B - C = 1 \end{aligned}$$

Existem muitas maneiras de determinar as variáveis desconhecidas A, B e C em um sistema de equações lineares como esse, incluindo a eliminação de variáveis ou o uso de uma calculadora ou computador. Seja qual for o método usado, a solução será $A = 3/4$, $B = 1/2$ e $C = -1/4$. Teremos, então

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)(x+1)(x+3)}\,dx &= \int \left[\frac{3}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+3}\right] dx \\ &= \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + K \end{aligned}$$

onde K é a constante arbitrária de integração (para evitar confusão com o coeficiente indeterminado, que chamamos de C).

EXEMPLO 2 Um fator linear repetido

Calcule

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx$$

SOLUÇÃO Primeiro, expressamos o integrando como uma soma de frações parciais com coeficientes indeterminados.

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$\begin{aligned} 6x + 7 &= A(x+2) + B && \text{Multiplique os dois lados por } (x+2)^2. \\ &= Ax + (2A + B) \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes das frações correspondentes de x, temos

$A = 6$ e $2A + B = 12 + B = 7$ ou $A = 6$ e $B = -5$

Então,

$$\begin{aligned} \int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx &= \int \left(\frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}\right) dx \\ &= 6\int \frac{dx}{x+2} - 5\int (x+2)^{-2}\,dx \\ &= 6\ln|x+2| + 5(x+2)^{-1} + C \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Integrando uma fração imprópria

Calcule

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx$$

SOLUÇÃO Primeiro dividimos o numerador pelo denominador para obter um polinômio mais uma fração própria.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 4x^2 - x - 3 & x^2 - 2x - 3 \\ \underline{-2x^3 - 4x^2 - 6x} & 2x \\ 5x - 3 & \end{array}$$

Então escrevemos a fração imprópria como um polinômio mais uma fração própria.

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} = 2x + \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

Já descobrimos a decomposição em frações parciais da fração da direita no exemplo de abertura, portanto

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx &= \int 2x\,dx + \int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx \\ &= \int 2x\,dx + \int \frac{2}{x + 1}\,dx + \int \frac{3}{x - 3}\,dx \\ &= x^2 + 2\ln|x + 1| + 3\ln|x - 3| + C \end{aligned}$$

Um polinômio quadrático é **irredutível** se não pode ser escrito como o produto de dois fatores lineares com coeficientes reais.

EXEMPLO 4 Integrando com um fator quadrático irredutível no denominador

Calcule

$$\int \frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}\,dx$$

usando frações parciais.

SOLUÇÃO O denominador tem um fator quadrático irredutível, assim como um fator linear repetido, então escrevemos

$$\frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2} \qquad (2)$$

Eliminando as frações da equação, temos

$$\begin{aligned} -2x + 4 &= (Ax + B)(x - 1)^2 + C(x - 1)(x^2 + 1) + D(x^2 + 1) \\ &= (A + C)x^3 + (-2A + B - C + D)x^2 \\ &\quad + (A - 2B + C)x + (B - C + D) \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes semelhantes, temos

Coeficientes de x^3:	$0 = A + C$
Coeficientes de x^2:	$0 = -2A + B - C + D$
Coeficientes de x^1:	$-2 = A - 2B + C$
Coeficientes de x^0:	$4 = B - C + D$

Resolvemos essas equações simultaneamente para encontrar os valores de A, B, C e D:

$-4 = -2A, \quad A = 2$ Subtraia a quarta equação da segunda.

$C = -A = -2$ Da primeira equação.

$B = 1$ $\quad$ $A = 2$ e $C = -2$ na terceira equação.

$D = 4 - B + C = 1$ $\quad$ Da quarta equação.

Substituímos esses valores na Equação (2), obtendo

$$\frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{2x + 1}{x^2 + 1} - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$$

Por fim, usando a decomposição anterior, podemos integrar:

$$\begin{aligned}\int \frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{2x + 1}{x^2 + 1} - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}\right) dx \\ &= \int \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}\right) dx \\ &= \ln (x^2 + 1) + \operatorname{tg}^{-1} x - 2 \ln |x - 1| - \frac{1}{x - 1} + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Um fator quadrático irredutível repetido

Calcule

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)^2}$$

SOLUÇÃO A decomposição em frações parciais tem a seguinte forma:

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, temos

$$\begin{aligned}1 &= A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x \\ &= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex \\ &= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A\end{aligned}$$

Se igualamos os coeficientes, obtemos o sistema

$$A + B = 0, \qquad C = 0, \qquad 2A + B + D = 0, \qquad C + E = 0, \qquad A = 1$$

Resolvendo esse sistema, temos $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = -1$ e $E = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)^2} &= \int \left[\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2 + 1} + \frac{-x}{(x^2 + 1)^2}\right] dx \\ &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{x^2 + 1} - \int \frac{x\,dx}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} \qquad u = x^2 + 1,\ du = 2x\,dx \\ &= \ln |x| - \frac{1}{2} \ln |u| + \frac{1}{2u} + K \\ &= \ln |x| - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + K \\ &= \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + K\end{aligned}$$

Companion Website

Biografia histórica

Oliver Heaviside (1850-1925)

O método de Heaviside

Quando o grau do polinômio $f(x)$ é menor que o grau de $g(x)$ e

$$g(x) = (x - r_1)(x - r_2) \quad (x - r_n)$$

é um produto de n fatores lineares distintos, existe um meio rápido de decompor $f(x)/g(x)$ em frações parciais.

EXEMPLO 6 Usando o método de Heaviside

Encontre A, B e C na decomposição de frações parciais

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3} \tag{3}$$

SOLUÇÃO Se multiplicamos os dois lados da Equação (3) por $(x - 1)$ para obter

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 2)(x - 3)} = A + \frac{B(x - 1)}{x - 2} + \frac{C(x - 1)}{x - 3}$$

e estabelecemos $x = 1$, a equação resultante fornece o valor de A:

$$\frac{(1)^2 + 1}{(1 - 2)(1 - 3)} = A + 0 + 0,$$

$$A = 1$$

Logo, o valor de A é o número que teríamos obtido se tivéssemos ocultado o fator $(x - 1)$ no denominador da fração original

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} \tag{4}$$

e calculado o restante em $x = 1$:

$$A = \frac{(1)^2 + 1}{\underset{\substack{\Uparrow \\ \text{Oculto}}}{\boxed{(x - 1)}}\,(1 - 2)(1 - 3)} = \frac{2}{(-1)(-2)} = 1$$

De maneira similar, encontramos o valor de B na Equação (3) ocultando o fator $(x - 2)$ na Equação (4) e calculando o restante em $x = 2$:

$$B = \frac{(2)^2 + 1}{(2 - 1)\underset{\substack{\Uparrow \\ \text{Oculto}}}{\boxed{(x - 2)}}\,(2 - 3)} = \frac{5}{(1)(-1)} = -5$$

Por fim, C é determinado ocultando $(x - 3)$ na Equação (4) e calculando o restante em $x = 3$:

$$C = \frac{(3)^2 + 1}{(3 - 1)(3 - 2)\underset{\substack{\Uparrow \\ \text{Oculto}}}{\boxed{(x - 3)}}} = \frac{10}{(2)(1)} = 5$$

Método de Heaviside

1. *Escreva o quociente com $g(x)$ fatorado:*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)}$$

2. *Oculte os fatores $(x - r_i)$ de $g(x)$, um de cada vez,* substituindo a cada vez todos os x não ocultos por r_i. Isso dá um número A_i para cada raiz r_i:

$$A_1 = \frac{f(r_1)}{(r_1 - r_2)\cdots(r_1 - r_n)}$$

$$A_2 = \frac{f(r_2)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)\cdots(r_2 - r_n)}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{f(r_n)}{(r_n - r_1)(r_n - r_2)\cdots(r_n - r_{n-1})}$$

3. *Escreva a decomposição em frações parciais de $f(x)/g(x)$* como

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x - r_1)} + \frac{A_2}{(x - r_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x - r_n)}$$

EXEMPLO 7 Integrando com o método de Heaviside

Calcule

$$\int \frac{x + 4}{x^3 + 3x^2 - 10x}\,dx$$

SOLUÇÃO O grau de $f(x) = x + 4$ é menor que o grau de $g(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$ e, com $g(x)$ fatorada,

$$\frac{x + 4}{x^3 + 3x^2 - 10x} = \frac{x + 4}{x(x - 2)(x + 5)}$$

As raízes de $g(x)$ são $r_1 = 0$, $r_2 = 2$ e $r_3 = -5$. Encontramos

$$A_1 = \frac{0 + 4}{\underset{\substack{\Uparrow \\ \text{Oculto}}}{\boxed{x}}\,(0 - 2)(0 + 5)} = \frac{4}{(-2)(5)} = -\frac{2}{5}$$

$$A_2 = \frac{2 + 4}{2\,\underset{\substack{\Uparrow \\ \text{Oculto}}}{\boxed{(x - 2)}}\,(2 + 5)} = \frac{6}{(2)(7)} = \frac{3}{7}$$

$$A_3 = \frac{-5 + 4}{(-5)(-5 - 2)\,\underset{\substack{\Uparrow \\ \text{Oculto}}}{\boxed{(x + 5)}}} = \frac{-1}{(-5)(-7)} = -\frac{1}{35}$$

Então,

$$\frac{x + 4}{x(x - 2)(x + 5)} = -\frac{2}{5x} + \frac{3}{7(x - 2)} - \frac{1}{35(x + 5)}$$

e

$$\int \frac{x + 4}{x(x - 2)(x + 5)}\,dx = -\frac{2}{5}\ln|x| + \frac{3}{7}\ln|x - 2| - \frac{1}{35}\ln|x + 5| + C$$

Outras maneiras de determinar os coeficientes

Outra maneira de determinar as constantes que aparecem em frações parciais é derivar, como no próximo exemplo. Há ainda outra: atribuir valores numéricos selecionados a x.

EXEMPLO 8 Usando a derivação

Encontre A, B e C na equação

$$\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

SOLUÇÃO Primeiro, eliminamos as frações:

$$x - 1 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C$$

Fazendo a substituição $x = -1$, temos $C = -2$. Então, derivamos os dois lados em relação a x, obtendo

$$1 = 2A(x+1) + B$$

Fazendo a substituição $x = -1$, temos $B = 1$. Derivamos novamente para ter $0 = 2A$, que fornece $A = 0$. Logo,

$$\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}$$

Em alguns problemas, atribuir pequenos valores a x, como $x = 0, \pm 1, \pm 2$, para obter equações em A, B e C, nos dá uma alternativa mais rápida que os outros métodos.

EXEMPLO 9 Atribuindo valores numéricos a x

Encontre A, B e C em

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

SOLUÇÃO Elimine as frações para obter

$$x^2 + 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

Depois atribua $x = 1, 2, 3$ sucessivamente para encontrar A, B e C:

$$\begin{aligned}
x = 1: \quad (1)^2 + 1 &= A(-1)(-2) + B(0) + C(0) \\
2 &= 2A \\
A &= 1 \\
x = 2: \quad (2)^2 + 1 &= A(0) + B(1)(-1) + C(0) \\
5 &= -B \\
B &= -5 \\
x = 3: \quad (3)^2 + 1 &= A(0) + B(0) + C(2)(1) \\
10 &= 2C \\
C &= 5
\end{aligned}$$

Conclusão:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$$

Exercícios 8.3

Decompondo quocientes em frações parciais

Decomponha os quocientes dos exercícios 1–8 em frações parciais.

1. $\dfrac{5x - 13}{(x - 3)(x - 2)}$
2. $\dfrac{5x - 7}{x^2 - 3x + 2}$
3. $\dfrac{x + 4}{(x + 1)^2}$
4. $\dfrac{2x + 2}{x^2 - 2x + 1}$
5. $\dfrac{z + 1}{z^2(z - 1)}$
6. $\dfrac{z}{z^3 - z^2 - 6z}$
7. $\dfrac{t^2 + 8}{t^2 - 5t + 6}$
8. $\dfrac{t^4 + 9}{t^4 + 9t^2}$

Fatores lineares não repetidos

Nos exercícios 9–16, expresse os integrandos como soma de frações parciais e calcule as integrais.

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - x^2}$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x}$
11. $\displaystyle\int \frac{x + 4}{x^2 + 5x - 6}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{x^2 - 7x + 12}\,dx$
13. $\displaystyle\int_4^8 \frac{y\,dy}{y^2 - 2y - 3}$
14. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{y + 4}{y^2 + y}\,dy$
15. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^3 + t^2 - 2t}$
16. $\displaystyle\int \frac{x + 3}{2x^3 - 8x}\,dx$

Fatores lineares repetidos

Nos exercícios 17–20, expresse os integrandos como soma de frações parciais e calcule as integrais.

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^2 + 2x + 1}$
18. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3\,dx}{x^2 - 2x + 1}$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$
20. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x - 1)(x^2 + 2x + 1)}$

Fatores quadráticos irredutíveis

Nos exercícios 21–28, expresse os integrandos como soma de frações parciais e calcule as integrais.

21. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 1)}$
22. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2 + t + 4}{t^3 + t}\,dt$
23. $\displaystyle\int \frac{y^2 + 2y + 1}{(y^2 + 1)^2}\,dy$
24. $\displaystyle\int \frac{8x^2 + 8x + 2}{(4x^2 + 1)^2}\,dx$
25. $\displaystyle\int \frac{2s + 2}{(s^2 + 1)(s - 1)^3}\,ds$
26. $\displaystyle\int \frac{s^4 + 81}{s(s^2 + 9)^2}\,ds$
27. $\displaystyle\int \frac{2\theta^3 + 5\theta^2 + 8\theta + 4}{(\theta^2 + 2\theta + 2)^2}\,d\theta$
28. $\displaystyle\int \frac{\theta^4 - 4\theta^3 + 2\theta^2 - 3\theta + 1}{(\theta^2 + 1)^3}\,d\theta$

Frações impróprias

Nos exercícios 29–34, realize uma divisão longa no integrando, escreva a fração própria como uma soma de frações parciais e então calcule a integral.

29. $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - x}\,dx$
30. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2 - 1}\,dx$
31. $\displaystyle\int \frac{9x^3 - 3x + 1}{x^3 - x^2}\,dx$
32. $\displaystyle\int \frac{16x^3}{4x^2 - 4x + 1}\,dx$
33. $\displaystyle\int \frac{y^4 + y^2 - 1}{y^3 + y}\,dy$
34. $\displaystyle\int \frac{2y^4}{y^3 - y^2 + y - 1}\,dy$

Calculando integrais

Calcule as integrais dos exercícios 35–40.

35. $\displaystyle\int \frac{e^t\,dt}{e^{2t} + 3e^t + 2}$
36. $\displaystyle\int \frac{e^{4t} + 2e^{2t} - e^t}{e^{2t} + 1}\,dt$
37. $\displaystyle\int \frac{\cos y\,dy}{\operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen} y - 6}$
38. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\cos^2\theta + \cos\theta - 2}$
39. $\displaystyle\int \frac{(x - 2)^2 \operatorname{tg}^{-1}(2x) - 12x^3 - 3x}{(4x^2 + 1)(x - 2)^2}\,dx$
40. $\displaystyle\int \frac{(x + 1)^2 \operatorname{tg}^{-1}(3x) + 9x^3 + x}{(9x^2 + 1)(x + 1)^2}\,dx$

Problemas de valor inicial

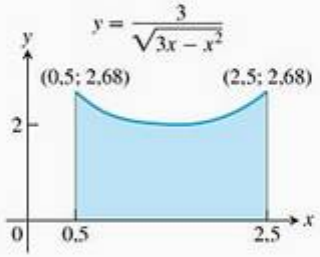
Nos problemas de valor inicial dos exercícios 41–44, determine x em função de t.

41. $(t^2 - 3t + 2)\dfrac{dx}{dt} = 1 \quad (t > 2), \quad x(3) = 0$
42. $(3t^4 + 4t^2 + 1)\dfrac{dx}{dt} = 2\sqrt{3}, \quad x(1) = -\pi\sqrt{3}/4$
43. $(t^2 + 2t)\dfrac{dx}{dt} = 2x + 2 \quad (t, x > 0), \quad x(1) = 1$
44. $(t + 1)\dfrac{dx}{dt} = x^2 + 1 \quad (t > -1), \quad x(0) = \pi/4$

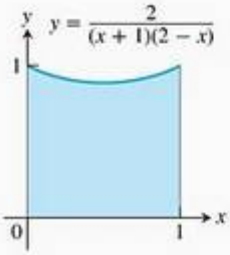
Aplicações e exemplos

Nos exercícios 45 e 46, determine o volume do sólido gerado pela rotação da região sombreada em relação ao eixo indicado.

45. Eixo x.

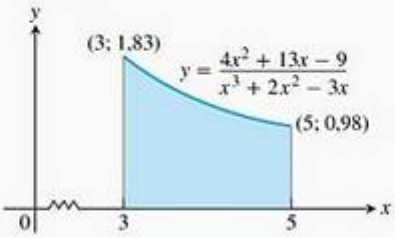


46. Eixo y.



47. Determine, com duas casas decimais, a abscissa do centróide da região no primeiro quadrante delimitada pelo eixo x, pela curva $y = \text{tg}^{-1} x$ e pela reta $x = \sqrt{3}$.

48. Determine, com duas casas decimais, a abscissa do centróide desta região.



49. Difusão social Às vezes, os sociólogos usam a expressão "difusão social" para descrever o modo como a informação se dissemina entre uma população. A informação pode ser um boato, uma novidade cultural ou notícias sobre uma inovação técnica. Em uma população suficientemente grande, o número de pessoas x que têm a informação é tratado como uma função diferenciável do tempo t e a taxa de difusão, dx/dt, é considerada proporcional ao número de pessoas que têm a informação multiplicado pelo número de pessoas que não a têm. Isso fornece a equação

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$$

onde N é a população total.

Suponha que t seja medido em dias, $k = 1/250$ e duas pessoas dêem início a um boato no momento $t = 0$ em uma população de $N = 1.000$ pessoas.

(a) Encontre x como uma função de t.

(b) Quando metade da população terá ouvido o boato? (Este é o momento em que o boato estará se espalhando mais rápido.)

50. Reações químicas de segunda ordem Muitas reações químicas são o resultado da interação de duas moléculas que sofrem uma modificação para formar um novo produto. A velocidade da reação depende em geral da concentração dos dois tipos de moléculas. Se a é a quantidade da substância A e b é a quantidade da substância B no tempo $t = 0$, sendo x a quantidade do produto no momento t, então a velocidade de formação de x pode ser dada pela equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

ou

$$\frac{1}{(a - x)(b - x)} \frac{dx}{dt} = k$$

onde k é uma constante de reação. Integre os dois lados dessa equação para obter uma relação entre x e t (a) se $a = b$ e (b) se $a \neq b$. Considere nos dois casos que $x = 0$ quando $t = 0$.

51. Uma integral que relaciona π à aproximação 22/7

(a) Calcule $\int_0^1 \frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1}\,dx$

(b) A aproximação $\pi \approx 22/7$ é razoável? Descubra isso expressando $\left(\frac{22}{7} - \pi\right)$ como uma porcentagem de π.

(c) Faça o gráfico da função $y = \frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1}$ para $0 \leq x \leq 1$. Experimente colocar a imagem no eixo y entre 0 e 1, depois entre 0 e 0,5 e, em seguida, diminua a imagem até que o gráfico possa ser visto. O que você conclui quanto à área sob a curva?

52. Encontre o polinômio de segundo grau $P(x)$ tal que $P(0) = 1$, $P'(0) = 0$ e

$$\int \frac{P(x)}{x^3(x-1)^2}\,dx$$

seja uma função racional.

8.4 Integrais trigonométricas

Integrais trigonométricas envolvem combinações algébricas das seis funções trigonométricas básicas. Em princípio, podemos sempre expressar tais integrais em termos de senos e cossenos, mas muitas vezes é mais simples trabalhar com outras funções, como ocorre na integral

$$\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C$$

A idéia geral é usar identidades para transformar as integrais que temos de determinar em integrais com as quais seja mais fácil lidar.

Produtos de potências de senos e cossenos

Começamos com integrais da forma:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$$

onde m e n são inteiros não negativos (positivos ou zero). Podemos dividir a tarefa em três casos possíveis.

Caso 1 Se m é ímpar, escrevemos m como $2k + 1$ e usamos a identidade $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para obter

$$\operatorname{sen}^m x = \operatorname{sen}^{2k+1} x = (\operatorname{sen}^2 x)^k \operatorname{sen} x = (1 - \cos^2 x)^k \operatorname{sen} x \tag{1}$$

Então, combinamos o único sen x com dx na integral e igualamos sen $x\, dx$ a $-d(\cos x)$.

Caso 2 Se m é par e n é ímpar em $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, escrevemos n como $2k + 1$ e usamos a identidade $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para obter

$$\cos^n x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x$$

Então, combinamos o único cos x com dx e igualamos cos $x\, dx$ a $d(\operatorname{sen} x)$.

Caso 3 Se tanto m quanto n são pares em $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, substituímos

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \tag{2}$$

para reduzir o integrando a outro que tenha potências mais baixas de cos $2x$.

Veja alguns exemplos que ilustram cada um dos casos.

EXEMPLO 1 *m é ímpar*

Calcule

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x\, (-d(\cos x)) \\
&= \int (1 - u^2)(u^2)(-du) && u = \cos x \\
&= \int (u^4 - u^2)\, du \\
&= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C \\
&= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 *m* é par e *n* é ímpar

Calcule

$$\int \cos^5 x\, dx$$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x\, dx &= \int \cos^4 x \cos x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2\, d(\operatorname{sen} x) && m = 0 \\
&= \int (1 - u^2)^2\, du && u = \operatorname{sen} x \\
&= \int (1 - 2u^2 + u^4)\, du \\
&= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 *m* e *n* são ambos pares

Calcule

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x)(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{8}\left[x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \int (\cos^2 2x + \cos^3 2x)\, dx\right]
\end{aligned}$$

Para o termo que envolve $\cos^2 2x$, usamos

$$\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)$$

Omitindo a constante de integração até o resultado final.

Para o termo $\cos^3 2x$, temos:

$$\int \cos^3 2x\,dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\,dx$$

$u = \operatorname{sen} 2x$, $du = 2\cos 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\,du = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2x\right)$$

Novamente, omitindo C.

Combinando tudo e simplificando, temos

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2x\right) + C$$

Eliminando raízes quadradas

No exemplo a seguir, usaremos a identidade $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ para eliminar uma raiz quadrada.

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\,dx$$

SOLUÇÃO Para eliminar a raiz quadrada, usamos a identidade

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \text{ou} \quad 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$$

Com $\theta = 2x$, isso se torna

$$1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$$

Portanto,

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2\cos^2 2x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx$$

$\cos 2x \geq 0$ em $[0, \pi/4]$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}[1 - 0] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Integrais de potências de tg x e sec x

Já sabemos como integrar a tangente e a secante e seus quadrados. Para integrar potências maiores, usamos as identidades $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ e $\sec^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 1$ e integramos por partes quando necessário, a fim de reduzir potências maiores a potências menores.

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^4 x\,dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot (\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\,dx - \int \operatorname{tg}^2 x\,dx \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\,dx - \int (\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\,dx - \int \sec^2 x\,dx + \int dx\end{aligned}$$

Na primeira integral, estabelecemos

$$u = \operatorname{tg} x, \qquad du = \sec^2 x\,dx$$

e assim temos

$$\int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C_1$$

As integrais remanescentes são formas-padrão, logo,

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C$$

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int \sec^3 x\,dx$$

SOLUÇÃO Integramos por partes, usando

$$u = \sec x, \qquad dv = \sec^2 x\,dx, \qquad v = \operatorname{tg} x, \qquad du = \sec x \operatorname{tg} x\,dx$$

Então

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \sec x \operatorname{tg} x - \int (\operatorname{tg} x)(\sec x \operatorname{tg} x\,dx) \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,dx \qquad \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \\ &= \sec x \operatorname{tg} x + \int \sec x\,dx - \int \sec^3 x\,dx\end{aligned}$$

Combinando as duas integrais de secantes ao cubo, temos

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \operatorname{tg} x + \int \sec x\,dx$$

e

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

Produtos de senos e cossenos

As integrais

$$\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx, \qquad \int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx \qquad \text{e} \qquad \int \cos mx \cos nx\, dx$$

costumam aparecer quando funções trigonométricas são aplicadas a problemas de matemática e ciência. Podemos calcular essas integrais usando integração por partes, mas sempre serão necessárias duas integrações desse tipo em cada caso. É mais simples usar as identidades

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \tag{3}$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m-n)x + \operatorname{sen}(m+n)x] \tag{4}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] \tag{5}$$

Essas identidades provêm das fórmulas para soma dos ângulos nas funções seno e cosseno (Apêndice B.3). Elas resultam em funções cujas primitivas são facilmente encontradas.

EXEMPLO 7 Calcule

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx$$

SOLUÇÃO A partir da Equação (4), com $m = 3$ e $n = 5$, temos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx &= \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen}(-2x) + \operatorname{sen} 8x]\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} 8x - \operatorname{sen} 2x)\, dx \\ &= -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C\end{aligned}$$

Exercícios 8.4

Produtos de potências de senos e cossenos

Calcule as integrais dos exercícios 1–14.

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\, dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^5 \frac{x}{2}\, dx$
3. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} 3\cos^5 3x\, dx$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7 y\, dy$
6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 7\cos^7 t\, dt$
7. $\displaystyle\int_0^{\pi} 8\operatorname{sen}^4 x\, dx$
8. $\displaystyle\int_0^{1} 8\cos^4 2\pi x\, dx$
9. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 16\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$
10. $\displaystyle\int_0^{\pi} 8\operatorname{sen}^4 y \cos^2 y\, dy$
11. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 35\operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\, dx$
12. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 2x \cos^2 2x\, dx$
13. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} 8\cos^3 2\theta \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$
14. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2\theta \cos^3 2\theta\, d\theta$

Integrais com raízes quadradas

Calcule as integrais dos exercícios 15–22.

15. $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}\, dx$

16. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx$

17. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}\, dt$

18. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 \theta}\, d\theta$

19. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\, dx$

20. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x - 1}\, dx$

21. $\int_0^{\pi/2} \theta\sqrt{1 - \cos 2\theta}\, d\theta$

22. $\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2 t)^{3/2}\, dt$

Potências de tg x e sec x

Calcule as integrais dos exercícios 23–32.

23. $\int_{-\pi/3}^{0} 2 \sec^3 x\, dx$

24. $\int e^x \sec^3 e^x\, dx$

25. $\int_0^{\pi/4} \sec^4 \theta\, d\theta$

26. $\int_0^{\pi/12} 3 \sec^4 3x\, dx$

27. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cosec}^4 \theta\, d\theta$

28. $\int_{\pi/2}^{\pi} 3 \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}\, d\theta$

29. $\int_0^{\pi/4} 4 \operatorname{tg}^3 x\, dx$

30. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 6 \operatorname{tg}^4 x\, dx$

31. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{cotg}^3 x\, dx$

32. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 8 \operatorname{cotg}^4 t\, dt$

Produtos de senos e cossenos

Calcule as integrais dos exercícios 33–38.

33. $\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen} 3x \cos 2x\, dx$

34. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x \cos 3x\, dx$

35. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 3x\, dx$

36. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

37. $\int_0^{\pi} \cos 3x \cos 4x\, dx$

38. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos 7x\, dx$

Teoria e exemplos

39. **Área de superfície** Determine a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do arco

$$x = t^{2/3}, \qquad y = t^2/2, \qquad 0 \le t \le 2$$

40. **Comprimento do arco** Determine o comprimento da curva

$$y = \ln(\cos x), \qquad 0 \le x \le \pi/3$$

41. **Comprimento do arco** Determine o comprimento da curva

$$y = \ln(\sec x), \qquad 0 \le x \le \pi/4$$

42. **Centro de gravidade** Determine o centro de gravidade da região delimitada pelo eixo x, pela curva $y = \sec x$ e pelas retas $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$.

43. **Volume** Determine o volume gerado pela rotação, em torno do eixo x, de um arco da curva $y = \operatorname{sen} x$.

44. **Área** Determine a área entre o eixo x e a curva $y = \sqrt{1 + \cos 4x}$, $0 \le x \le \pi$.

45. **Funções ortogonais** Duas funções, f e g, são chamadas de **ortogonais** em um intervalo $a \le x \le b$ se $\int_a^b f(x)g(x)\, dx = 0$.

    (a) Prove que sen mx e sen nx são ortogonais em qualquer intervalo de comprimento 2π desde que m e n sejam inteiros, tais que $m^2 \ne n^2$.

    (b) Prove o mesmo para cos mx e cos nx.

    (c) Prove o mesmo para sen mx e cos nx, mesmo que $m = n$.

46. **Série de Fourier** Uma série de Fourier finita é dada pela soma

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen} nx \\ &= a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_N \operatorname{sen} Nx \end{aligned}$$

Demonstre que o m-ésimo coeficiente a_m é dado pela fórmula

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\, dx$$

8.5 Substituições trigonométricas

As substituições trigonométricas podem servir para transformar integrais que envolvam $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ e $\sqrt{x^2 - a^2}$ em integrais que podemos calcular diretamente.

Três substituições básicas

As substituições mais comuns são $x = a \operatorname{tg} \theta$, $x = a \operatorname{sen} \theta$ e $x = a \sec \theta$. Elas vêm dos triângulos retângulos de referência da Figura 8.2.

Com $x = a \operatorname{tg} \theta$,

$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta = a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) = a^2 \sec^2 \theta$$

Com $x = a \operatorname{sen} \theta$,

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta = a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta) = a^2 \cos^2 \theta$$

Com $x = a \sec \theta$,

$$x^2 - a^2 = a^2 \sec^2 \theta - a^2 = a^2(\sec^2 \theta - 1) = a^2 \operatorname{tg}^2 \theta$$

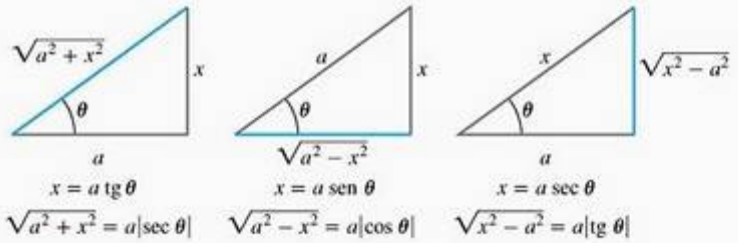


FIGURA 8.2 Triângulos de referência para as três substituições básicas; eles ajudam a identificar os lados x e a para cada substituição.

Desejamos que toda substituição usada em uma integração seja reversível, de maneira que possamos voltar para a variável original posteriormente. Por exemplo, se $x = a \operatorname{tg} \theta$, queremos poder estabelecer que $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(x/a)$ após a integração ter ocorrido. Se $x = a \operatorname{sen} \theta$, queremos poder estabelecer que $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(x/a)$ no final, o mesmo valendo para $x = a \sec \theta$.

Como já vimos na Seção 1.6, nessas substituições as funções têm inversas somente para valores selecionados de θ (Figura 8.3). Para reversibilidade,

$$x = a \operatorname{tg} \theta \quad \text{exige } \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{com} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$x = a \operatorname{sen} \theta \quad \text{exige} \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{com} \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$x = a \sec \theta \quad \text{exige} \quad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{com} \quad \begin{cases} 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} & \text{se} \quad \dfrac{x}{a} \ge 1 \\ \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi & \text{se} \quad \dfrac{x}{a} \le -1 \end{cases}$$

Para simplificar os cálculos com a substituição $x = a \sec \theta$, restringiremos seu uso a integrais nas quais $x/a \ge 1$. Isso colocará θ em $[0, \pi/2)$ e tornará $\operatorname{tg} \theta \ge 0$. Teremos, então, $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta} = |a \operatorname{tg} \theta| = a \operatorname{tg} \theta$, livre de valores absolutos, desde que $a > 0$.

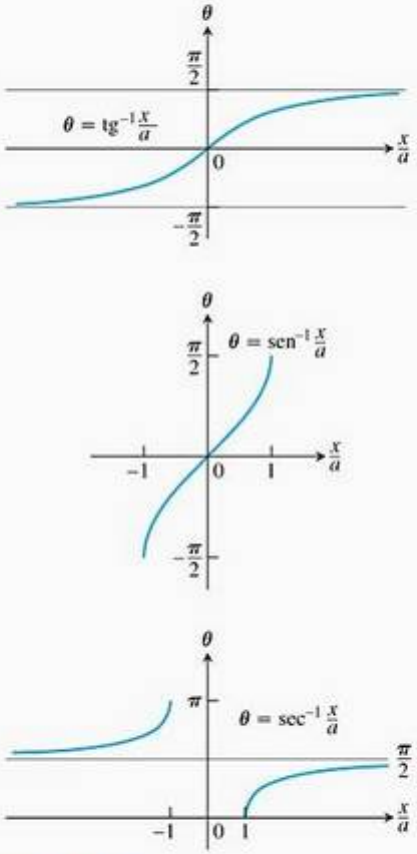


FIGURA 8.3 O arco tangente, o arco seno e o arco secante de x/a, representados graficamente como funções de x/a.

EXEMPLO 1 Usando a substituição $x = a \operatorname{tg} \theta$

Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$$

SOLUÇÃO Determinamos

$$x = 2 \operatorname{tg} \theta, \qquad dx = 2 \sec^2 \theta \, d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$4 + x^2 = 4 + 4 \operatorname{tg}^2 \theta = 4(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) = 4 \sec^2 \theta$$

Então

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{|\sec\theta|} \qquad \sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta|$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta \qquad \sec\theta > 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$= \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C \qquad \text{Da Figura 8.4.}$$

$$= \ln|\sqrt{4+x^2} + x| + C' \qquad \text{Considerando } C' = C - \ln 2$$

Note como expressamos $\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|$ em termos de x: desenhamos um triângulo de referência para a substituição original $x = 2\operatorname{tg}\theta$ (Figura 8.4) e lemos as relações trigonométricas no triângulo.

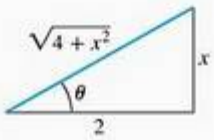


FIGURA 8.4 Triângulo de referência para $x = 2\operatorname{tg}\theta$ (Exemplo 1):

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{2}$$

e

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$$

EXEMPLO 2 Usando a substituição $x = a \operatorname{sen}\theta$

Calcule

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

SOLUÇÃO Determinamos

$$x = 3\operatorname{sen}\theta, \qquad dx = 3\cos\theta\, d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$9 - x^2 = 9 - 9\operatorname{sen}^2\theta = 9(1 - \operatorname{sen}^2\theta) = 9\cos^2\theta$$

Então

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{9\operatorname{sen}^2\theta \cdot 3\cos\theta\, d\theta}{|3\cos\theta|}$$

$$= 9\int \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \qquad \cos\theta > 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$= 9\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right) + C$$

$$= \frac{9}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta) + C \qquad \operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$= \frac{9}{2}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + C \qquad \text{Figura 8.5}$$

$$= \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C$$

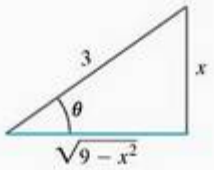


FIGURA 8.5 Triângulo de referência para $x = 3\operatorname{sen}\theta$ (Exemplo 2):

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3}$$

e

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

EXEMPLO 3 Usando a substituição $x = a \sec\theta$

Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} \qquad x > \frac{2}{5}$$

SOLUÇÃO Primeiro reescrevemos o radical como

$$\sqrt{25x^2 - 4} = \sqrt{25\left(x^2 - \frac{4}{25}\right)}$$
$$= 5\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

para colocar o radicando na forma $x^2 - a^2$. Então, substituímos

$$x = \frac{2}{5}\sec\theta, \qquad dx = \frac{2}{5}\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}\sec^2\theta - \frac{4}{25}$$
$$= \frac{4}{25}(\sec^2\theta - 1) = \frac{4}{25}\mathrm{tg}^2\,\theta$$

$$\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}|\mathrm{tg}\,\theta| = \frac{2}{5}\mathrm{tg}\,\theta \qquad \mathrm{tg}\,\theta > 0 \text{ para } 0 < \theta < \pi/2$$

Com essas substituições, temos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}} = \int \frac{dx}{5\sqrt{x^2 - (4/25)}} = \int \frac{(2/5)\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta}{5\cdot(2/5)\,\mathrm{tg}\,\theta}$$
$$= \frac{1}{5}\int \sec\theta\,d\theta = \frac{1}{5}\ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta| + C$$
$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2 - 4}}{2}\right| + C$$

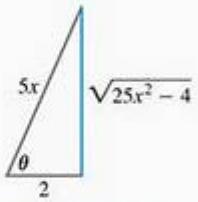


FIGURA 8.6 Se $x = (2/5)\sec\theta$, $0 \le \theta < \pi/2$, então $\theta = \sec^{-1}(5x/2)$ e podemos ler os valores de outras funções trigonométricas de θ nesse triângulo retângulo (Exemplo 3).

Figura 8.6

Uma substituição trigonométrica, às vezes, pode nos ajudar a calcular uma integral que contenha uma potência inteira de um binômio quadrático, como no próximo exemplo.

EXEMPLO 4 Determinando o volume de um sólido de revolução

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região delimitada pela curva $y = 4(x^2 + 4)$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 2$.

SOLUÇÃO Esboçamos a região (Figura 8.7) e usamos o método do disco:

$$V = \int_0^2 \pi[R(x)]^2\,dx = 16\pi\int_0^2 \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} \qquad R(x) = \frac{4}{x^2 + 4}$$

Para calcular a integral, determinamos

$$x = 2\,\mathrm{tg}\,\theta, \qquad dx = 2\sec^2\theta\,d\theta, \qquad \theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{2}$$
$$x^2 + 4 = 4\,\mathrm{tg}^2\,\theta + 4 = 4(\mathrm{tg}^2\,\theta + 1) = 4\sec^2\theta$$

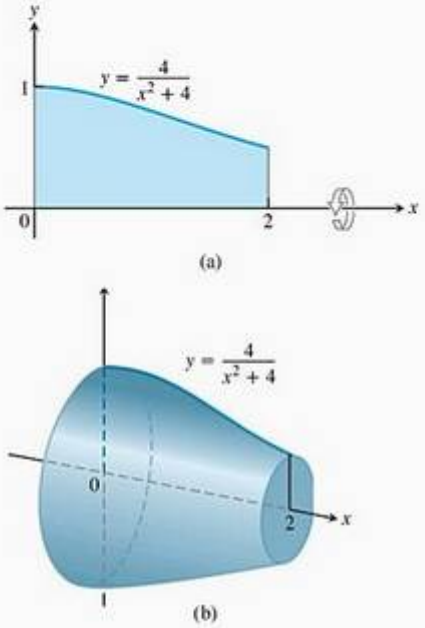


FIGURA 8.7 A região (a) e o sólido (b) do Exemplo 4.

(Figura 8.8) Com essas substituições:

$$V = 16\pi \int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2}$$

$$= 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{(4\sec^2\theta)^2} \qquad \theta = 0 \text{ quando } x = 0;\ \theta = \pi/4 \text{ quando } x = 2$$

$$= 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{16\sec^4\theta} = \pi \int_0^{\pi/4} 2\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta = \pi\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} \qquad 2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$$

$$= \pi\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] \approx 4{,}04$$

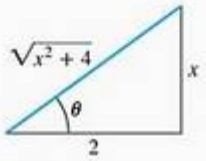


FIGURA 8.8 Triângulo de referência para $x = 2 \operatorname{tg} \theta$ (Exemplo 4).

EXEMPLO 5 Determinando a área de uma elipse

Determine a área delimitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

SOLUÇÃO Como a elipse é simétrica em relação aos dois eixos, a área total A é quatro vezes a área no primeiro quadrante (Figura 8.9). Determinando $y \geq 0$ na equação da elipse, temos

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

ou

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad 0 \leq x \leq a$$

A área da elipse é

$$A = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\, d\theta \qquad x = a\operatorname{sen}\theta,\ dx = a\cos\theta\, d\theta,\ \theta = 0 \text{ quando } x = 0;\ \theta = \pi/2 \text{ quando } x = a$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 2ab\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2ab\left[\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right] = \pi ab$$

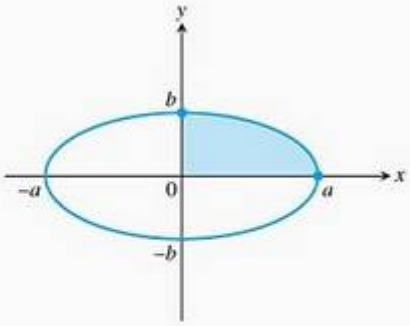


FIGURA 8.9 A elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ do Exemplo 5.

Se $a = b = r$, concluímos que a área de um círculo com raio r é πr^2.

Exercícios 8.5

Substituições trigonométricas básicas

Calcule as integrais dos exercícios 1–28.

1. $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{9+y^2}}$

2. $\displaystyle\int \frac{3\,dy}{\sqrt{1+9y^2}}$

3. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$

4. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{8+2x^2}$

5. $\displaystyle\int_{0}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

6. $\displaystyle\int_{0}^{1/2\sqrt{2}} \frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

7. $\displaystyle\int \sqrt{25-t^2}\,dt$

8. $\displaystyle\int \sqrt{1-9t^2}\,dt$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-49}}, \quad x > \frac{7}{2}$

10. $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{\sqrt{25x^2-9}}, \quad x > \frac{3}{5}$

11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{y^2-49}}{y}\,dy, \quad y > 7$

12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{y^2-25}}{y^3}\,dy, \quad y > 5$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$

14. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$

15. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

17. $\displaystyle\int \frac{8\,dw}{w^2\sqrt{4-w^2}}$

18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-w^2}}{w^2}\,dw$

19. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2\,dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

20. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}, \quad x > 1$

22. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-1)^{5/2}}, \quad x > 1$

23. $\displaystyle\int \frac{(1-x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x^4}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{8\,dx}{(4x^2+1)^2}$

26. $\displaystyle\int \frac{6\,dt}{(9t^2+1)^2}$

27. $\displaystyle\int \frac{v^2\,dv}{(1-v^2)^{5/2}}$

28. $\displaystyle\int \frac{(1-r^2)^{5/2}}{r^8}\,dr$

Nos exercícios 29–36, faça uma substituição apropriada e depois uma substituição trigonométrica para calcular as integrais.

29. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 4} \frac{e^t\,dt}{\sqrt{e^{2t}+9}}$

30. $\displaystyle\int_{\ln(3/4)}^{\ln(4/3)} \frac{e^t\,dt}{(1+e^{2t})^{3/2}}$

31. $\displaystyle\int_{1/12}^{1/4} \frac{2\,dt}{\sqrt{t}+4t\sqrt{t}}$

32. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{dy}{y\sqrt{1+(\ln y)^2}}$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$

35. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Problemas de valor inicial

Nos problemas de valor inicial dos exercícios 37–40, determine y em função de x.

37. $x\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2-4}, \quad x \geq 2, \quad y(2) = 0$

38. $\sqrt{x^2-9}\,\dfrac{dy}{dx} = 1, \quad x > 3, \quad y(5) = \ln 3$

39. $(x^2+4)\dfrac{dy}{dx} = 3, \quad y(2) = 0$

40. $(x^2+1)^2\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+1}, \quad y(0) = 1$

Aplicações

41. Determine a área da região no primeiro quadrante que é delimitada pelos eixos coordenados e pela curva $y = \sqrt{9-x^2}/3$.

42. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região do primeiro quadrante delimitada pelos eixos de coordenadas, pela curva $y = 2/(1+x^2)$ e pela reta $x = 1$.

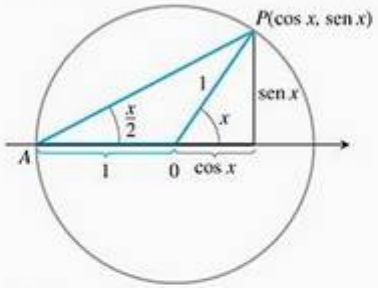
A substituição $z = \text{tg}\,(x/2)$

A substituição

$$z = \text{tg}\,\frac{x}{2} \tag{1}$$

reduz o problema de integrar uma expressão racional de sen x e cos x ao problema de integrar uma função racional de z. Isso, por sua vez, pode ser resolvido com frações parciais.

A partir desta figura



podemos ler a relação

$$\text{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{\text{sen}\,x}{1+\cos x}$$

Para perceber o efeito da substituição, calculamos

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{\sec^2(x/2)} - 1$$

$$= \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} - 1 = \frac{2}{1 + z^2} - 1$$

$$\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \qquad (2)$$

e

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\operatorname{sen}(x/2)}{\cos(x/2)}\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sec^2(x/2)} = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1 + z^2} \qquad (3)$$

Por fim, $x = 2\operatorname{tg}^{-1} z$, portanto

$$dx = \frac{2\,dz}{1 + z^2} \qquad (4)$$

Exemplos

(a) $$\int \frac{1}{1 + \cos x}\,dx = \int \frac{1 + z^2}{2}\,\frac{2\,dz}{1 + z^2}$$

$$= \int dz = z + C$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

(b) $$\int \frac{1}{2 + \operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{1 + z^2}{2 + 2z + 2z^2}\,\frac{2\,dz}{1 + z^2}$$

$$= \int \frac{dz}{z^2 + z + 1} = \int \frac{dz}{(z + (1/2))^2 + 3/4}$$

$$= \int \frac{du}{u^2 + a^2}$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2z + 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{1 + 2\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}} + C$$

Nos exercícios 43–50, use as substituições das equações (1) a (4) para calcular as integrais. Integrais como estas aparecem no cálculo da velocidade angular média do eixo de saída de uma junta universal quando os eixos de entrada e de saída não estão bem alinhados.

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x}$

44. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}$

45. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$

46. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1 - \cos x}$

47. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$

48. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\cos\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$

49. $\displaystyle\int \frac{dt}{\operatorname{sen} t - \cos t}$

50. $\displaystyle\int \frac{\cos t\,dt}{1 - \cos t}$

Nos exercícios 51 e 52, use a substituição $z = \operatorname{tg}(\theta/2)$ para calcular a integral.

51. $\displaystyle\int \sec\theta\,d\theta$

52. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}\theta\,d\theta$

8.6 Tabelas de integrais e sistemas de álgebra por computador

Como já estudamos, as técnicas básicas de integração são a substituição e a integração por partes. Aplicamos tais técnicas para transformar integrais desconhecidas em integrais cuja forma reconhecemos ou podemos achar em uma tabela. Mas de onde vêm as integrais das tabelas? Elas vêm da aplicação de substituições e integrações por partes; ou, ainda, pela derivação de funções importantes que surgem na prática e tabulação dos resultados (assim como fizemos ao criar a Tabela 8.1). Quando uma integral coincide com uma integral da tabela, ou pode ser transformada em uma das integrais tabuladas com um pouco de álgebra, trigonometria, substituição e cálculo, o resultado pode ser usado para resolver o problema de integração sob análise.

Os sistemas de álgebra por computador (SAC) também podem ser usados para calcular uma integral, caso disponha deles. No entanto, lembre-se de que existem muitas funções relativamente simples, como sen (x^2) ou $1/\ln x$, para

as quais nem mesmo o mais potente dos SACs pode encontrar fórmulas explícitas de primitivas, pois tais fórmulas não existem.

Nesta seção, discutiremos como usar tabelas e sistemas de álgebra por computador para calcular integrais.

Tabelas de integrais

Uma "breve tabela de integrais" é oferecida no final deste livro, após o índice. (Tabelas mais extensas aparecem em compilações que trazem milhares de integrais, como a *CRC Mathematical Tables*.) As fórmulas de integração são dadas em termos de constantes a, b, c, m, n e assim por diante. Essas constantes geralmente podem assumir qualquer valor real e não precisam ser inteiras. Limitações ocasionais de seus valores são apresentadas com as fórmulas. Por exemplo, a Fórmula 5 exige $n \neq -1$ e a Fórmula 11 exige $n \neq 2$.

As fórmulas também assumem que as constantes não adquirem valores que requeiram divisões por zero nem raízes pares de números negativos. Por exemplo, a Fórmula 8 assume que $a \neq 0$ e as fórmulas 13(a) e (b) só podem ser usadas se b for positivo.

As integrais dos exemplos 1 a 5 desta seção podem ser calculadas com manipulação algébrica, substituição ou integração por partes. Aqui, vamos ilustrar como essas integrais são encontradas usando-se a breve tabela de integrais.

EXEMPLO 1 Determine

$$\int x(2x + 5)^{-1}\, dx$$

SOLUÇÃO Usamos a Fórmula 8 (não a 7, que exige $n \neq -1$):

$$\int x(ax + b)^{-1}\, dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax + b| + C$$

Com $a = 2$ e $b = 5$, temos

$$\int x(2x + 5)^{-1}\, dx = \frac{x}{2} - \frac{5}{4} \ln |2x + 5| + C$$

EXEMPLO 2 Determine

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x + 4}}$$

SOLUÇÃO Usamos a Fórmula 13(b):

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax + b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax + b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax + b} + \sqrt{b}} \right| + C, \text{ se } b > 0$$

Com $a = 2$ e $b = 4$, temos

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+4} - \sqrt{4}}{\sqrt{2x+4} + \sqrt{4}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+4} - 2}{\sqrt{2x+4} + 2} \right| + C$$

A Fórmula 13(a), que exigiria $b < 0$ aqui, não é adequada neste Exemplo 2. Ela é apropriada, contudo, para o próximo exemplo.

EXEMPLO 3 Determine

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}}$$

SOLUÇÃO Usamos a Fórmula 13(a):

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax-b}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{ax-b}{b}} + C$$

Com $a = 2$ e $b = 4$, temos

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}} = \frac{2}{\sqrt{4}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{2x-4}{4}} + C = \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$$

EXEMPLO 4 Determine

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}$$

SOLUÇÃO Começamos com a Fórmula 15:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$$

Com $a = 2$ e $b = -4$, temos

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = -\frac{\sqrt{2x-4}}{-4x} + \frac{2}{2 \cdot 4} \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}} + C$$

Então usamos a Fórmula 13(a) para resolver a integral da direita (Exemplo 3), obtendo:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$$

EXEMPLO 5 Determine

$$\int x \operatorname{sen}^{-1} x \, dx$$

SOLUÇÃO Usamos a Fórmula 99:

$$\int x^n \operatorname{sen}^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{sen}^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}, \qquad n \neq -1$$

Com $n = 1$ e $a = 1$, temos

$$\int x \operatorname{sen}^{-1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

A integral da direita está na tabela; é a Fórmula 33:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$$

Com $a = 1$,

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

O resultado combinado é

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen}^{-1} x\,dx &= \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C\right)\\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\operatorname{sen}^{-1} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C'\end{aligned}$$

Fórmulas de redução

O tempo necessário para fazer integrações por partes repetidas pode ser encurtado aplicando-se fórmulas do tipo

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx \tag{1}$$

$$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx \tag{2}$$

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^m x\,dx \qquad (n \neq -m) \tag{3}$$

Fórmulas como essas são chamadas **fórmulas de redução**, pois substituem uma integral que contém certa potência de uma função por uma integral da mesma forma, mas com uma potência reduzida. Aplicando esse tipo de fórmula repetidas vezes, mais cedo ou mais tarde poderemos expressar a integral original em termos de uma potência baixa o bastante para ser calculada diretamente.

EXEMPLO 6 Usando uma fórmula de redução

Determine

$$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$$

SOLUÇÃO Aplicamos a Equação (1) com $n = 5$, obtendo

$$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \int \operatorname{tg}^3 x\,dx$$

Em seguida, aplicamos a Equação (1) de novo, mas desta vez com $n = 3$, a fim de calcular a integral que sobrou:

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \int \operatorname{tg} x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C$$

O resultado combinado é

$$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C'$$

Como sua forma sugere, fórmulas de redução são derivadas por meio de integração por partes.

EXEMPLO 7 Derivando uma fórmula de redução

Demonstre que, para qualquer inteiro positivo n,

$$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$$

SOLUÇÃO Usamos a fórmula da integração por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

com

$$u = (\ln x)^n, \qquad du = n(\ln x)^{n-1}\frac{dx}{x}, \qquad dv = dx, \qquad v = x$$

obtendo assim

$$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$$

Às vezes, duas fórmulas de redução entram em jogo.

EXEMPLO 8 Determine

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$$

SOLUÇÃO 1 Aplicamos a Equação (3) com $n = 2$ e $m = 3$, obtendo

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx = -\frac{\operatorname{sen} x \cos^4 x}{2+3} + \frac{1}{2+3}\int \operatorname{sen}^0 x \cos^3 x\,dx$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} x \cos^4 x}{5} + \frac{1}{5}\int \cos^3 x\,dx$$

Podemos calcular a integral que sobrou usando a Fórmula 61 (outra fórmula de redução):

$$\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax \operatorname{sen} ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx$$

Com $n = 3$ e $a = 1$, temos

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx$$

$$= \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x + C$$

O resultado combinado é

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx = -\frac{\operatorname{sen} x \cos^4 x}{5} + \frac{1}{5}\left(\frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x + C\right)$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} x \cos^4 x}{5} + \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{15} + \frac{2}{15}\operatorname{sen} x + C'$$

SOLUÇÃO 2 A Equação (3) corresponde à Fórmula 68 da tabela, mas ainda há outra equação que podemos usar — a Fórmula 69. Com $a = 1$, a Fórmula 69 resulta em

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x \cos^{m-1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^n x \cos^{m-2} x\,dx$$

Em nosso caso, $n = 2$ e $m = 3$, de modo que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{5}\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}\right) + C$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{15}\operatorname{sen}^3 x + C$$

Como você pode ver, é mais rápido usar a Fórmula 69, mas muitas vezes não conseguimos prever o que vai funcionar melhor. Não perca tempo demais procurando a "melhor" fórmula. Apenas ache uma que vai funcionar e siga em frente.

Observe também que as fórmulas 68 (Solução 1) e 69 (Solução 2) levam a respostas que parecem diferentes. Isso é bem comum no caso de integrais trigonométricas e não deve causar preocupação. Os resultados são equivalentes, e poderemos usar aquele que preferirmos.

Integrais não elementares

O desenvolvimento de computadores e calculadoras que encontram primitivas por meio de manipulação simbólica tem levado a um interesse renovado em descobrir quais primitivas podem ser expressas como combinações finitas de funções elementares (as funções que estudamos até agora) e quais não podem. Integrais de funções que não possuem primitivas elementares são denominadas integrais **não elementares**. Seu cálculo exige séries infinitas (Capítulo 11, Volume II) ou métodos numéricos. Nessa última categoria está a função de erro (que mede a probabilidade de erros aleatórios)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

bem como integrais do tipo

$$\int \operatorname{sen} x^2\, dx \quad \text{e} \quad \int \sqrt{1+x^4}\, dx$$

que aparecem em engenharia e física. Essas e várias outras, tais como

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx, \qquad \int e^{(e^x)}\, dx, \qquad \int \frac{1}{\ln x}\, dx, \qquad \int \ln(\ln x)\, dx, \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx,$$

$$\int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}\, dx, \qquad 0 < k < 1$$

parecem tão fáceis que ficamos tentados a verificar aonde elas vão dar. Pode ser provado, porém, que não há como expressar tais integrais como combinações finitas de funções elementares. O mesmo se aplica a integrais que, por substituição, podem ser transformadas nelas. Em conseqüência do teorema fundamental do cálculo, Parte I, todos os integrandos têm primitivas, porque são contínuos. Contudo, nenhuma dessas primitivas é elementar.

Nenhuma das integrais que você teve de calcular neste capítulo cai nessa categoria, mas você pode encontrar integrais não elementares em outras tarefas.

Integração com um SAC

Uma grande vantagem dos sistemas de álgebra por computador é a sua alta capacidade de integrar simbolicamente. Isso é realizado pelo **comando integrar** específico de cada sistema (por exemplo, **int** no Maple, **Integrate** no Mathematica).

EXEMPLO 9 Usando um SAC com uma função nomeada

Suponha que você queira calcular a integral indefinida da função

$$f(x) = x^2\sqrt{a^2 + x^2}$$

Usando o Maple, você primeiro define ou nomeia a função:

```
> f:= x^2 * sqrt (a^2 + x^2)
```

Depois você usa o comando integrar em *f*, identificando a variável de integração:

```
> int(f, x)
```

O Maple dá a resposta

$$\frac{1}{4}x(a^2 + x^2)^{3/2} - \frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{1}{8}a^4 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

Se você deseja saber se a resposta pode ser simplificada, digite

```
> simplify(%)
```

O Maple retorna

$$\frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{4}x^3\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{1}{8}a^4 \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$$

Se você quer a integral definida para $0 \le x \le \pi/2$, pode usar o formato

```
> int(f, x = 0..Pi/2)
```

O Maple (Versão 5.1) apresentará a expressão

$$\frac{1}{64}\pi(4a^2+\pi^2)^{(3/2)}-\frac{1}{32}a^2\pi\sqrt{4a^2+\pi^2}+\frac{1}{8}a^4\ln(2)$$
$$-\frac{1}{8}a^4\ln\left(\pi+\sqrt{4a^2+\pi^2}\right)+\frac{1}{16}a^4\ln(a^2)$$

Você também pode encontrar a integral definida para determinado valor da constante a:

```
> a:= 1
> int(f, x = 0..1)
```

O Maple dá a resposta numérica

$$\frac{3}{8}\sqrt{2}+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

EXEMPLO 10 Usando um SAC sem nomear a função

Use um SAC para encontrar

$$\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx$$

SOLUÇÃO Com o Maple, temos a entrada

```
> int((sin ^2)(x)*(cos ^3)(x), x)
```

com a resposta imediata

$$-\frac{1}{5}\operatorname{sen}(x)\cos(x)^4+\frac{1}{15}\cos(x)^2\operatorname{sen}(x)+\frac{2}{15}\operatorname{sen}(x)$$

EXEMPLO 11 Um SAC pode não fornecer uma solução em formato fechado

Use um SAC para encontrar

$$\int (\cos^{-1} ax)^2\,dx$$

SOLUÇÃO Usando o Maple, inserimos

```
> int((arccos(a*x))^2, x)
```

e o Maple apresenta a expressão

$$\int \arccos(ax)^2\,dx$$

indicando que não tem uma solução pronta. No Capítulo 11, Volume II, você verá como expansões em série podem ajudar a calcular essa integral.

Sistemas de álgebra por computador variam na maneira de processar as integrações. Usamos o Maple 5.1 nos Exemplos 9 a 11. O Mathematica 4 teria oferecido resultados um pouco diferentes:

1. No Exemplo 9, se inserimos

In [1]: = Integrate [x^2 * Sqrt [a^2 + x^2], x]

o Mathematica responde

$$Out\ [1]= \sqrt{a^2 + x^2}\left(\frac{a^2 x}{8} + \frac{x^3}{4}\right) - \frac{1}{8}a^4 \operatorname{Log}\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right]$$

sem ter de simplificar um resultado intermediário. A resposta é semelhante à Fórmula 22 das tabelas de integrais.

2. A resposta do Mathematica para a integral

In [2]:= Integrate [Sin [x]^2 * Cos [x]^3, x]

do Exemplo 10 é

$$Out\ [2]= \frac{\operatorname{Sen}[x]}{8} - \frac{1}{48}\operatorname{Sin}[3\,x] - \frac{1}{80}\operatorname{Sin}[5\,x]$$

diferindo tanto da resposta do Maple quanto das respostas encontradas no Exemplo 8.

3. Ao contrário do Maple, o Mathematica fornece um resultado para a integração

In [3]:= Integrate [ArcCos [a * x]^2, x]

do Exemplo 11, mas com a condição de que $a \neq 0$:

$$Out\ [3]= -2x - \frac{2\sqrt{1 - a^2 x^2}\operatorname{ArcCos}[a\,x]}{a} + x\operatorname{ArcCos}[a\,x]^2$$

Apesar de os SACs serem muito poderosos e nos ajudarem a resolver problemas complicados, cada um tem suas limitações. Existem situações em que um SAC pode até mesmo complicar um problema (no sentido de produzir uma resposta extremamente difícil de utilizar ou interpretar). Observe também que nem o Maple nem o Mathematica dão como resultado uma constante arbitrária +C. Por outro lado, um pequeno cálculo matemático seu pode reduzir o problema a um que seja fácil resolver. Damos um exemplo disso no Exercício 111.

Exercícios 8.6

Usando tabelas de integrais

Use a tabela de integrais no final do livro para calcular as integrais dos exercícios 1–38.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$
3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}}$
4. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(2x+3)^{3/2}}$
5. $\displaystyle\int x\sqrt{2x-3}\,dx$
6. $\displaystyle\int x(7x+5)^{3/2}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-4x}}{x^2}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x-9}}$
9. $\displaystyle\int x\sqrt{4x-x^2}\,dx$
10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x}\,dx$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{7+x^2}}$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{7-x^2}}$
13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$
15. $\displaystyle\int \sqrt{25-p^2}\,dp$
16. $\displaystyle\int q^2\sqrt{25-q^2}\,dq$
17. $\displaystyle\int \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}\,dr$
18. $\displaystyle\int \frac{ds}{\sqrt{s^2-2}}$
19. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{5+4\operatorname{sen}2\theta}$
20. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{4+5\operatorname{sen}2\theta}$
21. $\displaystyle\int e^{2t}\cos 3t\,dt$
22. $\displaystyle\int e^{-3t}\operatorname{sen}4t\,dt$
23. $\displaystyle\int x\cos^{-1}x\,dx$
24. $\displaystyle\int x\operatorname{tg}^{-1}x\,dx$
25. $\displaystyle\int \frac{ds}{(9-s^2)^2}$
26. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{(2-\theta^2)^2}$
27. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4x+9}}{x^2}\,dx$
28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9x-4}}{x^2}\,dx$

29. $\int \frac{\sqrt{3t-4}}{t}\,dt$

30. $\int \frac{\sqrt{3t+9}}{t}\,dt$

31. $\int x^2 \operatorname{tg}^{-1} x\,dx$

32. $\int \frac{\operatorname{tg}^{-1} x}{x^2}\,dx$

33. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x\,dx$

34. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x\,dx$

35. $\int 8 \operatorname{sen} 4t \operatorname{sen} \frac{t}{2}\,dt$

36. $\int \operatorname{sen} \frac{t}{3} \operatorname{sen} \frac{t}{6}\,dt$

37. $\int \cos \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{4}\,d\theta$

38. $\int \cos \frac{\theta}{2} \cos 7\theta\,d\theta$

Substituição e tabelas de integrais

Nos exercícios 39–52, use uma substituição para transformar a integral em outra que você possa encontrar na tabela. Depois calcule a integral.

39. $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

40. $\int \frac{x^2+6x}{(x^2+3)^2}\,dx$

41. $\int \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{x}\,dx$

42. $\int \frac{\cos^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

43. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

44. $\int \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

45. $\int \operatorname{cotg} t \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,dt, \quad 0 < t < \pi/2$

46. $\int \frac{dt}{\operatorname{tg} t \sqrt{4-\operatorname{sen}^2 t}}$

47. $\int \frac{dy}{y\sqrt{3+(\ln y)^2}}$

48. $\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{5+\operatorname{sen}^2\theta}}$

49. $\int \frac{3\,dr}{\sqrt{9r^2-1}}$

50. $\int \frac{3\,dy}{\sqrt{1+9y^2}}$

51. $\int \cos^{-1} \sqrt{x}\,dx$

52. $\int \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{y}\,dy$

Usando fórmulas de redução

Nos exercícios 53–72, use fórmulas de redução para calcular as integrais.

53. $\int \operatorname{sen}^5 2x\,dx$

54. $\int \operatorname{sen}^5 \frac{\theta}{2}\,d\theta$

55. $\int 8 \cos^4 2\pi t\,dt$

56. $\int 3 \cos^5 3y\,dy$

57. $\int \operatorname{sen}^2 2\theta \cos^3 2\theta\,d\theta$

58. $\int 9 \operatorname{sen}^3 \theta \cos^{3/2} \theta\,d\theta$

59. $\int 2 \operatorname{sen}^2 t \sec^4 t\,dt$

60. $\int \operatorname{cosec}^2 y \cos^5 y\,dy$

61. $\int 4 \operatorname{tg}^3 2x\,dx$

62. $\int \operatorname{tg}^4 \left(\frac{x}{2}\right) dx$

63. $\int 8 \operatorname{cotg}^4 t\,dt$

64. $\int 4 \operatorname{cotg}^3 2t\,dt$

65. $\int 2 \sec^3 \pi x\,dx$

66. $\int \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^3 \frac{x}{2}\,dx$

67. $\int 3 \sec^4 3x\,dx$

68. $\int \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{3}\,d\theta$

69. $\int \operatorname{cosec}^5 x\,dx$

70. $\int \sec^5 x\,dx$

71. $\int 16x^3 (\ln x)^2\,dx$

72. $\int (\ln x)^3\,dx$

Potências de x vezes exponenciais

Calcule as integrais dos exercícios 73–80 usando as fórmulas 103–106 da tabela. Essas integrais também podem ser calculadas utilizando-se a integração tabular (Seção 8.2).

73. $\int x e^{3x}\,dx$

74. $\int x e^{-2x}\,dx$

75. $\int x^3 e^{x/2}\,dx$

76. $\int x^2 e^{\pi x}\,dx$

77. $\int x^2 2^x\,dx$

78. $\int x^2 2^{-x}\,dx$

79. $\int x \pi^x\,dx$

80. $\int x 2^{\sqrt{2}x}\,dx$

Substituições com fórmulas de redução

Nos exercícios 81–86, calcule as integrais fazendo uma substituição (talvez trigonométrica) e, depois, aplicando uma fórmula de redução.

81. $\int e^t \sec^3 (e^t - 1)\,dt$

82. $\int \frac{\operatorname{cosec}^3 \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\,d\theta$

83. $\int_0^1 2\sqrt{x^2+1}\,dx$

84. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dy}{(1-y^2)^{5/2}}$

85. $\int_1^2 \frac{(r^2-1)^{3/2}}{r}\,dr$

86. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{(t^2+1)^{7/2}}$

Funções hiperbólicas

Use as tabelas de integrais para calcular as integrais dos exercícios 87–92.

87. $\int \frac{1}{8} \operatorname{senh}^5 3x\,dx$

88. $\int \frac{\cosh^4 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

89. $\int x^2 \cosh 3x\,dx$

90. $\int x \operatorname{senh} 5x\,dx$

91. $\int \operatorname{sech}^7 x \operatorname{tgh} x\,dx$

92. $\int \operatorname{cosech}^3 2x \operatorname{cotgh} 2x\,dx$

Teoria e exemplos

Os exercícios 93–100 referem-se a fórmulas da tabela de integrais no final do livro.

93. Deduza a Fórmula 9 usando a substituição $u = ax + b$ para calcular

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2}\,dx$$

94. Deduza a Fórmula 17 usando uma substituição trigonométrica para calcular

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$$

95. Deduza a Fórmula 29 usando uma substituição trigonométrica para calcular

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

96. Deduza a Fórmula 46 usando uma substituição trigonométrica para calcular

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}}$$

97. Deduza a Fórmula 80 calculando

$$\int x^n \operatorname{sen} ax\, dx$$

por integração por partes.

98. Deduza a Fórmula 110 calculando

$$\int x^n (\ln ax)^m\, dx$$

por integração por partes.

99. Deduza a Fórmula 99 calculando

$$\int x^n \operatorname{sen}^{-1} ax\, dx$$

por integração por partes.

100. Deduza a Fórmula 101 calculando

$$\int x^n \operatorname{tg}^{-1} ax\, dx$$

por integração por partes.

101. **Área de superfície** Determine a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, da curva $y = \sqrt{x^2 + 2}$, $0 \le x \le \sqrt{2}$.

102. **Comprimento de arco** Determine o comprimento da curva $y = x^2$, $0 \le x \le \sqrt{3}/2$.

103. **Centróide** Determine o centróide da região delimitada no primeiro quadrante pela curva $y = 1/\sqrt{x+1}$ e pela reta $x = 3$.

104. **Momento em torno do eixo y** Uma placa fina de densidade constante $\delta = 1$ ocupa a região delimitada pela curva $y = 36/(2x + 3)$ e pela reta $x = 3$ no primeiro quadrante. Determine o momento da placa em torno do eixo y.

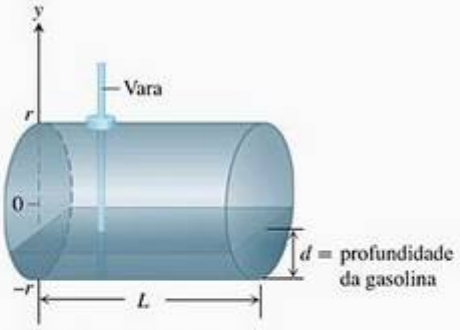
105. Use a tabela de integrais e uma calculadora para determinar, com duas casas decimais, a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, da curva $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$.

106. **Volume** A supervisora do departamento de contabilidade da sua empresa lhe pediu que encontrasse uma fórmula que ela pudesse utilizar em um programa de computador para calcular o inventário de final de ano da gasolina que havia nos tanques da empresa. Um tanque típico tem a forma de um cilindro circular de raio r e comprimento L, colocado horizontalmente, como mostrado a seguir. Os dados chegam ao escritório de contabilidade como medidas de profundidade tiradas com uma vara vertical marcada em centímetros.

(a) Mostre, na notação da figura, que o volume de gasolina que enche o tanque até uma profundidade d é

$$V = 2L\int_{-r}^{-r+d} \sqrt{r^2 - y^2}\, dy$$

(b) Calcule a integral.



107. Qual é o maior valor que

$$\int_a^b \sqrt{x - x^2}\, dx$$

pode ter para quaisquer a e b? Justifique sua resposta.

108. Qual é o maior valor que

$$\int_a^b x\sqrt{2x - x^2}\, dx$$

pode ter para quaisquer a e b? Justifique sua resposta.

USANDO O COMPUTADOR

Nos exercícios 109 e 110, use um SAC para efetuar as integrações.

109. Calcule as integrais

(a) $\int x \ln x\, dx$ **(b)** $\int x^2 \ln x\, dx$ **(c)** $\int x^3 \ln x\, dx$

(d) Que padrão você percebe? Determine uma fórmula para $\int x^4 \ln x\, dx$ e depois veja se está correta calculando-a com um SAC.

(e) Qual é a fórmula para $\int x^n \ln x\, dx$, $n \ge 1$? Confira sua resposta usando um SAC.

110. Calcule as integrais

(a) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ **(b)** $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$ **(c)** $\int \frac{\ln x}{x^4}\,dx$

(d) Que padrão você percebe? Determine a fórmula para

$$\int \frac{\ln x}{x^5}\,dx$$

e depois veja se está correta calculando-a com um SAC.

(e) Qual é a fórmula para

$$\int \frac{\ln x}{x^n}\,dx, \quad n \geq 2?$$

Confira sua resposta usando um SAC.

111. **(a)** Use um SAC para calcular

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx$$

onde n é um inteiro positivo arbitrário. O seu SAC encontra o resultado?

(b) Em seguida, encontre a integral quando $n = 1, 2, 3, 5, 7$. Comente a complexidade dos resultados.

(c) Agora substitua $x = (\pi/2) - u$ e some a integral nova com a antiga. Qual será o valor de

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx?$$

Esse exercício ilustra como uma pequena engenhosidade matemática resolve um problema que não pode ser solucionado imediatamente por um SAC.

8.7 Integração numérica

Como vimos, o modo ideal para calcular uma integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é encontrar uma fórmula $F(x)$ para uma das primitivas de $f(x)$ e calcular o número $F(b) - F(a)$. Mas algumas primitivas são difíceis de encontrar, e outras ainda, como as primitivas de sen (x^2), $1/\ln x$ e $\sqrt{1+x^4}$, não têm fórmulas elementares.

Também pode acontecer de uma função ser definida por uma tabela cujos itens foram obtidos experimentalmente, por meio da leitura de instrumentos. Nesse caso, pode ser que nem mesmo exista uma fórmula para a função.

Seja qual for a razão, quando não podemos calcular uma integral definida com uma primitiva, recorremos a métodos numéricos, como a *regra do trapézio* e a *regra de Simpson*, descritas nesta seção. Em geral, quando comparadas às diversas regras de retângulos apresentadas nas seções 5.1 e 5.2, essas regras exigem muito menos subdivisões do intervalo de integração para chegar a resultados precisos. Também estimaremos o erro em que se incorre ao usar tais métodos de aproximação.

Aproximações trapezoidais

Quando não podemos determinar uma primitiva para uma função f que precisamos integrar, dividimos o intervalo de integração, substituímos f por um polinômio ajustado bem próximo a f em cada subintervalo, integramos os polinômios e somamos os resultados para aproximar a integral de f. Em nossa explanação, vamos supor que f é positiva, mas na verdade o único requisito é que f seja contínua ao longo do intervalo de integração $[a, b]$.

A regra do trapézio para o valor de uma integral definida baseia-se em aproximar a região entre uma curva e o eixo x com trapézios, em vez de triângulos, como se vê na Figura 8.10. Na subdivisão, não é necessário que os pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ da figura estejam separados por espaços idênticos,

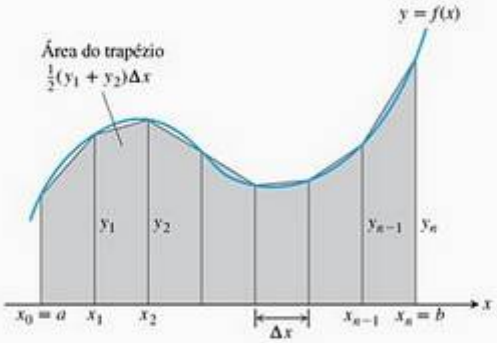


FIGURA 8.10 A regra do trapézio aproxima pequenos trechos da curva $y = f(x)$ por segmentos de reta. Para fazer uma aproximação para a integral de f de a até b, somamos as áreas dos trapézios obtidos pela ligação dos externos de cada segmento com o eixo x.

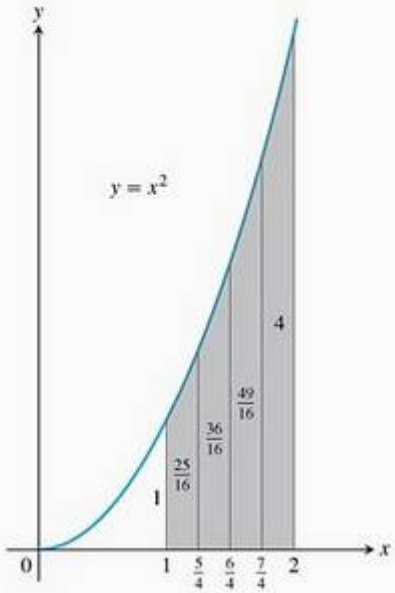


FIGURA 8.11 A aproximação trapezoidal da área sob o gráfico de $y = x^2$ de $x = 1$ até $x = 2$ é ligeiramente superestimada.

TABELA 8.3

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$
$\frac{6}{4}$	$\frac{36}{16}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{49}{16}$
2	4

mas a fórmula resultante será mais simples se eles estiverem. Vamos supor, portanto, que o comprimento de cada subintervalo seja

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

O comprimento $\Delta x = (b - a)/n$ recebe o nome de **tamanho do passo**, ou **tamanho da malha**. A área do trapézio que fica acima do i-ésimo subintervalo é

$$\Delta x\left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}(y_{i-1} + y_i)$$

onde $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ e $y_i = f(x_i)$. Essa área é o comprimento Δx da "altura" horizontal do trapézio vezes a média de suas duas "bases" verticais. (Veja a Figura 8.10.) A área sob a curva $y = f(x)$ e acima do eixo x é, então, aproximada pela soma das áreas de todos os trapézios:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2}(y_{n-2} + y_{n-1})\Delta x + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x \\ &= \Delta x\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) \\ &= \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \end{aligned}$$

onde

$$y_0 = f(a), \qquad y_1 = f(x_1), \qquad \ldots, \qquad y_{n-1} = f(x_{n-1}), \qquad y_n = f(b)$$

A regra do trapézio diz: use T para estimar a integral de f de a até b.

A regra do trapézio

Para fazer uma aproximação para $\int_a^b f(x)\,dx$, use

$$T = \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

Os y' são os valores de f nos pontos da partição

$x_0 = a,\ \ x_1 = a + \Delta x,\ \ x_2 = a + 2\Delta x, \ldots,\ \ x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x,\ \ x_n = b,$

onde $\Delta x = (b - a)/n$.

EXEMPLO 1 Aplicando a regra do trapézio

Use a regra do trapézio com $n = 4$ para estimar $\int_1^2 x^2\,dx$. Compare a estimativa com o valor exato.

SOLUÇÃO Divida [1, 2] em quatro subintervalos de igual comprimento (Figura 8.11). Depois calcule $y = x^2$ em cada ponto da partição (Tabela 8.3).

Usando esses valores de y, $n = 4$ e $\Delta x = (2 - 1)/4 = 1/4$ na regra do trapézio, temos

$$T = \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(1 + 2\left(\frac{25}{16}\right) + 2\left(\frac{36}{16}\right) + 2\left(\frac{49}{16}\right) + 4\right)$$
$$= \frac{75}{32} = 2{,}34375$$

O valor exato da integral é

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

A aproximação T superestima a integral em mais ou menos 0,5% de seu valor real de 7/3. O erro percentual é (2,34375 – 7/3)(7/3) ≈ 0,00446 ou 0,446%.

Poderíamos ter predito que a regra do trapézio iria superestimar a integral no Exemplo 1 considerando a geometria do gráfico na Figura 8.11. Como a parábola tem concavidade *para cima*, os segmentos de aproximação ficam acima da curva, dando a cada trapézio uma área um pouco maior que a faixa correspondente sob a curva. Na Figura 8.10, vemos que os segmentos de reta situam-se *sob* a curva nos intervalos onde ela é côncava *para baixo*, levando a regra do trapézio a *subestimar* a integral nesses intervalos.

EXEMPLO 2 Calculando a média de temperaturas

Um observador mede a temperatura externa a cada hora desde o meio-dia até a meia-noite, registrando as temperaturas na tabela a seguir.

Tempo	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
Temp.	63	65	66	68	70	69	68	68	65	64	62	58	55

Qual foi a temperatura média para o período de 12 horas?

SOLUÇÃO Estamos procurando o valor médio de uma função contínua (temperatura) da qual conhecemos valores em tempos distintos que estão afastados entre si por uma unidade. Precisamos encontrar

$$M(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

sem ter uma fórmula para $f(x)$. Entretanto, a integral pode ser aproximada pela regra do trapézio, usando as temperaturas da tabela como valores da função nos pontos de uma divisão de 12 subintervalos do intervalo de 12 horas (fazendo $\Delta x = 1$).

$$T = \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{11} + y_{12}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(63 + 2\cdot 65 + 2\cdot 66 + \cdots + 2\cdot 58 + 55\right)$$
$$= 782$$

Usando T para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$, temos

$$M(f) \approx \frac{1}{b-a} \cdot T = \frac{1}{12} \cdot 782 \approx 65{,}17$$

Arredondando para a precisão dos dados fornecidos, estimamos a temperatura média como sendo 65 graus.

Estimativas de erro na aproximação trapezoidal

Quando n aumenta e o tamanho do passo $\Delta x = (b - a)/n$ tende a zero, podemos usar T para aproximar o valor exato de $\int_a^b f(x)\,dx$. Para entender por que, escreva

$$\begin{aligned} T &= \Delta x \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) \\ &= (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)\Delta x + \frac{1}{2}(y_0 - y_n)\,\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x + \frac{1}{2}[f(a) - f(b)]\,\Delta x \end{aligned}$$

Quando $n \to \infty$ e $\Delta x \to 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \to \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2}[f(a) - f(b)]\Delta x \to 0$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} T = \int_a^b f(x)\,dx + 0 = \int_a^b f(x)\,dx$$

Isso significa que, em teoria, podemos tornar a diferença entre T e a integral tão pequena quanto quisermos, bastando para isso escolher um n grande o suficiente, pressupondo somente que f seja integrável. Na prática, porém, como podemos afirmar o tamanho que n precisa ter para dada tolerância?

Respondemos a essa pergunta com um resultado do cálculo avançado, que diz que, se f'' é contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = T - \frac{b-a}{12} \cdot f''(c)(\Delta x)^2$$

para algum número c entre a e b. Assim, quando Δx tende a zero, o erro definido por

$$E_T = -\frac{b-a}{12} \cdot f''(c)(\Delta x)^2$$

tende a zero como o *quadrado* de Δx.

A desigualdade

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12} \max|f''(x)|(\Delta x)^2$$

onde max se refere ao intervalo $[a, b]$, fornece um limitante superior para a magnitude do erro. Na prática, em geral, não conseguimos achar o valor exato de $\max|f''(x)|$ e somos obrigados a estimar um limitante superior ou

um valor "no pior caso". Se M é qualquer limitante superior para os valores de $|f''(x)|$ em $[a, b]$, de modo que $|f''(x)| \leq M$ em $[a, b]$, então

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12} M(\Delta x)^2$$

Se substituirmos Δx por $(b - a)/n$, teremos

$$|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

Essa é a desigualdade que normalmente usamos ao estimar $|E_T|$. Determinamos o melhor M que podemos e, a partir daí, estimamos $|E_T|$. Isso pode soar negligente, mas funciona. Para tornar $|E_T|$ pequeno para dado M, simplesmente tornamos n grande.

Estimativa do erro na regra do trapézio

Se f'' for contínua e M for qualquer limitante superior para os valores de $|f''|$ em $[a, b]$, então o erro E_T na aproximação por trapézios da integral de f de a até b para n passos satisfará a desigualdade

$$|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

EXEMPLO 3 Limitando o erro da regra do trapézio

Determine um limitante superior para o erro cometido na estimativa

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$$

ao usar a regra do trapézio com $n = 10$ passos (Figura 8.12).

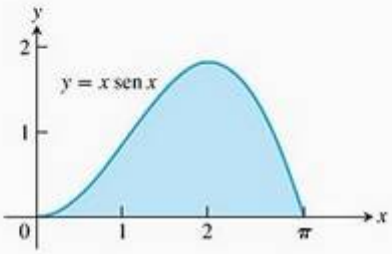


FIGURA 8.12 Gráfico do integrando do Exemplo 3.

SOLUÇÃO Com $a = 0$, $b = \pi$ e $n = 10$ passos, a estimativa de erro dá

$$|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2} = \frac{\pi^3}{1.200} M$$

O número M pode ser qualquer limitante superior para a magnitude da segunda derivada de $f(x) = x \operatorname{sen} x$ ao longo de $[0, \pi]$. Com um cálculo rotineiro, obtemos

$$f''(x) = 2\cos x - x \operatorname{sen} x$$

portanto

$$\begin{aligned} |f''(x)| &= |2\cos x - x \operatorname{sen} x| \\ &\leq 2|\cos x| + |x||\operatorname{sen} x| \\ &\leq 2 \cdot 1 + \pi \cdot 1 = 2 + \pi \end{aligned}$$

$|\cos x|$ e $|\operatorname{sen} x|$ nunca excedem 1, e $0 \leq x \leq \pi$.

Podemos com segurança considerar $M = 2 + \pi$. Portanto,

$$|E_T| \leq \frac{\pi^3}{1.200} M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{1.200} < 0{,}133$$

Arredondando para cima, por segurança.

O erro absoluto não é maior que 0,133.

Para maior precisão, não tentaríamos melhorar M, mas consideraríamos mais passos. Por exemplo, com $n = 100$ passos, temos

$$|E_T| \le \frac{(2+\pi)\pi^3}{120.000} < 0{,}00133 = 1{,}33 \times 10^{-3}$$

EXEMPLO 4 Determinando quantos passos são necessários para uma precisão específica

Quantas subdivisões devem ser usadas na regra do trapézio para aproximar

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

com um erro cujo valor absoluto seja inferior a 10^{-4}?

SOLUÇÃO Com $a = 1$ e $b = 2$, a estimativa de erro é

$$|E_T| \le \frac{M(2-1)^3}{12n^2} = \frac{M}{12n^2}$$

Esse é um dos poucos casos em que conseguimos, de fato, determinar $\max|f''|$, em vez de termos de nos contentar com um limitante superior M. Com $f(x) = 1/x$, determinamos

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x^{-1}) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

Em $[1, 2]$, $y = 2/x^3$ cai vertiginosamente de um máximo de $y = 2$ até um mínimo de $y = 1/4$ (Figura 8.13). Logo, $M = 2$ e

$$|E_T| \le \frac{2}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}$$

O valor absoluto do erro será, portanto, inferior a 10^{-4} se

$$\frac{1}{6n^2} < 10^{-4}, \qquad \frac{10^4}{6} < n^2, \qquad \frac{100}{\sqrt{6}} < n, \qquad \text{ou} \qquad 40{,}83 < n$$

O primeiro inteiro depois de 40,83 é $n = 41$. Com $n = 41$ subdivisões, podemos garantir um cálculo de ln 2 com um erro de magnitude inferior a 10^{-4}. Qualquer n maior que esse também vai funcionar.

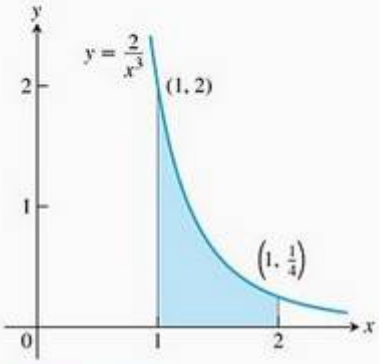


FIGURA 8.13 A função contínua $y = 2/x^3$ tem seu valor máximo ao longo de $[1, 2]$ em $x = 1$.

Regra de Simpson: aproximações usando parábolas

Tanto as somas de Riemann como a regra do trapézio fornecem aproximações razoáveis para a integral de uma função contínua em um intervalo fechado. A regra do trapézio é mais eficiente, fornecendo uma aproximação melhor para pequenos valores de n, o que a torna um algoritmo mais rápido para integrações numéricas.

Outra regra para aproximar a integral definida de uma função contínua consiste em usar parábolas em vez dos segmentos de reta que formavam trapézios. Assim como antes, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de igual tamanho $h = \Delta x = (b - a)/n$, mas desta vez vamos exigir que n seja um número *par*. Em cada par consecutivo de intervalos, vamos aproximar a curva $y = f(x) \ge 0$ por uma parábola, conforme mostrado na Figura 8.14.

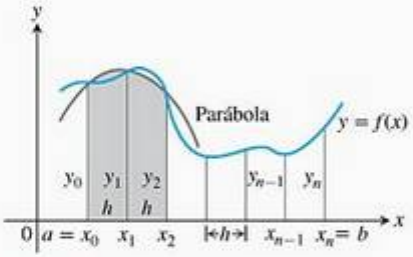


FIGURA 8.14 A regra de Simpson aproxima pequenos trechos da curva com parábolas.

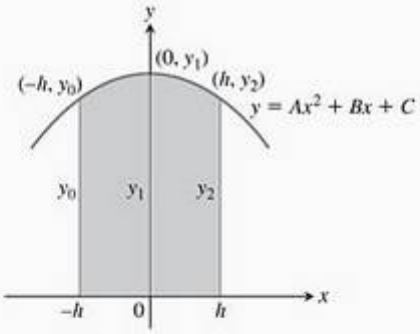


FIGURA 8.15 Integrando de $-h$ até h, descobrimos que a área sombreada é $\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$

Uma parábola típica passa por três pontos consecutivos (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i) e (x_{i+1}, y_{i+1}) na curva.

Vamos calcular a área sombreada sob uma parábola que passa por três pontos consecutivos. Para simplificar nossos cálculos, primeiro consideramos o caso em que $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ e $x_2 = h$ (Figura 8.15), onde $h = \Delta x = (b - a)/n$. A área sob a parábola será a mesma se transladarmos o eixo y para a esquerda ou para a direita. A parábola tem uma equação da seguinte forma

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

portanto a área sob ela de $x = -h$ até $x = h$ é

$$\begin{aligned} A_p &= \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx \\ &= \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \Big]_{-h}^{h} \\ &= \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) \end{aligned}$$

Como a curva passa pelos três pontos $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ e (h, y_2), também temos

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C, \qquad y_1 = C, \qquad y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

a partir do que obtemos

$$\begin{aligned} C &= y_1 \\ Ah^2 - Bh &= y_0 - y_1 \\ Ah^2 + Bh &= y_2 - y_1 \\ 2Ah^2 &= y_0 + y_2 - 2y_1 \end{aligned}$$

Então, expressando a área A_p em termos das ordenadas y_0, y_1 e y_2, temos

$$A_p = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) = \frac{h}{3}((y_0 + y_2 - 2y_1) + 6y_1) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Agora, se transladarmos a parábola horizontalmente para a posição que aparece sombreada na Figura 8.14, a área sob ela permanecerá a mesma. Assim, a área sob a parábola que passa por (x_0, y_0), (x_1, y_1) e (x_2, y_2) na Figura 8.14 ainda é

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

De modo análogo, a área sob a parábola que passa pelos pontos (x_2, y_2), (x_3, y_3) e (x_4, y_4) é

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Calculando as áreas sob todas as parábolas e somando os resultados, temos a seguinte aproximação

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots$$
$$+ \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$
$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Companion Website
Biografia histórica

Thomas Simpson
(1720-1761)

O resultado é conhecido como a regra de Simpson e, novamente, é válido para qualquer função contínua $y = f(x)$ (Exercício 38). A função não precisa ser positiva, como na nossa explicação. Contudo, para que possamos aplicar a regra, o número n de subintervalos precisa ser par, pois cada arco parabólico usa dois subintervalos.

Regra de Simpson
Para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$, use

$$S = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Os y's usados são valores de f nos pontos da partição

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x,\ \ldots,\ x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x,\ x_n = b$$

O número n é par e $\Delta x = (b - a)/n$

Observe o padrão dos coeficientes na regra anterior: 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2,..., 4, 2, 1.

TABELA 8.4

x	$y = 5x^4$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$
1	5
$\frac{3}{2}$	$\frac{405}{16}$
2	80

EXEMPLO 5 Aplicando a regra de Simpson

Use a regra de Simpson com $n = 4$ para aproximar $\int_0^2 5x^4\,dx$.

SOLUÇÃO Divida [0, 2] em quatro subintervalos e calcule $y = 5x^4$ nos pontos da partição (Tabela 8.4). Depois aplique a regra de Simpson com $n = 4$ e $\Delta x = 1/2$:

$$S = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right)$$
$$= \frac{1}{6}\left(0 + 4\left(\frac{5}{16}\right) + 2(5) + 4\left(\frac{405}{16}\right) + 80\right)$$
$$= 32\frac{1}{12}$$

Essa estimativa difere do valor exato (32) por somente 1/12, um erro percentual de menos de três décimos de um por cento, e obtivemos isso usando só quatro subintervalos.

Estimativas de erro na regra de Simpson

Para estimar o erro na regra de Simpson, começamos com um resultado do cálculo avançado segundo o qual, se a quarta derivada $f^{(4)}$ é contínua, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = S - \frac{b-a}{180} \cdot f^{(4)}(c)(\Delta x)^4$$

para algum ponto c entre a e b. Assim, quando Δx tende a zero, o erro

$$E_S = -\frac{b-a}{180} \cdot f^{(4)}(c)(\Delta x)^4$$

tende a zero como a *quarta potência* de Δx. (Isso ajuda a explicar por que a regra de Simpson costuma dar melhores resultados que a regra do trapézio.)

A desigualdade

$$|E_S| \le \frac{b-a}{180} \max|f^{(4)}(x)|\,(\Delta x)^4$$

onde max se refere ao intervalo $[a, b]$, fornece um limitante superior para a magnitude do erro. Assim como acontecia com max $|f''|$ na fórmula do erro da regra do trapézio, em geral não conseguimos determinar o valor exato de max $|f^{(4)}(x)|$ e somos obrigados a substituí-lo por um limitante superior. Se M é qualquer limitante superior para os valores de $|f^{(4)}|$ em $[a, b]$, então

$$|E_S| \le \frac{b-a}{180} M(\Delta x)^4$$

Substituindo Δx por $(b - a)/n$ na última expressão, temos

$$|E_S| \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$$

Essa é a fórmula que costumamos usar para estimar o erro da regra de Simpson. Determinamos um valor razoável para M e, a partir daí, estimamos $|E_S|$.

Estimativa de erro na regra de Simpson

Se $f^{(4)}$ for contínua e M for um limitante superior para os valores de $|f^{(4)}|$ em $[a, b]$, então o erro E_S, quando usamos a regra de Simpson para aproximar a integral de f de a até b para n passos, satisfará a desigualdade

$$|E_S| \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$$

Como acontece com a regra do trapézio, raramente conseguimos encontrar o menor valor possível de M. Simplesmente encontramos o melhor valor que podemos e seguimos em frente.

EXEMPLO 6 Limitando o erro na regra de Simpson

Determine um limitante superior para o erro quando estimamos $\int_0^2 5x^4\,dx$ usando a regra de Simpson, com $n = 4$ (Exemplo 5).

SOLUÇÃO Para estimar o erro, primeiro determinamos um limitante superior M para a magnitude da quarta derivada de $f(x) = 5x^4$ no intervalo $0 \le x \le 2$. Como a quarta derivada tem o valor constante $f^{(4)}(x) = 120$, consideramos $M = 120$. Com $b - a = 2$ e $n = 4$, a estimativa de erro para a regra de Simpson resulta em

$$|E_S| \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4} = \frac{120(2)^5}{180 \cdot 4^4} = \frac{1}{12}$$

EXEMPLO 7 Comparando as aproximações com a regra do trapézio e com a regra de Simpson

Como vimos no Capítulo 7, o valor de ln 2 pode ser calculado a partir da integral

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

A Tabela 8.5 mostra valores de T e de S para aproximações de $\int_1^2 (1/x)\,dx$ usando vários valores de n. Veja como as aproximações da regra de Simpson são nitidamente melhores que as da regra do trapézio. Em particular, observe que, ao dobrarmos o valor de n (reduzindo assim o valor de $h = \Delta x$ pela metade), o erro T é dividido por 2 *ao quadrado*, enquanto o erro S é dividido por 2 elevado *à quarta*.

TABELA 8.5 Aproximações da regra do trapézio (T_n) e da regra de Simpson (S_n) para $\ln 2 = \int_1^2 (1/x)\,dx$

n	T_n	|Erro| menor que...	S_n	|Erro| menor que...
10	0,6937714032	0,0006242227	0,6931502307	0,0000030502
20	0,6933033818	0,0001562013	0,6931473747	0,0000001942
30	0,6932166154	0,0000694349	0,6931472190	0,0000000385
40	0,6931862400	0,0000390595	0,6931471927	0,0000000122
50	0,6931721793	0,0000249988	0,6931471856	0,0000000050
100	0,6931534305	0,0000062500	0,6931471809	0,0000000004

Isso tem um efeito drástico quando $\Delta x = (2 - 1)/n$ se torna muito pequeno. A aproximação de Simpson para $n = 50$ arredonda o valor com precisão de sete casas e, de $n = 100$, de nove casas decimais (bilionésimo)!

Se $f(x)$ for um polinômio de grau menor que 4, então sua quarta derivada será zero e

$$E_S = -\frac{b-a}{180} f^{(4)}(c)(\Delta x)^4 = -\frac{b-a}{180}(0)(\Delta x)^4 = 0$$

Assim, não haverá erro na aproximação de Simpson para qualquer integral de f. Em outras palavras, se f for uma constante, uma função linear, ou um polinômio cúbico ou quadrático, a regra de Simpson fornecerá o valor exato de qualquer integral de f, seja qual for o número de subdivisões. De modo análogo, se f for uma constante ou uma função linear, então sua segunda derivada será zero e

$$E_T = -\frac{b-a}{12} f''(c)(\Delta x)^2 = -\frac{b-a}{12}(0)(\Delta x)^2 = 0$$

A regra do trapézio vai, portanto, fornecer o valor exato de qualquer integral de f. Isso não é surpresa, visto que os trapézios encaixam-se na curva perfeitamente. Embora teoricamente a diminuição no tamanho do passo Δx reduza o erro nas aproximações de Simpson e do trapézio, na prática isso pode falhar.

Quando Δx é muito pequeno (por exemplo, $\Delta x = 10^{-5}$), os erros acumulados pelo computador ou calculadora (na aritmética necessária para calcular S e T) podem se acumular de tal maneira que as fórmulas para erro não conseguirão descrever o que está realmente acontecendo. Diminuir Δx abaixo de certo tamanho pode fazer as coisas piorarem. Se você estiver tendo problemas com arredondamento, sugerimos que procure métodos alternativos em um livro de análise numérica, pois isso não está entre os tópicos deste livro.

EXEMPLO 8 Calcule

$$\int_0^2 x^3\,dx$$

com a regra de Simpson.

SOLUÇÃO A quarta derivada de $f(x) = x^3$ é zero, portanto esperamos que a regra de Simpson forneça o valor exato da integral com qualquer número (par) de passos. De fato, com $n = 2$ e $\Delta x = (2 - 0)/2 = 1$,

$$\begin{aligned} S &= \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \\ &= \frac{1}{3}((0)^3 + 4(1)^3 + (2)^3) = \frac{12}{3} = 4 \end{aligned}$$

enquanto

$$\int_0^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_0^2 = \frac{16}{4} - 0 = 4$$

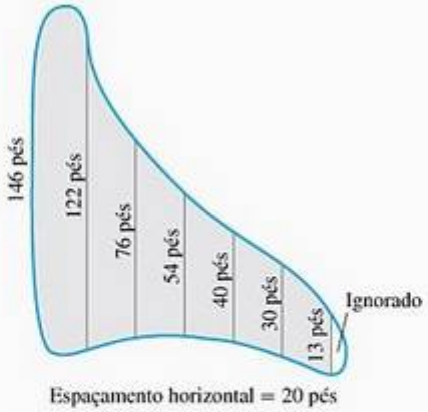


FIGURA 8.16 Dimensões do pântano do Exemplo 9.

EXEMPLO 9 Drenando um pântano

Uma cidade quer drenar e aterrar um pequeno pântano poluído (Figura 8.16). O pântano tem uma profundidade média de 5 pés. Quantas jardas cúbicas de terra aproximadamente serão necessárias para preencher a área depois que o pântano for drenado?

SOLUÇÃO Para calcular o volume do pântano, estimamos a área da superfície e multiplicamos por 5. Para estimar a área, usamos a regra de Simpson com $\Delta x = 20$ pés e os y iguais às distâncias medidas longitudinalmente no pântano, como se vê na Figura 8.16.

$$\begin{aligned} S &= \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6) \\ &= \frac{20}{3}(146 + 488 + 152 + 216 + 80 + 120 + 13) = 8.100 \end{aligned}$$

O volume é de aproximadamente (8.100)(5) = 40.500 pés^3 ou 1.500 jardas^3.

Exercícios 8.7

Estimando integrais

As instruções para as integrais nos exercícios 1–10 têm duas partes, uma para a regra do trapézio e outra para a regra de Simpson.

I. Usando a regra do trapézio

(a) Estime a integral com $n = 4$ passos e determine um limitante superior para $|E_T|$.

(b) Calcule a integral diretamente e determine $|E_T|$.

(c) Use a fórmula $(|E_T|/(\text{valor real})) \times 100$ para expressar $|E_T|$ como porcentagem do valor real da integral.

II. Usando a regra de Simpson

(a) Estime a integral com $n = 4$ passos e determine um limitante superior para $|E_S|$.

(b) Calcule a integral diretamente e determine $|E_S|$.

(c) Use a fórmula $(|E_S|/(\text{valor real})) \times 100$ para expressar $|E_S|$ como porcentagem do valor real da integral.

1. $\int_1^2 x\,dx$

2. $\int_1^3 (2x - 1)\,dx$

3. $\int_{-1}^1 (x^2 + 1)\,dx$

4. $\int_{-2}^0 (x^2 - 1)\,dx$

5. $\int_0^2 (t^3 + t)\,dt$

6. $\int_{-1}^1 (t^3 + 1)\,dt$

7. $\int_1^2 \frac{1}{s^2}\,ds$

8. $\int_2^4 \frac{1}{(s-1)^2}\,ds$

9. $\int_0^\pi \operatorname{sen} t\,dt$

10. $\int_0^1 \operatorname{sen} \pi t\,dt$

Nos exercícios 11–14, use os valores tabulados do integrando para estimar a integral com (a) a regra do trapézio e (b) a regra de Simpson com $n = 8$ passos. Arredonde suas respostas para cinco casas decimais. Depois (c) determine o valor exato da integral e o erro na aproximação para E_T ou E_S, como for apropriado.

11. $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx$

x	$x\sqrt{1 - x^2}$
0	0,0
0,125	0,12402
0,25	0,24206
0,375	0,34763
0,5	0,43301
0,625	0,48789
0,75	0,49608
0,875	0,42361
1,0	0

12. $\int_0^3 \frac{\theta}{\sqrt{16 + \theta^2}}\,d\theta$

θ	$\theta/\sqrt{16 + \theta^2}$
0	0,0
0,375	0,09334
0,75	0,18429
1,125	0,27075
1,5	0,35112
1,875	0,42443
2,25	0,49026
2,625	0,58466
3,0	0,6

13. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3\cos t}{(2 + \operatorname{sen} t)^2}\,dt$

t	$(3\cos t)/(2 + \operatorname{sen} t)^2$
−1,57080	0,0
−1,17810	0,99138
−0,78540	1,26906
−0,39270	1,05961
0	0,75
0,39270	0,48821
0,78540	0,28946
1,17810	0,13429
1,57080	0

14. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{cosec}^2 y)\sqrt{\operatorname{cotg} y}\,dy$

y	$(\operatorname{cosec}^2 y)\sqrt{\operatorname{cotg} y}$
0,78540	2,0
0,88357	1,51606
0,98175	1,18237
1,07992	0,93998
1,17810	0,75402
1,27627	0,60145
1,37445	0,46364
1,47262	0,31688
1,57080	0

O número mínimo de subintervalos

Nos exercícios 15–26, estime o número mínimo de subintervalos necessário para aproximar as integrais com um erro de magnitude inferior a 10^{-4} (a) pela regra do trapézio e (b) pela regra de Simpson. (As integrais dos exercícios 15–22 são as mesmas dos exercícios 1–8.)

15. $\int_1^2 x\,dx$

16. $\int_1^3 (2x - 1)\,dx$

17. $\int_{-1}^1 (x^2 + 1)\,dx$

18. $\int_{-2}^0 (x^2 - 1)\,dx$

19. $\int_0^2 (t^3 + t)\,dt$

20. $\int_{-1}^1 (t^3 + 1)\,dt$

21. $\int_1^2 \frac{1}{s^2}\,ds$

22. $\int_2^4 \frac{1}{(s-1)^2}\,ds$

23. $\int_0^3 \sqrt{x + 1}\,dx$

24. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x + 1}}\,dx$

25. $\int_0^2 \operatorname{sen}(x + 1)\,dx$

26. $\int_{-1}^1 \cos(x + \pi)\,dx$

Aplicações

27. **Volume de água em uma piscina** Uma piscina retangular tem 30 pés de largura e 50 pés de comprimento. A tabela a seguir mostra a profundidade $h(x)$ da água com intervalos de 5 pés de uma extremidade da piscina até a outra. Estime o volume de água na piscina usando a regra do trapézio com $n = 10$, aplicado à integral

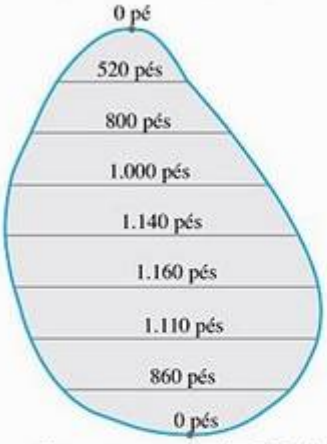
$$V = \int_0^{50} 30 \cdot h(x)\,dx$$

Posição (pés) x	Profundidade (pés) $h(x)$	Posição (pés) x	Profundidade (pés) $h(x)$
0	6,0	30	11,5
5	8,2	35	11,9
10	9,1	40	12,3
15	9,9	45	12,7
20	10,5	50	13,0
25	11,0		

28. Suprindo um lago com peixes Como encarregado dos peixes e da pesca no lago de sua cidade, você é responsável pelo devido suprimento de peixes antes da estação de pesca. A profundidade média do lago é de 20 pés. Usando um mapa com escala, você mede a distância de um lado a outro do lago a intervalos de 200 pés, como se vê no diagrama a seguir.

(a) Use a regra do trapézio para estimar o volume do lago.

(b) Você planeja começar a estação tendo no lago um peixe por 1.000 pés cúbicos, e pretende que no fim da temporada reste pelo menos 25% da população de peixes que existia no dia da abertura. Qual é o número máximo de licenças que a cidade pode vender se a média por temporada de pesca é de 20 peixes por licença?



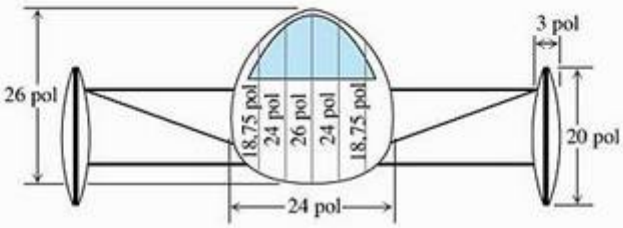
Espaçamento vertical = 200 pés

29. Ford® Mustang Cobra™ A tabela a seguir apresenta dados de tempo e de velocidade para um Ford Mustang Cobra 1994 acelerando a partir do repouso até atingir 130 mi/h. Que distância havia percorrido o Mustang no momento em que atingiu essa velocidade? (Use trapézios para estimar a área sob a curva de velocidade, mas tenha cuidado: a duração dos intervalos de tempo pode variar.)

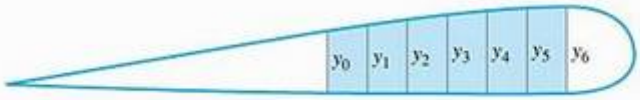
Mudança de velocidade	Tempo (s)
Zero a 30 mi/h	2,2
40 mi/h	3,2
50 mi/h	4,5
60 mi/h	5,9
70 mi/h	7,8
80 mi/h	10,2
90 mi/h	12,7
100 mi/h	16,0
110 mi/h	20,6
120 mi/h	26,2
130 mi/h	37,1

Fonte: *Car and Driver*, abril 1994.

30. Resistência aerodinâmica A resistência aerodinâmica de um veículo é determinada em parte pela área de sua seção transversal. Portanto, mantidos os outros fatores iguais, os engenheiros tentam tornar essa área a menor possível. A partir do diagrama, use a regra de Simpson para estimar a área da seção transversal do corpo do automóvel Solectria®, movido a energia solar, projetado por James Worden, do MIT (Massachusetts Institute of Technology).



31. Desenho da asa O projeto de um novo avião exige um tanque de gasolina com a área da seção transversal constante em cada asa. Apresentamos o desenho de uma seção transversal em escala. O tanque deve conter 5.000 lb de gasolina cujo peso específico é de 42 lb/pés³. Estime o comprimento do tanque.



$y_0 = 1{,}5$ pé, $y_1 = 1{,}6$ pé, $y_2 = 1{,}8$ pé, $y_3 = 1{,}9$ pé,
$y_4 = 2{,}0$ pés, $y_5 = y_6 = 2{,}1$ pés Distânca horizontal = 1 pé

32. Consumo de óleo na ilha de Pathfinder Um gerador movido a diesel funciona continuamente, consumindo óleo a uma taxa que aumenta de maneira gradual até que seja temporariamente desligado para troca dos filtros.

Use a regra do trapézio para estimar a quantidade de óleo consumida pelo gerador durante determinada semana.

Dia	Taxa de consumo de óleo (litros/hora)
Domingo	0,019
Segunda	0,020
Terça	0,021
Quarta	0,023
Quinta	0,025
Sexta	0,028
Sábado	0,031
Domingo	0,035

Teoria e exemplos

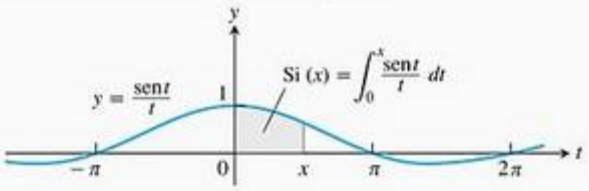
33. Valores úteis da função seno-integral *A função seno-integral*

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \quad \text{"seno-integral de } x\text{"}$$

é uma das muitas funções, na engenharia, cujas fórmulas não podem ser simplificadas. Não há uma fórmula elementar para a primitiva de (sen t)/t. Entretanto, os valores de Si(x) são rapidamente estimados por integração numérica. Embora a notação não mostre isso explicitamente, a função que está sendo integrada é

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

a extensão contínua de (sen t)/t para o intervalo $[0, x]$. A função tem derivadas de todas as ordens em cada ponto de seu domínio. Seu gráfico é liso e você pode esperar bons resultados da regra de Simpson.



(a) Use o fato de que $|f^{(4)}| \leq 1$ em $[0, \pi/2]$ para dar um limitante superior ao erro que ocorrerá se

$$\mathrm{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

for estimada pela regra de Simpson, com $n = 4$.

(b) Estime Si($\pi/2$) pela regra de Simpson, com $n = 4$.

(c) Expresse o limite do erro encontrado no item (a) como porcentagem do valor obtido no item (b).

34. A função erro *A função erro*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

importante na probabilidade e nas teorias do fluxo de calor e de transmissão de sinais, deve ser calculada numericamente porque não há uma expressão elementar para a primitiva de e^{-t^2}.

(a) Use a regra de Simpson, com $n = 10$, para estimar erf (1).

(b) Em $[0, 1]$,

$$\left| \frac{d^4}{dt^4}\left(e^{-t^2}\right) \right| \leq 12$$

Dê um limitante superior para a magnitude do erro da estimativa no item (a).

35. (*Continuação do Exemplo 3.*) Os limites de erro para E_T e E_S são estimativas "no pior caso", e as regras do trapézio e de Simpson são, em geral, mais precisas do que as estimativas sugerem. No Exemplo 3, a estimativa da regra do trapézio para $\int_0^\pi x \operatorname{sen} x\, dx$ é um exemplo disso.

x	x sen x
0	0
$(0{,}1)\pi$	0,09708
$(0{,}2)\pi$	0,36932
$(0{,}3)\pi$	0,76248
$(0{,}4)\pi$	1,19513
$(0{,}5)\pi$	1,57080
$(0{,}6)\pi$	1,79270
$(0{,}7)\pi$	1,77912
$(0{,}8)\pi$	1,47727
$(0{,}9)\pi$	0,87372
π	0

(a) Use a regra do trapézio, com $n = 10$, para aproximar o valor da integral. A tabela à direita fornece os valores de y necessários.

(b) Determine a magnitude da diferença entre π, o valor da integral e a aproximação que você fez no item (a). Você descobrirá que a diferença é consideravelmente menor que o limitante superior de 0,133, calculado com $n = 10$ no Exemplo 3.

(c) O limitante superior de 0,133 para $|E_T|$ no Exemplo 3 poderia ser um pouco melhorado se tivéssemos um limitante melhor para

T

$$|f''(x)| = |2\cos x - x \operatorname{sen} x|$$

em $[0, \pi]$. O limitante superior que usamos era $2 + \pi$. Faça o gráfico de f'' ao longo de $[0, \pi]$ e use os comandos "Trace" ou "Zoom" para melhorar esse limitante superior.

Use o limitante melhorado como M para fazer uma estimativa melhor de $|E_T|$. Observe que a aproximação com a regra do trapézio feita no item (a) ainda é melhor que essa estimativa melhorada.

36. (*Continuação do Exercício 35.*)

T (a) Demonstre que a quarta derivada de $f(x) = x \operatorname{sen} x$ é

$$f^{(4)}(x) = -4\cos x + x \operatorname{sen} x$$

Use os comandos "Trace" ou "Zoom" para achar um limitante superior M para os valores de $|f^{(4)}|$ em $[0, \pi]$.

(b) Use o valor de M obtido na parte (a) para achar um limitante superior para a magnitude do erro ao se estimar o valor de

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$$

pela regra de Simpson, com $n = 10$ passos.

(c) Use os dados da tabela do Exercício 35 para estimar $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$ pela regra de Simpson, com $n = 10$ passos.

(d) Com seis casas decimais, determine a magnitude da diferença entre sua estimativa no item (c) e o valor real da integral, π. Você vai descobrir que a estimativa de erro obtida no item (b) é muito boa.

37. Prove que a soma T na regra do trapézio para $\int_a^b f(x)\,dx$ é uma soma de Riemann para f contínua em $[a, b]$. (*Dica*: Use o teorema do valor intermediário para demonstrar a existência de c_k no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ que satisfaz $f(c_k) = (f(x_{k-1}) + f(x_k))/2$.)

38. Prove que a soma S na regra de Simpson para $\int_a^b f(x)\,dx$ é uma soma de Riemann para f contínua em $[a, b]$. (Veja o Exercício 37.)

T Integração numérica

Como mencionado no início da seção, as integrais definidas de muitas funções contínuas não podem ser calculadas com o teorema fundamental do cálculo porque suas primitivas não têm fórmulas elementares. A integração numérica oferece um caminho prático para estimar os valores das chamadas *integrais não elementares*. Se sua calculadora ou seu computador dispõem de uma rotina para integração numérica, experimente-a nas integrais dos exercícios 39–42.

39. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\,dx$ — Uma integral não elementar que veio da pesquisa de Newton

40. $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ — A integral do Exercício 33. Para evitar divisão por zero, você pode ter de começar a integração com um número positivo pequeno, como 10^{-6}, em vez de 0.

41. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ — Uma integral associada com a difração da luz.

42. $\int_0^{\pi/2} 40\sqrt{1 - 0{,}64\cos^2 t}\,dt$ — O comprimento da elipse $(x^2/25) + (y^2/9) = 1$

43. Considere a integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$.

T (a) Determine a aproximação da regra do trapézio para $n = 10$, 100 e 1.000.

(b) Registre os erros com o máximo de casas decimais que puder.

(c) Que padrão você vê?

(d) Explique como o erro do limite para E_T explica o padrão observado no item (c).

44. (*Continuação do Exercício 43.*) Repita o Exercício 43 com a regra de Simpson e E_S.

45. Considere a integral $\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$

(a) Determine f'' para $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

(b) Trace o gráfico de $y = f''(x)$ na janela de $[-1, 1]$ por $[-3, 3]$.

(c) Explique por que o gráfico do item (b) sugere que $|f''(x)| \le 3$ para $-1 \le x \le 1$.

(d) Mostre que o erro estimado para a regra do trapézio nesse caso torna-se

$$|E_T| \le \frac{(\Delta x)^4}{2}$$

(e) Mostre que o erro da regra do trapézio terá magnitude menor ou igual a 0,01 se $\Delta x \le 0{,}1$.

(f) Quão grande n deve ser para $\Delta x \le 0{,}1$?

46. Considere a integral $\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$.

(a) Determine $f^{(4)}$ para $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. (Talvez você queira verificar sua resposta com um SAC, se tiver algum disponível.)

(b) Trace o gráfico de $y = f^{(4)}(x)$ na janela de $[-1, 1]$ por $[-30, 10]$.

(c) Explique por que no item (b) o gráfico sugere que $|f^{(4)}(x)| \le 30$ para $-1 \le x \le 1$.

(d) Mostre que o erro estimado para a regra de Simpson nesse caso torna-se

$$|E_S| \le \frac{(\Delta x)^4}{2}$$

(e) Mostre que o erro da regra de Simpson terá magnitude menor ou igual a 0,01 se $\Delta x \le 0{,}4$.

(f) Quão grande n deve ser para $\Delta x \le 0{,}4$?

47. **Um vaso** Desejamos estimar o volume de um vaso para T flores utilizando somente uma calculadora, um barbante e uma régua. A altura do vaso é de 6 polegadas. Usamos então o barbante e a régua para determinar diversas circunferências do vaso (em polegadas) com intervalos de meia polegada. (Essas medidas são apresentadas ao lado do vaso no sentido boca–fundo.)

Circunferências	
5,4	10,8
4,5	11,6
4,4	11,6
5,1	10,8
6,3	9,0
7,8	6,3
9,4	

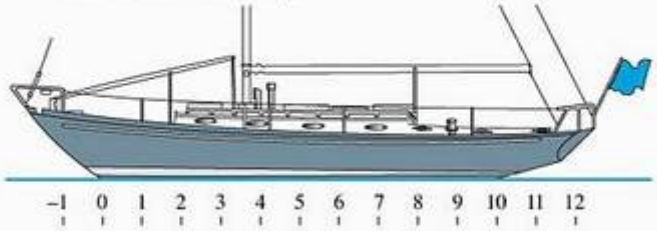
(a) Determine as áreas das seções transversais correspondentes às circunferências dadas.

(b) Expresse o volume do vaso como uma integral em relação a y ao longo do intervalo $[0, 6]$.

(c) Faça uma aproximação para a integral usando a regra do trapézio, com $n = 12$.

(d) Faça uma aproximação para a integral usando a regra de Simpson, com $n = 12$. Na sua opinião, que resultado é mais preciso? Justifique sua resposta.

48. Deslocamento de água por um veleiro Para determinar o volume de água deslocado por um veleiro, é comum dividir a linha da água em 10 subintervalos de igual comprimento, medir a área da seção transversal $A(x)$ da parte submersa do casco em cada ponto da partição e depois usar a regra de Simpson para estimar a integral de $A(x)$ de um extremo a outro da linha da água. A tabela a seguir apresenta as medidas em "estações" (como os pontos da partição são chamados) de 0 a 10, para o barco Pipedream. O comprimento comum para os subintervalos (distância entre estações consecutivas) é $\Delta x = 2{,}54$ pés (aproximadamente 2 pés e 6,5 polegadas, escolhido conforme a conveniência do construtor).



(a) Estime o volume deslocado pelo Pipedream, arredondando para o inteiro (pés^3) mais próximo.

Estação	Área submersa (pés^2)
0	0
1	1,07
2	3,84
3	7,82
4	12,20
5	15,18
6	16,14
7	14,00
8	9,21
9	3,24
10	0

(b) As cifras da tabela são relativas à água do mar cujo peso específico é de 64 libras/pé^3. Quantas libras de água o Pipedream desloca? (O deslocamento é dado em libras, para pequenas embarcações, ou em toneladas longas (1 tonelada longa = 2.240 libras), para barcos maiores. (Dados obtidos de Francis S. Kinney, *Skene's elements of yacht design*, Dodd, Mead, 1962.)

(c) **Coeficientes prismáticos** O coeficiente prismático de um barco é a razão entre o volume deslocado e o volume de um prisma cuja altura seja igual ao comprimento do barco na linha da água e cuja base seja igual à área da maior seção transversal submersa do barco. Os melhores veleiros têm coeficientes prismáticos entre 0,51 e 0,54. Determine o coeficiente prismático do Pipedream, dados o comprimento da linha da água de 25,4 pés e a área da maior seção transversal submersa de 16,14 pés^2 (na Estação 6).

49. Integrais elípticas O comprimento da elipse

T

$$x = a\cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

é

$$\text{Comprimento} = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\, dt$$

onde e é a excentricidade da elipse. A integral nessa fórmula, chamada *integral elíptica*, é não elementar, exceto quando $e = 0$ ou 1.

(a) Use a regra do trapézio com $n = 10$ para estimar o comprimento da elipse quando $a = 1$ e $e = 1/2$.

(b) Use o fato de que o valor absoluto da segunda derivada de $f(t) = \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}$ é menor que 1 para determinar um limitante superior para o erro na estimativa que você obteve no item (a).

50. O comprimento de um arco da curva $y = \operatorname{sen} x$ é dado por

T

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$$

Estime L pela regra de Simpson, com $n = 8$.

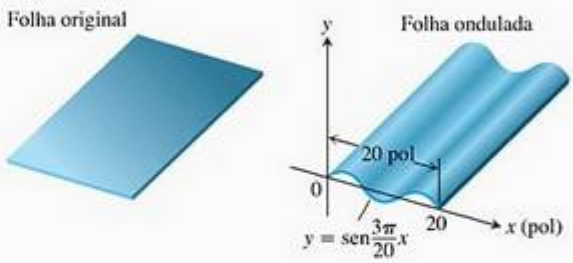
51. Sua empresa fabrica metais e está participando de uma

T

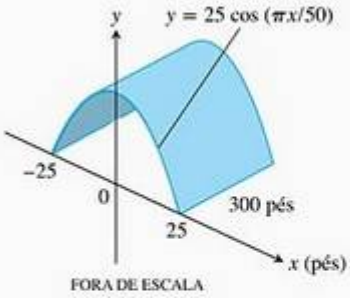
concorrência para produzir folhas de metal onduladas para telhados, como as apresentadas a seguir. As seções transversais dessas folhas têm a forma da curva

$$y = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{20}x, \quad 0 \le x \le 20 \text{ pol}$$

Se as telhas devem ser moldadas a partir de folhas planas, por um processo que não estique o material, qual deve ser a largura da folha original? Para descobrir, use integração numérica para aproximar o comprimento da senóide com precisão de duas casas decimais.



52. Sua empresa de engenharia está se candidatando ao contrato para a construção de um túnel como o que se vê na figura a seguir. O túnel tem 300 pés de comprimento por 50 pés de largura na base. Sua seção transversal tem a forma de um arco da curva $y = 25 \cos(\pi x/50)$. Ao fim da obra, a superfície interna do túnel (exceto a rodovia) será tratada com um selante à prova d'água cuja aplicação custa \$ 1,75 por pé quadrado. Quanto custará a aplicação do selante? (*Dica*: Use intergração numérica para encontrar o comprimento da cossenóide.)



Área de superfície

Determine, com precisão de duas casas decimais, a área das superfícies geradas pela rotação, em torno do eixo x, das curvas dadas nos exercícios 53–56.

53. $y = \text{sen}\, x, \quad 0 \le x \le \pi$
54. $y = x^2/4, \quad 0 \le x \le 2$
55. $y = x + \text{sen}\, 2x, \quad -2\pi/3 \le x \le 2\pi/3$ (a curva do Exercício 5 da Seção 4.4)
56. $y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2}, 0 \le x \le 6$ (a superfície do peso para prumo que apareceu no Exercício 62 da Seção 6.1)

Estimando valores de função

57. Use integração numérica para estimar o valor de

$$\text{sen}^{-1} 0{,}6 = \int_0^{0{,}6} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Para sua referência, $\text{sen}^{-1} 0{,}6 = 0{,}64350$ com cinco casas decimais.

58. Use integração numérica para estimar o valor de

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

8.8 Integrais impróprias

Até agora, as integrais definidas tiveram de exibir duas propriedades: primeira, que o domínio da integração $[a, b]$ fosse finito; segunda, que a imagem do integrando fosse finita nesse domínio. Entretanto, na prática, podemos encontrar problemas que fazem que não se cumpra uma das condições, ou mesmo as duas. A integral para a área sob a curva $y = (\ln x)/x^2$ de $x = 1$ a $x = \infty$ é um exemplo de situação em que o domínio é infinito (Figura 8.17a). Já a integral para a área sob a curva de $y = 1/\sqrt{x}$ entre $x = 0$ e $x = 1$ é um exemplo de situação em que a imagem do integrando é infinita (Figura 8.17b). Nos dois casos, as integrais recebem o nome de *impróprias* e são calculadas como limites. No Capítulo 11, Volume II, veremos que as integrais impróprias desempenham um importante papel quando estamos investigando a convergência de certas séries infinitas.

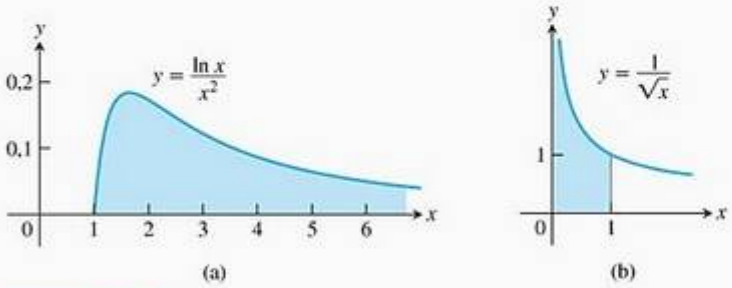


FIGURA 8.17 As áreas sob essas curvas infinitas são finitas?

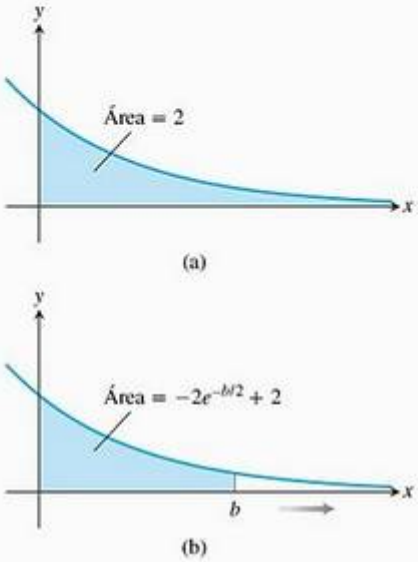


FIGURA 8.18 (a) A área no primeiro quadrante sob a curva $y = e^{-x/2}$ é (b) uma integral imprópria do primeiro tipo.

Limites infinitos de integração

Considere a região infinita que fica sob a curva $y = e^{-x/2}$ no primeiro quadrante (Figura 8.18a). Você pode pensar que essa região tem uma área infinita, mas veremos que o valor natural atribuído a ela é finito. Eis como atribuímos um valor a uma área. Primeiro obtemos a área $A(b)$ da parte da região delimitada à direita por $x = b$ (Figura 8.18b).

$$A(b) = \int_0^b e^{-x/2}\,dx = -2e^{-x/2}\Big]_0^b = -2e^{-b/2} + 2$$

Então encontramos o limite de $A(b)$ quando $b \to \infty$.

$$\lim_{b\to\infty} A(b) = \lim_{b\to\infty} (-2e^{-b/2} + 2) = 2$$

O valor que atribuímos à área abaixo da curva de 0 a ∞ é

$$\int_0^\infty e^{-x/2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x/2}\,dx = 2$$

Definição **Integrais impróprias do tipo I**

Integrais com limites infinitos de integração são **integrais impróprias do tipo I**.

1. Se $f(x)$ é contínua em $[a, \infty)$, então
$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$
2. Se $f(x)$ é contínua em $(-\infty, b]$, então
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$
3. Se $f(x)$ é contínua em $(-\infty, \infty)$, então
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$

onde c é qualquer número real.

Em todos os casos, se o limite é finito, dizemos que a integral imprópria **converge** e que o limite é o **valor** da integral imprópria. Se o limite não existe, dizemos que a integral imprópria **diverge**.

Pode ser demonstrado que a escolha de c na Parte 3 da definição não é importante. Podemos calcular ou determinar a convergência ou divergência de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ com qualquer escolha conveniente.

Se $f \geq 0$ no intervalo de integração, qualquer uma das integrais na definição dada pode ser interpretada como uma área. Por exemplo, interpretamos a integral imprópria da Figura 8.18 como uma área. Nesse caso, a área tem o valor finito 2. Se $f \geq 0$ e a integral imprópria diverge, dizemos que a área sob a curva é **infinita**.

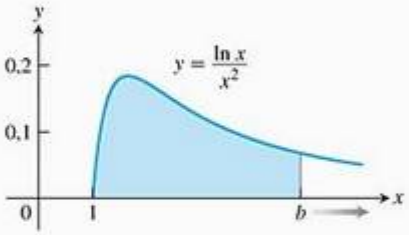


FIGURA 8.19 A área abaixo dessa curva é uma integral imprópria (Exemplo 1).

EXEMPLO 1 **Calculando uma integral imprópria em $[1, \infty)$**

A área sob a curva $y = (\ln x)/x^2$ de $x = 1$ a $x = \infty$ é finita? Se for, qual será ela?

SOLUÇÃO Encontramos a área sob a curva de $x = 1$ a $x = b$ e examinamos o limite quando $b \to \infty$. Se o limite é finito, nós o tomamos como a área sob a curva (Figura 8.19). A área de 1 a b é

$$\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[(\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^b - \int_1^b \left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

Integração por partes com $u = \ln x$, $dv = dx/x^2$, $du = dx/x$, $v = -1/x$.

$$= -\frac{\ln b}{b} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^b$$

$$= -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1$$

O limite da área quando $b \to \infty$ é

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\right]$$

$$= -\left[\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b}\right] - 0 + 1$$

$$= -\left[\lim_{b\to\infty}\frac{1/b}{1}\right] + 1 = 0 + 1 = 1$$

Regra de L'Hôpital

Portanto, a integral imprópria converge e a área tem o valor finito 1.

EXEMPLO 2 Calculando uma integral em $(-\infty, \infty)$

Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

SOLUÇÃO De acordo com a definição (Parte 3), podemos escolher $c = 0$ e escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

Depois resolvemos cada integral imprópria do lado direito da equação acima.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \operatorname{tg}^{-1} x\Big]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{tg}^{-1} 0 - \operatorname{tg}^{-1} a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \operatorname{tg}^{-1} x\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\operatorname{tg}^{-1} b - \operatorname{tg}^{-1} 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

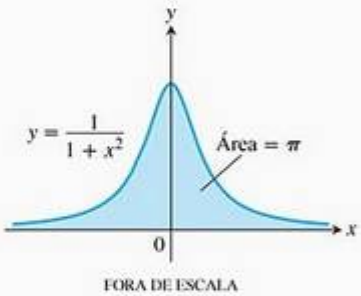


FIGURA 8.20 A área sob essa curva é finita (Exemplo 2).

Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Como $1/(1 + x^2) > 0$, a integral imprópria pode ser interpretada como a área (finita) sob a curva e acima do eixo x (Figura 8.20).

A integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$

A função $y = 1/x$ é a fronteira entre as integrais impróprias convergentes e divergentes impróprias com integrandos da forma $y = 1/x^p$. Como o exemplo a seguir mostra, a integral imprópria converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Companion Website
Biografia histórica
Lejeune Dirichlet (1805-1859)

EXEMPLO 3 Determinando a convergência

Para quais valores de p a integral $\int_1^{\infty} dx / x^p$ converge? Quando a integral converge, qual é o seu valor?

SOLUÇÃO Se $p \neq 1$,

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p + 1}\right]_1^b = \frac{1}{1 - p}(b^{-p+1} - 1) = \frac{1}{1 - p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right)$$

Logo,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{1 - p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right)\right] = \begin{cases} \frac{1}{p - 1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

porque

$$\lim_{b \to \infty} \frac{1}{b^{p-1}} = \begin{cases} 0, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

Conseqüentemente, a integral converge para o valor $1/(p - 1)$ se $p > 1$ e diverge se $p < 1$.

Se $p = 1$, a integral também diverge:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left.\ln x\right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$$

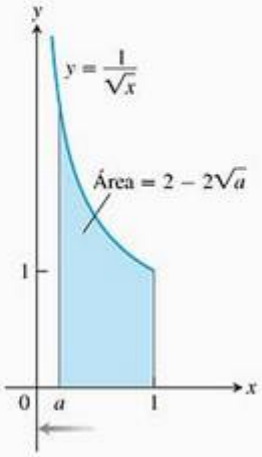


FIGURA 8.21 A área sob a curva é $\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = 2$, uma integral imprópria do segundo tipo.

Integrandos com assíntotas verticais

Outro tipo de integral imprópria aparece quando o integrando tem uma assíntota vertical — uma descontinuidade infinita — em um limite de integração ou em algum ponto entre os limites de integração. Se o integrando f é positivo ao longo do intervalo de integração, podemos novamente interpretar a integral imprópria como a área sob a curva de f e acima do eixo x entre os limites de integração.

Considere a região no primeiro quadrante que está sob a curva $y = 1/\sqrt{x}$ de $x = 0$ a $x = 1$ (Figura 8.17b). Primeiro, encontramos a área da parte de a até 1 (Figura 8.21).

$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}$$

Então encontramos o limite dessa área quando $a \to 0^+$:

$$\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{a}\right) = 2$$

A área sob a curva de 0 até 1 é finita e igual a

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

Definição **Integrais impróprias do tipo II**

Integrais de funções que se tornam infinitas em um ponto dentro do intervalo de integração são **integrais impróprias do tipo II**.

1. Se $f(x)$ é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

2. Se $f(x)$ é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

3. Se $f(x)$ é descontínua em c, onde $a < c < b$, e contínua em $[a, c) \cup (c, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Em todos os casos, se o limite é finito, dizemos que a integral imprópria **converge** e que o limite é o **valor** da integral imprópria. Se o limite não existe, dizemos que a integral imprópria **diverge**.

Na Parte 3 da definição, a integral do lado esquerdo da equação converge se *as duas* integrais do lado direito também são convergentes; se não são, a integral diverge.

EXEMPLO 4 Uma integral imprópria divergente

Verifique a convergência de

$$\int_0^1 \frac{1}{1 - x}\,dx$$

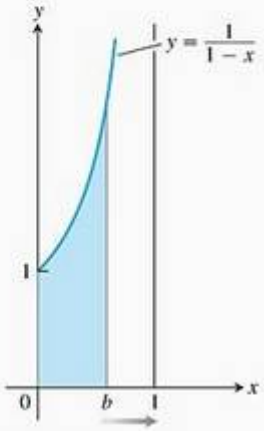


FIGURA 8.22 O limite não existe: $\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x}\right) dx = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x}\, dx = \infty$. A área sob a curva e acima do eixo x para $[0, 1)$ não é um número real (Exemplo 4).

SOLUÇÃO O integrando $f(x) = 1/(1 - x)$ é contínuo em $[0, 1)$, mas descontínuo em $x = 1$, e se torna infinito quando $x \to 1^-$ (Figura 8.22). Calculamos a integral como

$$\lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x}\, dx = \lim_{b\to 1^-} \Big[-\ln|1-x|\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to 1^-} [-\ln(1-b) + 0] = \infty$$

O limite é infinito, portanto a integral diverge.

EXEMPLO 5 Assíntota vertical em um ponto interior

Calcule

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

SOLUÇÃO O integrando tem uma assíntota vertical em $x = 1$ e é contínuo em $[0, 1)$ e $(1, 3]$ (Figura 8.23). Então, de acordo com a Parte 3 da definição dada anteriormente,

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

Depois, calculamos cada integral imprópria do lado direito dessa equação.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{1/3}\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to 1^-} [3(b-1)^{1/3} + 3] = 3$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^+} \int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{c\to 1^+} 3(x-1)^{1/3}\Big]_c^3$$

$$= \lim_{c\to 1^+} \Big[3(3-1)^{1/3} - 3(c-1)^{1/3}\Big] = 3\sqrt[3]{2}$$

Concluímos que

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3 + 3\sqrt[3]{2}$$

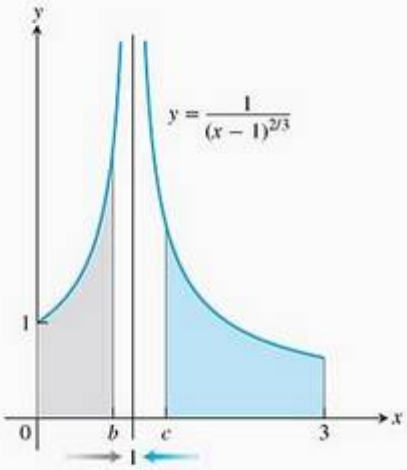


FIGURA 8.23 O Exemplo 5 mostra a convergência de $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\, dx = 3 + 3\sqrt[3]{2}$ portanto a área sob a curva existe (então se trata de um número real).

EXEMPLO 6 Uma integral imprópria convergente

Calcule a integral

$$\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\, dx$$

SOLUÇÃO

$$\int_2^{\infty} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\left(\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+1}\right)dx \qquad \text{Frações parciais.}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[2\ln(x-1) - \ln(x^2+1) - \operatorname{tg}^{-1}x\right]_2^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} - \operatorname{tg}^{-1}x\right]_2^b \qquad \text{Combine os logaritmos.}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(\frac{(b-1)^2}{b^2+1}\right) - \operatorname{tg}^{-1}b\right] - \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{tg}^{-1}2$$

$$= 0 - \frac{\pi}{2} + \ln 5 + \operatorname{tg}^{-1}2 \approx 1{,}1458$$

Observe que combinamos os logaritmos na primitiva *antes* de calcular o limite quando $b \to \infty$. Se não tivéssemos agido assim, teríamos encontrado a forma indeterminada

$$\lim_{b\to\infty}\left(2\ln(b-1) - \ln(b^2+1)\right) = \infty - \infty\,.$$

Para calcular uma forma indeterminada, é preciso, obviamente, combinar os logaritmos, logo teríamos chegado à mesma resposta no final.

Sistemas de álgebra por computador podem calcular muitas integrais impróprias convergentes. Para calcular as integrais do Exemplo 6 usando o Maple, entre com

> *f*: = (*x* + 3)((*x* – 1)*(*x*^2 + 1))

depois use o comando de integração

> int(*f*, *x* = 2..infinity)

O Maple fornece a resposta

$$-\frac{1}{2}\pi + \ln(5) + \arctan(2)$$

Para obter um resultado numérico, use o comando de cálculo **evalf** e especifique o número de dígitos, como se segue:

> evalf(%, 6)

O símbolo % passa ao computador a instrução de calcular a última expressão da tela, nesse caso, $(-1/2)\pi + \ln(5) + \arctan(2)$. O Maple dá a resposta 1,14579.

Usando o Mathematica e entrando com

In [1]: = Integrate [(*x* + 3)/((*x* – 1)(*x*^2 + 1)), {*x*, 2, Infinity}]

temos a resposta

$$Out\ [1] = \frac{-\text{Pi}}{2} + \text{ArcTan}[2] + \text{Log}[5]$$

Para obter um resultado numérico com seis dígitos, use o comando "N[%, 6]"; a resposta também será 1,14579.

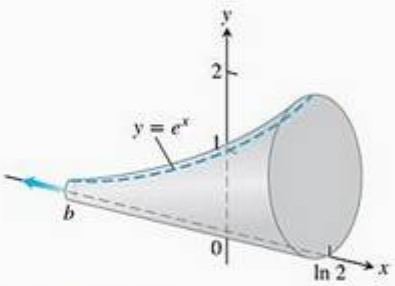


FIGURA 8.24 O cálculo do Exemplo 7 mostra que esse sólido infinito tem volume finito.

EXEMPLO 7 Encontrando o volume de um sólido infinito

As seções transversais do sólido da Figura 8.24 perpendiculares ao eixo x são discos circulares com diâmetros que vão do eixo x à curva $y = e^x$, $-\infty < x \leq \ln 2$. Encontre o volume do sólido.

SOLUÇÃO A área de uma seção transversal típica é

$$A(x) = \pi(\text{raio})^2 = \pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 = \frac{\pi}{4}e^{2x}$$

Definimos o volume do sólido como o limite do volume da parte que vai de b a $\ln 2$, quando $b \to -\infty$. Como na Seção 6.1 (o método de fatiamento), o volume dessa parte é

$$V = \int_b^{\ln 2} A(x)\,dx = \int_b^{\ln 2} \frac{\pi}{4}e^{2x}\,dx = \frac{\pi}{8}e^{2x}\Big]_b^{\ln 2}$$

$$= \frac{\pi}{8}(e^{\ln 4} - e^{2b}) = \frac{\pi}{8}(4 - e^{2b})$$

Quando $b \to -\infty$, $e^{2b} \to 0$ e $Y \to (\pi/8)(4-0) = \pi/2$. O volume do sólido é $\pi/2$.

EXEMPLO 8 Um cálculo incorreto

Calcule

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$$

SOLUÇÃO Suponha que não tenhamos notado a descontinuidade do integrando em $x = 1$, interior ao intervalo de integração. Se calcularmos a integral como uma integral comum, teremos

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Esse resultado está *errado*, pois a integral é imprópria. O cálculo correto usa limites:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

onde

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{x-1} = \lim_{b\to 1^-} \ln|x-1|\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to 1^-}(\ln|b-1| - \ln|-1|)$$

$$= \lim_{b\to 1^-}\ln(1-b) = -\infty. \qquad 1-b \to 0^+ \text{ as } b \to 1^-$$

Como $\int_0^1 dx/(x-1)$ é divergente, a integral original $\int_0^3 dx/(x-1)$ é divergente.

O Exemplo 8 ilustra o que pode dar errado se você confundir uma integral imprópria com uma integral comum. Sempre que encontrar uma

integral $\int_a^b f(x)\,dx$, você precisará examinar a função f em $[a, b]$ e, depois, decidir se a integral é imprópria. Se f for contínua em $[a, b]$, ela será uma integral comum, própria.

Testes para convergência e divergência

Quando não podemos resolver uma integral imprópria diretamente, tentamos determinar se ela é convergente ou divergente. Se a integral diverge, acabou a história. Se ela converge, podemos então utilizar métodos numéricos para ter seu valor aproximado. Os principais testes para convergência ou divergência são o teste de comparação e o teste de comparação no limite.

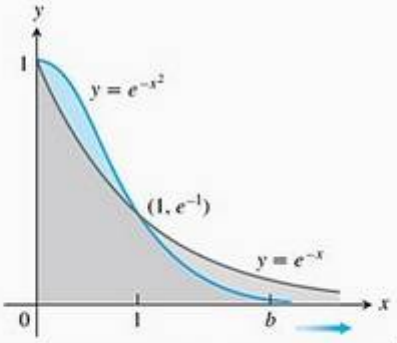


FIGURA 8.25 O gráfico de e^{-x^2} está abaixo do gráfico de e^{-x} para $x > 1$ (Exemplo 9).

EXEMPLO 9 Verificando a convergência

A integral $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge?

SOLUÇÃO Por definição,

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,dx$$

Não podemos calcular a última integral diretamente porque ela é não elementar. Mas *podemos* demonstrar que seu limite quando $b \to \infty$ é finito. Sabemos que $\int_1^b e^{-x^2}\,dx$ é uma função crescente de b. Portanto, quando $b \to \infty$, das duas uma: ou ela se torna infinita, ou tem um limite finito. Porém ela não se torna infinita: para qualquer valor de $x \geq 1$, temos $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ (Figura 8.25), de modo que

$$\int_1^b e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^b e^{-x}\,dx = -e^{-b} + e^{-1} < e^{-1} \approx 0{,}36788$$

Portanto

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,dx$$

converge para algum valor finito definido. Não sabemos exatamente qual é o valor, apenas que é positivo e inferior a 0,37. Estamos nos apoiando aqui na propriedade de completude dos números reais, discutida no Apêndice A.4.

Companion Website

Biografia histórica

Karl Weierstrass (1815-1897)

A comparação entre e^{-x^2} e e^{-x} no Exemplo 9 é um caso especial do teste a seguir.

Teorema 1 Teste de comparação direta

Sejam f e g contínuas em $[a, \infty)$, com $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para qualquer $x \geq a$.

Então

1. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge se $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge
2. $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge

O raciocínio por trás do Teorema 1 é similar ao do Exemplo 9.

Se $0 \le f(x) \le g(x)$ para $x \ge a$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx, \qquad b > a$$

A partir disso podemos afirmar, como no Exemplo 9, que

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ converge se } \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ converge}$$

E a contraposição disso também é válida

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \text{ diverge se } \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ diverge}$$

EXEMPLO 10 Usando o teste de comparação direta

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx$ converge porque

$$0 \le \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \quad \text{em } [1, \infty) \text{ e } \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge.}$$ Exemplo 3

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2 - 0{,}1}}\,dx$ diverge porque

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 0{,}1}} \ge \frac{1}{x} \quad \text{em } [1, \infty) \text{ e } \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \text{ diverge.}$$ Exemplo 3

Teorema 2 **Teste de comparação no limite**

Se as funções positivas f e g são contínuas em $[a, \infty)$ e se

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty$$

então

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_a^\infty g(x)\,dx$$

são ambas convergentes ou ambas divergentes.

Uma prova do Teorema 2 é dada pelo cálculo avançado.

Apesar de duas integrais impróprias de duas funções de a a ∞ poderem ser ambas convergentes, isso não significa que suas integrais tenham necessariamente o mesmo valor, como mostra o próximo exemplo.

EXEMPLO 11 Usando o teste de comparação no limite

Mostre que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1 + x^2}$$

converge por comparação com $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$. Calcule e compare os valores das duas integrais.

SOLUÇÃO As funções $f(x) = 1/x^2$ e $g(x) = 1/(1 + x^2)$ são positivas e contínuas em $[1, \infty)$. Além disso,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2}{1/(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) = 0 + 1 = 1$$

um limite positivo finito (Figura 8.26). Conseqüentemente, $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ converge porque $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge.

Entretanto, as integrais convergem para valores diferentes.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2-1} = 1 \qquad \text{Exemplo 3}$$

e

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\operatorname{tg}^{-1} b - \operatorname{tg}^{-1} 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

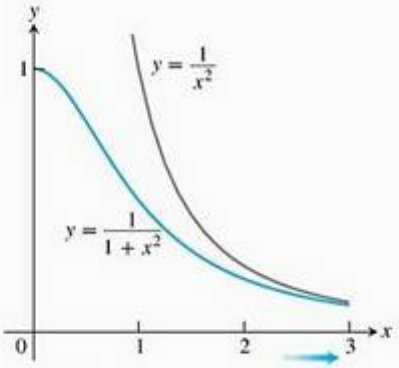


FIGURA 8.26 As funções do Exemplo 11.

EXEMPLO 12 Usando o teste de comparação no limite

Mostre que

$$\int_1^\infty \frac{3}{e^x + 5}\,dx$$

converge.

SOLUÇÃO No Exemplo 9, é fácil notar que $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \int_1^\infty (1/e^x)\,dx$ converge. Além disso, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/e^x}{3/(e^x+5)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+5}{3e^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3e^x}\right) = \frac{1}{3}$$

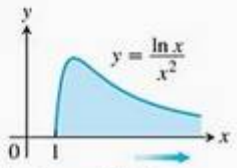
um limite finito positivo. Pelo menos no que diz respeito à convergência da integral imprópria, $3/(e^x + 5)$ se comporta como $1/e^x$.

Tipos de integrais impróprias discutidas nesta seção

Limites infinitos de integração: tipo I

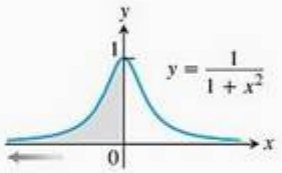
1. Limitante superior

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$



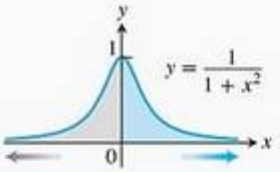
2. Limitante inferior

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2}$$



3. Os dois limitantes

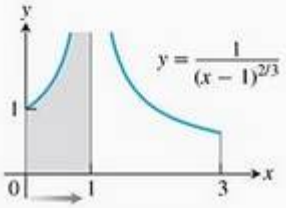
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{dx}{1+x^2}$$



O integrando se torna infinito: tipo II

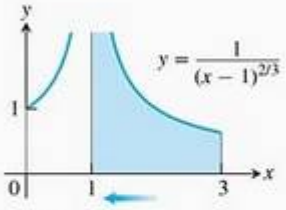
4. Extremidade superior

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to1^-}\int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



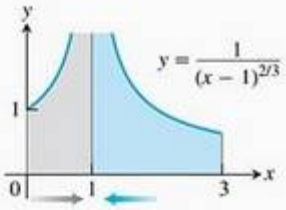
5. Extremidade inferior

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{d\to1^+}\int_d^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



6. Ponto interior

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



Exercícios 8.8

Identificando integrais impróprias

Nos exercícios 1–34, calcule as integrais sem usar tabelas.

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$
2. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1,001}}$
3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$
4. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$
5. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$
6. $\int_{-8}^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$
7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
8. $\int_0^1 \frac{dr}{r^{0,999}}$
9. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1}$
10. $\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,dx}{x^2+4}$
11. $\int_2^\infty \frac{2}{v^2-v}\,dv$
12. $\int_2^\infty \frac{2\,dt}{t^2-1}$
13. $\int_{-\infty}^\infty \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$
14. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+4)^{3/2}}$
15. $\int_0^1 \frac{\theta+1}{\sqrt{\theta^2+2\theta}}\,d\theta$
16. $\int_0^2 \frac{s+1}{\sqrt{4-s^2}}\,ds$
17. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$
18. $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$
19. $\int_0^\infty \frac{dv}{(1+v^2)(1+\operatorname{tg}^{-1} v)}$
20. $\int_0^\infty \frac{16\operatorname{tg}^{-1} x}{1+x^2}\,dx$
21. $\int_{-\infty}^0 \theta e^\theta\,d\theta$
22. $\int_0^\infty 2e^{-\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$
23. $\int_{-\infty}^0 e^{-|x|}\,dx$
24. $\int_{-\infty}^\infty 2xe^{-x^2}\,dx$
25. $\int_0^1 x\ln x\,dx$
26. $\int_0^1 (-\ln x)\,dx$
27. $\int_0^2 \frac{ds}{\sqrt{4-s^2}}$
28. $\int_0^1 \frac{4r\,dr}{\sqrt{1-r^4}}$
29. $\int_1^2 \frac{ds}{s\sqrt{s^2-1}}$
30. $\int_2^4 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-4}}$
31. $\int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$
32. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$
33. $\int_{-1}^\infty \frac{d\theta}{\theta^2+5\theta+6}$
34. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

Testando a convergência

Nos exercícios 35–64, use a integração, o teste de comparação direta ou o teste de comparação no limite para testar as integrais quanto à convergência. Se mais de um método puder ser aplicado, use o de sua preferência.

35. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}\theta\,d\theta$
36. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{cotg}\theta\,d\theta$
37. $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\sqrt{\pi-\theta}}$
38. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\,d\theta}{(\pi-2\theta)^{1/3}}$
39. $\int_0^{\ln 2} x^{-2}e^{-1/x}\,dx$
40. $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
41. $\int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{t}+\operatorname{sen} t}$
42. $\int_0^1 \frac{dt}{t-\operatorname{sen} t}$ (*Dica*: $t \geq \operatorname{sen} t$ para $t \geq 0$)
43. $\int_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$
44. $\int_0^2 \frac{dx}{1-x}$
45. $\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx$
46. $\int_{-1}^1 -x\ln|x|\,dx$
47. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3+1}$
48. $\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$
49. $\int_2^\infty \frac{dv}{\sqrt{v-1}}$
50. $\int_0^\infty \frac{d\theta}{1+e^\theta}$
51. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$
52. $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$
53. $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\,dx$
54. $\int_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$
55. $\int_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{x}\,dx$
56. $\int_\pi^\infty \frac{1+\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$
57. $\int_4^\infty \frac{2\,dt}{t^{3/2}-1}$
58. $\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}\,dx$
59. $\int_1^\infty \frac{e^x}{x}\,dx$
60. $\int_{e^e}^\infty \ln(\ln x)\,dx$
61. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x-x}}\,dx$
62. $\int_1^\infty \frac{1}{e^x-2^x}\,dx$
63. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$
64. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

Teoria e exemplos

65. Encontre os valores de p para os quais cada integral converge.

(a) $\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ (b) $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$

66. $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ **não deve ser igual a** $\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^b f(x)\,dx$. Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

diverge e, conseqüentemente, que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

diverge. Depois, mostre que

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\frac{2x\,dx}{x^2+1}=0$$

Os exercícios 67–70 referem-se à região infinita no primeiro quadrante, entre a curva $y = e^{-x}$ e o eixo x.

67. Calcule a área da região.

68. Calcule o centróide da região.

69. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo y.

70. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo x.

71. Calcule a área da região que está entre as curvas $y = \sec x$ e $y = \operatorname{tg} x$ de $x = 0$ a $x = \pi/2$.

72. A região do Exercício 71 é girada em torno do eixo x, gerando um sólido.

(a) Determine o volume do sólido.

(b) Mostre que as superfícies interna e externa do sólido têm área infinita.

73. Estimando o valor de uma integral imprópria convergente cujo domínio é infinito

(a) Mostre que

$$\int_3^\infty e^{-3x}\,dx=\frac{1}{3}e^{-9}<0{,}000042$$

e, conseqüentemente, que $\int_3^\infty e^{-x^2}\,dx<0{,}000042$. Explique por que isso significa que podemos substituir $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ por $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$ sem introduzir um erro de magnitude maior que 0,000042.

(b) Calcule $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$ numericamente.

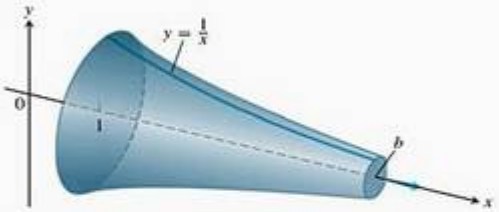
T

74. A lata de tinta infinita ou a corneta de Gabriel Como o Exemplo 3 mostra, a integral $\int_1^\infty (dx/x)$ diverge. Isso significa que a integral

$$\int_1^\infty 2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$$

a qual mede a *área de superfície* do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo x, da curva $y = 1/x$, $1 \le x$, também diverge. Comparando as duas integrais, vemos que, para qualquer valor finito $b > 1$,

$$\int_1^b 2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx>2\pi\int_1^b\frac{1}{x}\,dx$$



No entanto, a integral

$$\int_1^\infty \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

relativa ao *volume* do sólido, converge. **(a)** Calcule essa última integral. **(b)** Esse sólido de revolução às vezes é descrito como uma lata que não tem tinta suficiente para pintar o próprio interior. Pense nisso por um momento. É senso comum que uma quantidade finita de tinta não pode cobrir uma superfície infinita. Mas, se enchermos a corneta de tinta (uma quantidade finita), então teremos coberto uma superfície infinita. Explique a aparente contradição.

75. Função seno-integral A integral

$$\operatorname{Si}(x)=\int_0^x\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

chamada *função seno-integral*, tem importantes aplicações em óptica.

(a) Represente graficamente o integrando $(\operatorname{sen} t)/t$ para $t > 0$. A função Si é crescente ou decrescente? Você acha que $\operatorname{Si}(x) = 0$ para $x > 0$? Confira suas respostas, fazendo o gráfico da função $\operatorname{Si}(x)$ para $0 \le x \le 25$.

T

(b) Verifique a convergência de

$$\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

Se ela for convergente, qual será o seu valor?

76. Função erro A função

$$\operatorname{erf}(x)=\int_0^x\frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt$$

chamada *função erro*, tem importantes aplicações em probabilidade e estatística.

(a) Represente graficamente a função erro para $0 \le x \le 25$.

T

(b) Verifique a convergência de

$$\int_0^x\frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt$$

Se ela for convergente, qual parecerá ser seu valor? Você verá como confirmar sua estimativa no Exercício 37 da Seção 15.3, Volume II.

77. Função da distribuição de probabilidade normal A função

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

é chamada *função da densidade de probabilidade normal*, com média μ e desvio-padrão σ. O número μ nos diz onde a distribuição está centralizada e σ mede a "dispersão" em torno da média.

Da teoria da probabilidade, sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Nos itens a seguir, considere que $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

(a) Desenhe o gráfico de f. Encontre os intervalos em que T f é crescente, aqueles em que f é decrescente e todos os extremos locais e os pontos onde estes ocorrem.

(b) Calcule

$$\int_{-n}^{n} f(x)\,dx$$

para $n = 1, 2, 3$.

(c) Cite um argumento convincente de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

(*Dica*: Mostre que $0 < f(x) < e^{-x/2}$ para $x > 1$, e, para $b > 1$, $\int_b^{\infty} e^{-x/2}\,dx \to 0$ as $b \to \infty$.)

78. A seguir, temos um argumento de que $\ln 3$ é igual a $\infty - \infty$. Onde está a falha desse argumento? Justifique sua resposta.

$$\begin{aligned}
\ln 3 &= \ln 1 + \ln 3 = \ln 1 - \ln\frac{1}{3} \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{b-2}{b}\right) - \ln\frac{1}{3} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\ln\frac{x-2}{x}\right]_3^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\ln(x-2) - \ln x\right]_3^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_3^b \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) dx \\
&= \int_3^{\infty} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) dx \\
&= \int_3^{\infty} \frac{1}{x-2}\,dx - \int_3^{\infty} \frac{1}{x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\ln(x-2)\right]_3^b - \lim_{b\to\infty} \left[\ln x\right]_3^b \\
&= \infty - \infty.
\end{aligned}$$

79. Demonstre que, se $f(x)$ é integrável em qualquer intervalo de números reais, e a e b são números reais, com $a < b$, então

(a) $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ e $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ convergem se e somente se $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ e $\int_b^{\infty} f(x)\,dx$ convergem também.

(b) $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \int_b^{\infty} f(x)\,dx$ quando as integrais envolvidas convergem.

80. (a) Demonstre que, se f é par e as integrais necessárias existem, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

(b) Demonstre que, se f é ímpar e as integrais necessárias existem, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$$

Use cálculo direto, os testes de comparação e os resultados do Exercício 80, conforme apropriado, para determinar a convergência ou a divergência das integrais dos exercícios 81–88. Se mais de um método se aplicar, escolha aquele de sua preferência.

81. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

82. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$

83. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

84. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x^2+1}$

85. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx$

86. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}$

87. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} x| + |\cos x|}{|x|+1}\,dx$

(*Dica*: $|\operatorname{sen}\theta| + |\cos\theta| \geq \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$.)

88. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$

USANDO O COMPUTADOR

Explorando integrais de $x^p \ln x$

Nos exercícios 89–92, use um SAC para explorar as integrais para vários valores de p (incluindo valores não inteiros). Para quais valores de p a integral converge? Qual é o valor da integral quando ela converge? Represente graficamente o integrando para vários valores de p.

89. $\int_0^{e} x^p \ln x\,dx$

90. $\int_e^{\infty} x^p \ln x\,dx$

91. $\int_0^{\infty} x^p \ln x\,dx$

92. $\int_{-\infty}^{\infty} x^p \ln|x|\,dx$

Questões de revisão

1. Quais fórmulas de integração básica você conhece?
2. Quais procedimentos você conhece para adequar integrais a fórmulas básicas?
3. Qual é a fórmula para integração por partes? De onde ela é derivada? Por que você pode querer usá-la?
4. Quando você aplica a fórmula da integração por partes, como escolhe u e dv? Como você pode aplicar a integração por partes a uma integral da forma $\int f(x)\,dx$?
5. O que é integração tabular? Dê um exemplo.
6. Qual é o objetivo do método de frações parciais?
7. Quando o grau de um polinômio $f(x)$ é menor que o grau de um polinômio $g(x)$, como você escreve $f(x)/g(x)$ como uma soma de frações parciais se $g(x)$
   (a) é um produto de fatores lineares distintos?
   (b) consiste em um fator linear repetido?
   (c) contém um fator quadrático irredutível?

   O que você faz quando o grau de f *não* é menor que o grau de g?
8. Se um integrando é um produto da forma $\operatorname{sen}^n x \cos^m x$, onde m e n são inteiros não negativos, como você calcula a integral? Dê um exemplo específico de cada caso.
9. Quais substituições são feitas para calcular integrais de $\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx$, $\operatorname{sen} mx \cos nx$ e $\cos mx \cos nx$? Dê um exemplo de cada.
10. Quais substituições são às vezes utilizadas para transformar integrais envolvendo $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ e $\sqrt{x^2 - a^2}$ em integrais que podem ser calculadas diretamente? Dê um exemplo de cada caso.
11. Quais restrições você pode determinar para as variáveis envolvidas nas três substituições trigonométricas básicas para ter certeza de que as substituições são reversíveis (têm inversas)?
12. Como as tabelas de integrais são utilizadas? O que você faz se uma integral que deseja calcular não está na tabela?
13. O que é uma fórmula de redução? Como, em geral, chega-se a fórmulas de redução? Como elas são usadas? Dê um exemplo.
14. Você está colaborando para produzir um pequeno manual sobre "como" fazer integração numérica, escrevendo sobre a regra do trapézio. (a) O que você diria sobre a regra em si e como usá-la? Como obter precisão? (b) O que você diria se em vez disso estivesse escrevendo sobre a regra de Simpson?
15. Como você compararia os méritos relativos da regra de Simpson e da regra do trapézio?
16. O que é uma integral imprópria do tipo I? E do tipo II? Como os valores dos diversos tipos de integrais impróprias são definidos? Dê exemplos.
17. Quais testes podem ser usados para determinar a convergência e a divergência de integrais impróprias que não podem ser resolvidas diretamente? Dê exemplos do uso deles.

Exercícios práticos

Integração usando substituições

Calcule as integrais dos exercícios 1–82. Para transformar cada integral em uma forma básica conhecida, pode ser necessário usar uma ou mais técnicas de substituição algébrica, completamento do quadrado, separação de frações, divisão ou substituição trigonométrica.

1. $\int x\sqrt{4x^2 - 9}\,dx$
2. $\int 6x\sqrt{3x^2 + 5}\,dx$
3. $\int x(2x + 1)^{1/2}\,dx$
4. $\int x(1 - x)^{-1/2}\,dx$
5. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8x^2 + 1}}$
6. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$
7. $\int \frac{y\,dy}{25 + y^2}$
8. $\int \frac{y^3\,dy}{4 + y^4}$

9. $\int \frac{t^3\,dt}{\sqrt{9-4t^4}}$

10. $\int \frac{2t\,dt}{t^4+1}$

11. $\int z^{2/3}(z^{5/3}+1)^{2/3}\,dz$

12. $\int z^{-1/5}(1+z^{4/5})^{-1/2}\,dz$

13. $\int \frac{\operatorname{sen}2\theta\,d\theta}{(1-\cos 2\theta)^2}$

14. $\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)^{1/2}}$

15. $\int \frac{\operatorname{sen} t}{3+4\cos t}\,dt$

16. $\int \frac{\cos 2t}{1+\operatorname{sen}2t}\,dt$

17. $\int \operatorname{sen} 2x\, e^{\cos 2x}\,dx$

18. $\int \sec x \operatorname{tg} x\, e^{\sec x}\,dx$

19. $\int e^{\theta}\operatorname{sen}(e^{\theta})\cos^2(e^{\theta})\,d\theta$

20. $\int e^{\theta}\sec^2(e^{\theta})\,d\theta$

21. $\int 2^{x-1}\,dx$

22. $\int 5^{x\sqrt{2}}\,dx$

23. $\int \frac{dv}{v\ln v}$

24. $\int \frac{dv}{v(2+\ln v)}$

25. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(2+\operatorname{tg}^{-1}x)}$

26. $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

27. $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{49-x^2}}$

29. $\int \frac{dt}{\sqrt{16-9t^2}}$

30. $\int \frac{dt}{\sqrt{9-4t^2}}$

31. $\int \frac{dt}{9+t^2}$

32. $\int \frac{dt}{1+25t^2}$

33. $\int \frac{4\,dx}{5x\sqrt{25x^2-16}}$

34. $\int \frac{6\,dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

35. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$

37. $\int \frac{dy}{y^2-4y+8}$

38. $\int \frac{dt}{t^2+4t+5}$

39. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$

40. $\int \frac{dv}{(v+1)\sqrt{v^2+2v}}$

41. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

42. $\int \cos^2 3x\,dx$

43. $\int \operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2}\,d\theta$

44. $\int \operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta\,d\theta$

45. $\int \operatorname{tg}^3 2t\,dt$

46. $\int 6\sec^4 t\,dt$

47. $\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}x\cos x}$

48. $\int \frac{2\,dx}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}$

49. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{\operatorname{cosec}^2 y-1}\,dy$

50. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sqrt{\operatorname{cotg}^2 t+1}\,dt$

51. $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos^2 2x}\,dx$

52. $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\,dx$

53. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\cos 2t}\,dt$

54. $\int_{\pi}^{2\pi}\sqrt{1+\cos 2t}\,dt$

55. $\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx$

56. $\int \frac{x^3}{9+x^2}\,dx$

57. $\int \frac{4x^2+3}{2x-1}\,dx$

58. $\int \frac{2x}{x-4}\,dx$

59. $\int \frac{2y-1}{y^2+4}\,dy$

60. $\int \frac{y+4}{y^2+1}\,dy$

61. $\int \frac{t+2}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$

62. $\int \frac{2t^2+\sqrt{1-t^2}}{t\sqrt{1-t^2}}\,dt$

63. $\int \frac{\operatorname{tg}x\,dx}{\operatorname{tg}x+\sec x}$

64. $\int \frac{\operatorname{cotg}x}{\operatorname{cotg}x+\operatorname{cosec}x}\,dx$

65. $\int \sec(5-3x)\,dx$

66. $\int x\operatorname{cosec}(x^2+3)\,dx$

67. $\int \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{4}\right)dx$

68. $\int \operatorname{tg}(2x-7)\,dx$

69. $\int x\sqrt{1-x}\,dx$

70. $\int 3x\sqrt{2x+1}\,dx$

71. $\int \sqrt{z^2+1}\,dz$

72. $\int (16+z^2)^{-3/2}\,dz$

73. $\int \frac{dy}{\sqrt{25+y^2}}$

74. $\int \frac{dy}{\sqrt{25+9y^2}}$

75. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

76. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

77. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

78. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$

80. $\int \frac{12\,dx}{(x^2-1)^{3/2}}$

81. $\int \frac{\sqrt{w^2-1}}{w}\,dw$

82. $\int \frac{\sqrt{z^2-16}}{z}\,dz$

Integração por partes

Calcule as integrais dos exercícios 83–90 usando a integração por partes.

83. $\int \ln(x+1)\,dx$

84. $\int x^2\ln x\,dx$

85. $\int \operatorname{tg}^{-1}3x\,dx$

86. $\int \cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)dx$

87. $\int (x+1)^2e^x\,dx$

88. $\int x^2\operatorname{sen}(1-x)\,dx$

89. $\int e^x\cos 2x\,dx$

90. $\int e^{-2x}\operatorname{sen}3x\,dx$

Frações parciais

Calcule as integrais dos exercícios 91–110. Pode ser necessário usar uma substituição antes.

91. $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x+2}$

92. $\int \frac{x\,dx}{x^2+4x+3}$

93. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

94. $\int \frac{x+1}{x^2(x-1)}\,dx$

95. $\int \frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}$

96. $\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta+\operatorname{sen}\theta-6}$

97. $\int \frac{3x^2+4x+4}{x^3+x}\,dx$

98. $\int \frac{4x\,dx}{x^3+4x}$

99. $\int \frac{v+3}{2v^3-8v}\,dv$

100. $\int \frac{(3v-7)\,dv}{(v-1)(v-2)(v-3)}$

101. $\int \frac{dt}{t^4+4t^2+3}$

102. $\int \frac{t\,dt}{t^4-t^2-2}$

103. $\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x - 2}\,dx$

104. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x}\,dx$

105. $\int \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 4x + 3}\,dx$

106. $\int \frac{2x^3 + x^2 - 21x + 24}{x^2 + 2x - 8}\,dx$

107. $\int \frac{dx}{x\left(3\sqrt{x + 1}\right)}$

108. $\int \frac{dx}{x\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}$

109. $\int \frac{ds}{e^s - 1}$

110. $\int \frac{ds}{\sqrt{e^s + 1}}$

Substituições trigonométricas

Calcule as integrais dos exercícios 111–114 **(a)** sem usar uma substituição trigonométrica e depois **(b)** usando uma substituição trigonométrica.

111. $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{16 - y^2}}$

112. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4 + x^2}}$

113. $\int \frac{x\,dx}{4 - x^2}$

114. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{4t^2 - 1}}$

Termos quadráticos

Calcule as integrais dos exercícios 115–118.

115. $\int \frac{x\,dx}{9 - x^2}$

116. $\int \frac{dx}{x(9 - x^2)}$

117. $\int \frac{dx}{9 - x^2}$

118. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

Integrais trigonométricas

Calcule as integrais dos exercícios 119–126.

119. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\,dx$

120. $\int \cos^5 x \operatorname{sen}^5 x\,dx$

121. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x\,dx$

122. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x\,dx$

123. $\int \operatorname{sen} 5\theta \cos 6\theta\,d\theta$

124. $\int \cos 3\theta \cos 3\theta\,d\theta$

125. $\int \sqrt{1 + \cos(t/2)}\,dt$

126. $\int e^t\sqrt{\operatorname{tg}^2 e^t + 1}\,dt$

Integração numérica

127. De acordo com a fórmula que limita o erro na regra de Simpson, quantos subintervalos você deve usar para ter certeza de que o erro na estimativa do valor de

$$\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$$

pela regra de Simpson, não vai ultrapassar 10^{-4} em valor absoluto? (Lembre-se de que na regra de Simpson o número de subintervalos deve ser par.)

128. Um breve cálculo demonstra que, se $0 \le x \le 1$, então a segunda derivada de $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$ fica entre 0 e 8. Com base nisso, diga de quantas subdivisões, aproximadamente, você vai precisar para estimar a integral de f de 0 até 1 com um erro não superior a 10^{-3} em valor absoluto, usando a regra do trapézio.

129. Um cálculo direto mostra que

$$\int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen}^2 x\,dx = \pi$$

Quão próximo desse valor você chega usando a regra do trapézio, com $n = 6$? E a regra de Simpson, com $n = 6$? Experimente e descubra.

130. Você está pensando em usar a regra de Simpson para estimar o valor da integral

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

com uma magnitude de erro inferior a 10^{-5}. Você determinou que $|f^{(4)}(x)| \le 3$ ao longo do intervalo de integração. Quantos subintervalos você usaria para garantir a precisão exigida? (Lembre-se de que na regra de Simpson o número precisa ser par.)

131. **Temperatura média** Calcule o valor médio da função temperatura

$$f(x) = 37 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right) + 25$$

para um ano de 365 dias. Essa é uma maneira para estimar a temperatura média anual do ar em Fairbanks, Alasca. O Serviço Nacional de Meteorologia apresenta uma média numérica oficial da temperatura diária média do ar para o ano, 25,7 °F, ligeiramente maior que o valor médio de $f(x)$.

132. **Calor específico de um gás** Capacidade térmica, C_v, é a quantidade de calor necessária para acrescentar 1 °C à temperatura de dada massa de gás, a um volume constante, medida em cal/ °C.mol (calorias por grau centígrado, por mol). A capacidade térmica do oxigênio depende de sua temperatura T e satisfaz a fórmula

$$C_v = 8{,}27 + 10^{-5}\,(26T - 1{,}87T^2)$$

Determine o valor médio de C_v para $20° \le T \le 675$ °C e a temperatura em que é atingido.

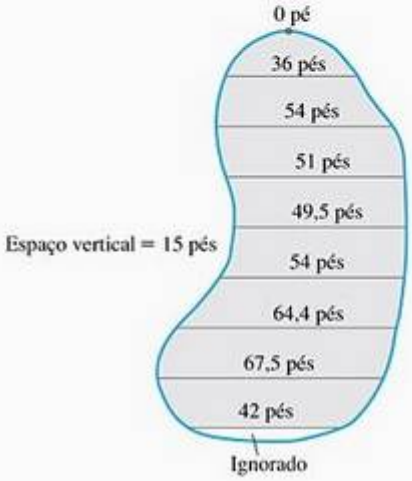
133. **Eficiência do combustível** Um computador de bordo fornece uma leitura digital do consumo de combustível em galões por hora. Durante uma viagem, um passageiro registrou o consumo de combustível do veículo a cada 5 minutos durante uma hora.

Tempo	Gal/h	Tempo	Gal/h
0	2,5	35	2,5
5	2,4	40	2,4
10	2,3	45	2,3
15	2,4	50	2,4
20	2,4	55	2,4
25	2,5	60	2,3
30	2,6		

(a) Use a regra do trapézio para fazer uma aproximação para o total de combustível consumido durante aquela hora.

(b) Se o automóvel percorreu 60 milhas nessa hora, qual foi a eficiência do combustível (em milhas por galão) para aquela parte da viagem?

134. Um novo estacionamento Para atender à demanda por vagas, sua cidade destinou a área apresentada a seguir. Como você é o engenheiro da cidade, a Câmara lhe pediu para calcular se o estacionamento pode ser construído com a soma de \$ 11.000. O custo para limpar a área será de \$ 0,10 por pé², e custará \$ 2 por pé² para pavimentar o estacionamento. O trabalho poderá ser feito com \$ 11.000?



Integrais impróprias

Calcule as integrais impróprias dos exercícios 135–144 ou afirme que são divergentes.

135. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

136. $\int_0^1 \ln x\, dx$

137. $\int_{-1}^1 \frac{dy}{y^{2/3}}$

138. $\int_{-2}^0 \frac{d\theta}{(\theta+1)^{3/5}}$

139. $\int_3^\infty \frac{2\,du}{u^2-2u}$

140. $\int_1^\infty \frac{3v-1}{4v^3-v^2}\,dv$

141. $\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx$

142. $\int_{-\infty}^0 xe^{3x}\,dx$

143. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4x^2+9}$

144. $\int_{-\infty}^\infty \frac{4dx}{x^2+16}$

Convergência ou divergência

Quais das integrais impróprias dos exercícios 145–150 convergem e quais divergem?

145. $\int_6^\infty \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2+1}}$

146. $\int_0^\infty e^{-u}\cos u\, du$

147. $\int_1^\infty \frac{\ln z}{z}\,dz$

148. $\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$

149. $\int_{-\infty}^\infty \frac{2\,dx}{e^x+e^{-x}}$

150. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$

Integrações variadas

Calcule as integrais dos exercícios 151–218. As integrais estão relacionadas de maneira aleatória.

151. $\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$

152. $\int \frac{x^3+2}{4-x^2}\,dx$

153. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

154. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

155. $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x-x^2}}$

156. $\int \frac{(t-1)\,dt}{\sqrt{t^2-2t}}$

157. $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$

158. $\int e^t \cos e^t\, dt$

159. $\int \frac{2-\cos x+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

160. $\int \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

161. $\int \frac{9\,dv}{81-v^4}$

162. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$

163. $\int \theta\cos(2\theta+1)\,d\theta$

164. $\int_2^\infty \frac{dx}{(x-1)^2}$

165. $\int \frac{x^3\,dx}{x^2-2x+1}$

166. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{1+\sqrt{\theta}}}$

167. $\int \frac{2\operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}\sec\sqrt{x}}$

168. $\int \frac{x^5\,dx}{x^4-16}$

169. $\int \frac{dy}{\operatorname{sen} y\cos y}$

170. $\int \frac{d\theta}{\theta^2-2\theta+4}$

171. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$

172. $\int \frac{dr}{(r+1)\sqrt{r^2+2r}}$

173. $\int \frac{(r+2)\,dr}{\sqrt{-r^2-4r}}$

174. $\int \frac{y\,dy}{4+y^4}$

175. $\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta\, d\theta}{(1+\cos 2\theta)^2}$

176. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

177. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos 4x}\,dx$

178. $\int (15)^{2x+1}\,dx$

179. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x}}$

180. $\int \frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2}\,dv$

181. $\int \frac{dy}{y^2-2y+2}$

182. $\int \ln\sqrt{x-1}\,dx$

183. $\int \theta^2 \operatorname{tg}(\theta^3)\,d\theta$

184. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-2x^2-x^4}}$

185. $\int \frac{z+1}{z^2(z^2+4)}\,dz$

186. $\int x^3 e^{(x^2)}\,dx$

171. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$

172. $\int \frac{dr}{(r+1)\sqrt{r^2+2r}}$

173. $\int \frac{(r+2)\,dr}{\sqrt{-r^2-4r}}$

174. $\int \frac{y\,dy}{4+y^4}$

175. $\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta\,d\theta}{(1+\cos 2\theta)^2}$

176. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

177. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos 4x}\,dx$

178. $\int (15)^{2x+1}\,dx$

179. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x}}$

180. $\int \frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2}\,dv$

181. $\int \frac{dy}{y^2-2y+2}$

182. $\int \ln\sqrt{x-1}\,dx$

183. $\int \theta^2 \operatorname{tg}(\theta^3)\,d\theta$

184. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-2x^2-x^4}}$

185. $\int \frac{z+1}{z^2(z^2+4)}\,dz$

186. $\int x^3 e^{(x^2)}\,dx$

187. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{9-4t^2}}$

188. $\int_0^{\pi/10} \sqrt{1+\cos 5\theta}\,d\theta$

189. $\int \frac{\operatorname{cotg}\theta\,d\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}$

190. $\int \frac{\operatorname{tg}^{-1} x}{x^2}\,dx$

191. $\int \frac{\operatorname{tg}\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}\,dy$

192. $\int \frac{e^t\,dt}{e^{2t}+3e^t+2}$

193. $\int \frac{\theta^2 d\theta}{4-\theta^2}$

194. $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\,dx$

195. $\int \frac{\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

196. $\int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x}$

197. $\int \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$

198. $\int \frac{x^2-x+2}{(x^2+2)^2}\,dx$

199. $\int \frac{e^t\,dt}{1+e^t}$

200. $\int \operatorname{tg}^3 t\,dt$

201. $\int_1^{\infty} \frac{\ln y}{y^3}\,dy$

202. $\int \frac{3+\sec^2 x+\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}\,dx$

203. $\int \frac{\operatorname{cotg} v\,dv}{\ln \operatorname{sen} v}$

204. $\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-x}}$

205. $\int e^{\ln\sqrt{x}}\,dx$

206. $\int e^{\theta}\sqrt{3+4e^{\theta}}\,d\theta$

207. $\int \frac{\operatorname{sen} 5t\,dt}{1+(\cos 5t)^2}$

208. $\int \frac{dv}{\sqrt{e^{2v}-1}}$

209. $\int (27)^{3\theta+1}\,d\theta$

210. $\int x^5 \operatorname{sen} x\,dx$

211. $\int \frac{dr}{1+\sqrt{r}}$

212. $\int \frac{4x^3-20x}{x^4-10x^2+9}\,dx$

213. $\int \frac{8\,dy}{y^3(y+2)}$

214. $\int \frac{(t+1)\,dt}{(t^2+2t)^{2/3}}$

215. $\int \frac{8\,dm}{m\sqrt{49m^2-4}}$

216. $\int \frac{dt}{t(1+\ln t)\sqrt{(\ln t)(2+\ln t)}}$

217. $\int_0^1 3(x-1)^2\left(\int_0^x \sqrt{1+(t-1)^4}\,dt\right)dx$

218. $\int_2^{\infty} \frac{4v^3+v-1}{v^2(v-1)(v^2+1)}\,dv$

219. Suponha que para certa função f se saiba que

$$f'(x) = \frac{\cos x}{x}, \quad f(\pi/2) = a \quad \text{e} \quad f(3\pi/2) = b$$

Use integração por partes para calcular

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\,dx$$

220. Determine um número positivo a que satisfaça

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \int_a^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Exercícios adicionais

Integrais de difícil cálculo

Calcule as integrais dos exercícios 1–10.

1. $\int (\operatorname{sen}^{-1} x)^2\,dx$

2. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$

3. $\int x \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$

4. $\int \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{y}\,dy$

5. $\int \frac{d\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}$

6. $\int \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)dx$

7. $\int \frac{dt}{t-\sqrt{1-t^2}}$

8. $\int \frac{(2e^{2x}-e^x)\,dx}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}$

9. $\int \frac{dx}{x^4+4}$

10. $\int \frac{dx}{x^6-1}$

Limites

Encontre os limites dos exercícios 11 e 12.

11. $\lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} \operatorname{sen} t\,dt$

12. $\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$

Encontre os limites dos exercícios 13 e 14, identificando-os com integrais definidas e calculando as integrais.

13. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}$

14. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$

Teoria e aplicações

15. **Calculando o comprimento do arco** Calcule o comprimento da curva

$$y = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}\, dt, \quad 0 \le x \le \pi/4$$

16. **Calculando o comprimento do arco** Calcule o comprimento da curva $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \le x \le 1/2$

17. **Calculando o volume** A região do primeiro quadrante, delimitada pelo eixo x e pela curva $y = 3x\sqrt{1-x}$ é girada em torno do eixo y para gerar um sólido. Calcule o volume do sólido.

18. **Calculando o volume** A região do primeiro quadrante, delimitada pelo eixo x, pela curva $y = 5/(x\sqrt{5-x})$ e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$, é girada em torno do eixo x para gerar um sólido. Calcule o volume do sólido.

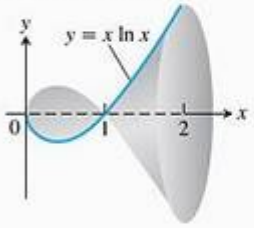
19. **Calculando o volume** A região do primeiro quadrante, delimitada pelos eixos coordenados, pela curva $y = e^x$ e pela reta $x = 1$, é girada em torno do eixo y para gerar um sólido. Calcule o volume do sólido.

20. **Calculando o volume** A região do primeiro quadrante, limitada superiormente pela curva $y = e^x - 1$, inferiormente pelo eixo x e à direita pela reta $x = \ln 2$, é girada em torno da reta $x = \ln 2$ para gerar um sólido. Calcule o volume do sólido.

21. **Calculando o volume** Seja R uma região "triangular" no primeiro quadrante, limitada superiormente pela reta $y = 1$, inferiormente pela curva $y = \ln x$ e à esquerda pela reta $x = 1$. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno
    (a) do eixo x.
    (b) da reta $y = 1$.

22. **Calculando o volume** (*Continuação do Exercício 21.*) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno
    (a) do eixo y.
    (b) da reta $x = 1$.

23. **Calculando o volume** A região entre o eixo x e a curva
$$y = f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \ln x, & 0 < x \le 2 \end{cases}$$
é girada em torno do eixo x, gerando o sólido mostrado a seguir.
    (a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.
    (b) Calcule o volume do sólido.



24. **Calculando o volume** A região infinita, delimitada pelos eixos de coordenadas e pela curva $y = -\ln x$ no primeiro quadrante, é girada em torno do eixo x, gerando um sólido. Calcule o volume do sólido.

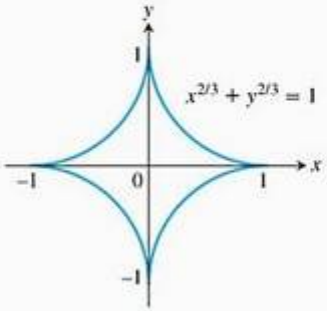
25. **Centróide de uma região** Determine o centróide da região no primeiro quadrante que é limitada abaixo pelo eixo x, acima pela curva $y = \ln x$ e à direita pela reta $x = e$.

26. **Centróide de uma região** Determine o centróide da região no plano delimitada pelas curvas $y = \pm(1 - x^2)^{-1/2}$ e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

27. **Comprimento de uma curva** Determine o comprimento da curva $y = \ln x$ de $x = 1$ a $x = e$.

28. **Determinando área de superfície** Determine a área da superfície gerada pela rotação da curva do Exercício 27 em torno do eixo y.

29. **O comprimento de um astróide** O gráfico da equação $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ pertence à família de curvas chamadas *astróides* (não "asteróides") por causa da sua aparência de estrela (veja a figura). Determine o comprimento desse astróide.



30. **A superfície gerada por um astróide** Determine a área da superfície gerada pela rotação da curva do Exercício 29 em torno do eixo x.

31. Determine a curva que passa pela origem e tem comprimento
$$\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$$

32. Sem calcular as integrais, explique por que
$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

33. (a) Trace o gráfico da função $f(x) = e^{(x - e^x)}$, $-5 \le x \le 3$.
    T (b) Mostre que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ é convergente e calcule seu valor.

34. Determine $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{ny^{n-1}}{1 + y}\, dy$.

35. Deduza a fórmula da integral

$$\int x\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^n dx = \frac{\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^{n+2}}{n + 2} + C, \quad n \neq -2.$$

36. Prove que

$$\frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} < \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

(*Dica*: Observe que, para $0 < x < 1$, temos $4 - x^2 > 4 - x^2 - x^3 > 4 - 2x^2$, com o lado esquerdo se tornando uma equação para $x = 0$ e o lado direito se tornando uma equação para $x = 1$.)

37. Para qual(is) valor(es) de a a integral

$$\int_1^\infty \left(\frac{ax}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x}\right) dx$$

é convergente? Resolva a(s) integral(is) correspondente(s).

38. Para cada $x > 0$, seja $G(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, dt$. Prove que $xG(x) = 1$ para cada $x > 0$.

39. **Área infinita e volume finito** Quais valores de p têm a seguinte propriedade? A área da região entre a curva $y = x^{-p}$, $1 \leq x < \infty$ e o eixo x é infinita, mas o volume do sólido gerado pela rotação dessa região em torno do eixo x é finito.

40. **Área infinita e volume finito** Quais valores de p têm a seguinte propriedade? A área da região no primeiro quadrante delimitada pela curva $y = x^{-p}$, pelo eixo y, pela reta $x = 1$ e pelo intervalo $[0, 1]$ no eixo x é infinita, mas o volume do sólido gerado pela rotação dessa região em torno de um dos eixos coordenados é finito.

Integração tabular

A técnica da integração tabular também se aplica a integrais da forma $\int f(x)g(x)\, dx$ quando nenhuma das funções pode ser derivada repetidamente para se tornar zero. Por exemplo, para calcular

$$\int e^{2x} \cos x\, dx$$

começamos como antes, com uma tabela que relaciona sucessivas derivadas de e^{2x} e integrais de $\cos x$:

e^{2x} e suas derivadas		cos x e suas integrais
e^{2x}	(+)	$\cos x$
$2e^{2x}$	(−)	$\operatorname{sen} x$
$4e^{2x}$	(+)	$-\cos x$ ←

Pare aqui: esta linha é igual à primeira, exceto pelas constantes multiplicativas (4 à esquerda, −1 à direita).

Paramos de derivar e integrar assim que conseguimos uma linha que seja igual à primeira, exceto pelas constantes multiplicativas. Interpretamos a tabela da seguinte maneira

$$\int e^{2x} \cos x\, dx = +(e^{2x} \operatorname{sen} x) - (2e^{2x}(-\cos x)) + \int (4e^{2x})(-\cos x)\, dx$$

Tomamos das setas diagonais os produtos com sinais e também uma integral com sinal para a última seta horizontal. Transportando a integral do lado direito para o lado esquerdo, temos

$$5\int e^{2x} \cos x\, dx = e^{2x} \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cos x$$

ou

$$\int e^{2x} \cos x\, dx = \frac{e^{2x} \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cos x}{5} + C$$

após dividir por 5 e adicionar a constante de integração.

Use a integração tabular para calcular as integrais dos exercícios 41–48.

41. $\int e^{2x} \cos 3x\, dx$

42. $\int e^{3x} \operatorname{sen} 4x\, dx$

43. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x\, dx$

44. $\int \cos 5x \operatorname{sen} 4x\, dx$

45. $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$

46. $\int e^{ax} \cos bx\, dx$

47. $\int \ln(ax)\, dx$

48. $\int x^2 \ln(ax)\, dx$

A função gama e a fórmula de Stirling

A função gama de Euler $\Gamma(x)$ ("gama de x"; Γ é a letra grega g maiúscula) usa uma integral para estender a função fatorial de inteiros não negativos para outros valores reais. A fórmula é

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad x > 0$$

Para cada x positivo, o número $\Gamma(x)$ é a integral de $t^{x-1}e^{-t}$ em relação a t, de 0 a ∞. A Figura 8.27 mostra o gráfico de Γ próximo à origem. Você verá como calcular $\Gamma(1/2)$ se fizer o exercício adicional 31 do Capítulo 15, (Volume II).

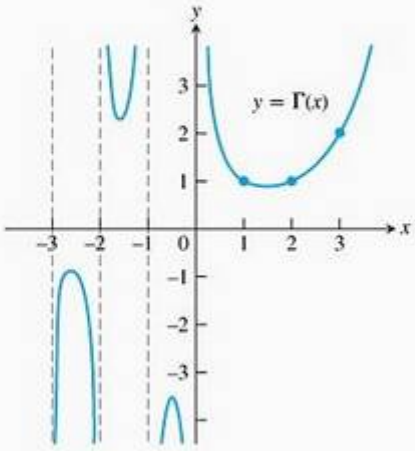


FIGURA 8.27 A função gama de Euler $\Gamma(x)$ é uma função contínua de x cujo valor em cada positivo inteiro $n + 1$ é $n!$. A fórmula de definição da integral para Γ é válida somente para $x > 0$, mas podemos estender Γ para valores negativos não inteiros de x com a fórmula $\Gamma(x) = (\Gamma(x + 1))/x$, que é o assunto do Exercício 49.

49. Se n é um inteiro não negativo, $\Gamma(n + 1) = n!$

(a) Mostre que $\Gamma(1) = 1$.

(b) Depois use a integração por partes para a integral para $\Gamma(x + 1)$ para mostrar que $\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x)$. Isso fornece

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2 \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 6 \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n\,\Gamma(n) = n! \end{aligned} \tag{1}$$

(c) Use a indução matemática para verificar a Equação (1) para qualquer inteiro não negativo n.

50. Fórmula de Stirling O matemático escocês James Stirling (1692-1770) mostrou que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e}{x}\right)^x\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\,\Gamma(x) = 1$$

Então, para x grande,

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,(1 + \epsilon(x)), \qquad \epsilon(x) \to 0 \text{ as } x \to \infty \tag{2}$$

Retirando $\epsilon(x)$, temos a aproximação

$$\Gamma(x) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}} \qquad \textbf{(Fórmula de Stirling)} \tag{3}$$

(a) **Aproximação de Stirling para $n!$** Use a Equação (3) e o fato de que $n! = n\,\Gamma(n)$ para mostrar que

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi} \qquad \textbf{(Aproximação de Stirling)} \tag{4}$$

Como você verá se fizer o Exercício 64 da Seção 11.1, Volume II, a Equação (4) nos leva à aproximação

$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e} \tag{5}$$

(b) Compare o valor de sua calculadora para $n!$ com o valor dado pela aproximação de Stirling para $n = 10$, 20, 30,..., até onde sua calculadora puder resolver.

(c) Um refinamento da Equação (2) fornece

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,e^{1/(12x)}(1 + \epsilon(x)),$$

ou

$$\Gamma(x) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,e^{1/(12x)}$$

que nos diz que

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}\,e^{1/(12n)} \tag{6}$$

Compare os valores para 10! fornecidos pela sua calculadora, pela aproximação de Stirling e pela Equação (6).

Exercícios avançados

Nos exercícios 1 a 3 , calcule as integrais.

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}$ 2. $\displaystyle\int\frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta$ 3. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^8-1}$

4. Uma outra substituição útil para calcular integrais envolvendo $\sqrt{a^2+(x+b)^2}$, $a > 0$, é $x + b = a$ senh y. Use esta substituição para calcular $\displaystyle\int\sqrt{x^2+x+1}\;dx$.

5. Deduza a fórmula de redução $\displaystyle\int\frac{dx}{x^n\sqrt{a+bx}} =$

$$\frac{-1}{a(n-1)}\left[\frac{\sqrt{a+bx}}{x^{n-1}}+\frac{(2n-3)b}{2}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}}\right],\ n\neq 1.$$

6. Use a fórmula de redução do Exercício 5 para calcular $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1+x}}$.

7. Deduza a fórmula de redução $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n} = \frac{x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{2-n}}{(2-n)a^2} - \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}}$, $n \neq 2$.

8. Mostre que existe um único valor de c para o qual a integral $\displaystyle\int_1^\infty\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+4}}-\frac{c}{x+1}\right)dx$ é convergente. Determine esse valor de c. (*Sugestão*: use o teste de comparação no limite.)

9. Mostre que a integral $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ é convergente. (*Sugestão*: faça uma integração por partes, antes de aplicar um teste de comparação.)

(*Texto para os exercícios 10–12*) Em certa população, na qual a altura satisfaz uma distribuição normal, os homens entre 18 e 30 anos têm altura média 1,75 m e desvio-padrão

5 cm. Nesse caso, a probabilidade de um indivíduo escolhido aleatoriamente ter altura entre a e b, em centímetros, é dada por $P(a,b) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-175)^2}{50}} dx$.

10. Mostre que a probabilidade de um indivíduo escolhido aleatoriamente ter altura maior que 1,95 metros é $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{2\sqrt{2}}^{\infty} e^{-y^2} dy$. Use o fato de que neste intervalo de integração $e^{-y^2} \leq e^{-2\sqrt{2}y}$ para obter um limitante superior para essa probabilidade.

11. Use o método dos trapézios e o Exercício 10 para determinar a probabilidade de um indivíduo ter mais de 1,80 com um erro menor que 10^{-2}. Use uma calculadora ou um SAC para efetuar os cálculos.

12. Repita o Exercício 11 usando o método de Simpson.

Projetos de aplicação de tecnologia

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Aproximações por somas de Riemann e pelas regras do trapézio e de Simpson

Parte I: Visualize o erro em que se incorre ao usar somas de Riemann para aproximar a área sob uma curva.

Parte II: Monte uma tabela de valores e calcule a magnitude relativa do erro em função do tamanho de passo Δx.

Parte III: Investigue o efeito da função derivada sobre o erro.

Partes IV e V: Aproximações pela regra do trapézio.

Parte VI: Aproximações pela regra de Simpson.

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Jogos de azar: explorando a técnica probabilística de Monte Carlo para a integração numérica

Explore graficamente o método de Monte Carlo para aproximar integrais definidas.

MÓDULO MATHEMATICA-MAPLE

Calculando probabilidades com integrais impróprias

Explore graficamente o método de Monte Carlo para aproximar integrais definidas.

9 Outras aplicações da integração

Companion Website
Biografia histórica
Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

RESUMO Na Seção 4.8, foram introduzidas as equações diferenciais da forma $dy/dx = f(x)$, onde y é uma função incógnita que é derivável. No caso em que f é uma função contínua, determinamos a solução geral $y(x)$ por integração: $y(x) = \int f(x)dx$. (Lembre-se de que a integral indefinida representa *todas* as primitivas de f, logo, ela contém uma constante arbitrária $+C$, que tem de ser exibida sempre que uma primitiva é encontrada.) Muitas aplicações em ciências, engenharia e economia envolvem modelos formulados por equações diferenciais muito mais gerais. Na Seção 7.2, por exemplo, vimos que o crescimento e o decaimento exponencial podem ser modelados por uma equação diferencial da forma $dy/dx = ky$, onde k é uma constante com $k \neq 0$. Ainda não foram consideradas equações diferenciais como $dy/dx = y - x$, apesar de essas equações surgirem freqüentemente em aplicações. Neste capítulo, vamos estudar várias equações diferenciais da forma $dy/dx = f(x, y)$, onde f é uma função das *duas* variáveis, tanto da dependente como da independente. Usaremos a teoria de integração indefinida para resolver essas equações diferenciais e investigaremos métodos de solução analíticos, gráficos e numéricos.

9.1 Campos de direções e equações diferenciais separáveis

Companion Website
Biografia histórica
Jules Henri Poincaré (1854–1912)

No cálculo de derivadas por derivação implícita (Seção 3.6), vimos que a expressão para a derivada dy/dx freqüentemente contém as duas variáveis x e y, não apenas a variável independente x. Iniciamos esta seção considerando a equação diferencial geral $dy/dx = f(x, y)$ e o significado de uma função ser uma solução para ela. Vamos, então, investigar equações que têm uma forma especial, na qual a função f pode ser expressa como um produto de uma função de x e uma função de y.

Equações diferenciais gerais de primeira ordem e soluções

Uma **equação diferencial de primeira ordem** é uma equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

na qual $f(x, y)$ é uma função de duas variáveis definida em uma região de plano xy. A equação é de *primeira ordem* porque envolve apenas a primeira derivada dy/dx (e não derivadas de ordens superiores). Observamos que as equações

$$y' = f(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}y = f(x, y)$$

são equivalentes à Equação(1) e as três formas serão usadas alternadamente ao longo do texto.

Uma **solução** da Equação (1) é uma função derivável, $y = y(x)$ definida em um intervalo I de valores de x (possivelmente infinito) tal que

$$\frac{d}{dx}y(x) = f(x, y(x))$$

nesse intervalo. Isto é, quando $y(x)$ e sua derivada $y'(x)$ são substituídas na Equação (1), a equação resultante é verdadeira para todo x no intervalo I. A **solução geral** de uma equação diferencial de primeira ordem é uma solução que contém todas as soluções possíveis. A solução geral contém sempre uma constante arbitrária, mas apenas ter essa propriedade não significa que a solução seja a solução geral. Ou seja, uma solução pode conter uma constante arbitrária sem ser a solução geral. Para constatar que uma solução *é* a solução geral são necessários resultados mais profundos da teoria de equações diferenciais, que são mais bem estudados em um curso mais avançado.

EXEMPLO 1 Verificando funções solução

Mostre que todo membro da família de funções

$$y = \frac{C}{x} + 2$$

é uma solução da equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2 - y)$$

no intervalo $(0, \infty)$, onde C é uma constante qualquer.

SOLUÇÃO Derivando $y = C/x + 2$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = C\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + 0 = -\frac{C}{x^2}$$

Portanto, precisamos apenas verificar que, para todo $x \in (0, \infty)$,

$$-\frac{C}{x^2} = \frac{1}{x}\left[2 - \left(\frac{C}{x} + 2\right)\right]$$

Essa última equação segue imediatamente da expansão da expressão no lado direito:

$$\frac{1}{x}\left[2 - \left(\frac{C}{x} + 2\right)\right] = \frac{1}{x}\left(-\frac{C}{x}\right) = -\frac{C}{x^2}$$

Logo, para todo valor de C, a função $y = C/x + 2$ é uma solução da equação diferencial.

Como no caso de primitivas, precisamos muitas vezes determinar uma solução *particular*, em vez da solução geral de uma equação diferencial de primeira ordem $y' = f(x, y)$. A **solução particular** que satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$ é a solução $y = y(x)$ cujo valor é y_0 quando $x = x_0$. Assim, o gráfico da solução particular passa pelo ponto (x_0, y_0) no plano xy. Um **problema de valor inicial de primeira ordem** é uma equação diferencial $y' = f(x, y)$ cuja solução tem de satisfazer $y(x_0) = y_0$.

EXEMPLO 2 Verificando que uma função é uma solução particular

Mostre que a função $y = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x$

é uma solução do problema de valor inicial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = y - x, \qquad y(0) = \frac{2}{3}$$

SOLUÇÃO A equação

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

é uma equação diferencial de primeira ordem com $f(x, y) = y - x$.

À esquerda:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x + 1 - \frac{1}{3}e^x\right) = 1 - \frac{1}{3}e^x$$

À direita:

$$y - x = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x - x = 1 - \frac{1}{3}e^x$$

A função satisfaz a condição inicial, pois

$$y(0) = \left[(x + 1) - \frac{1}{3}e^x\right]_{x=0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

O gráfico da função é exibido na Figura 9.1.

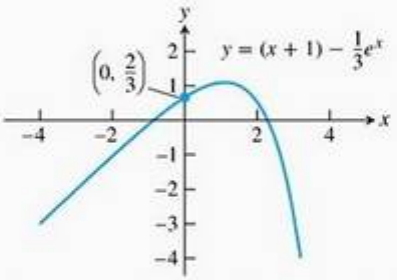


FIGURA 9.1 O gráfico da solução $y = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x$ da equação diferencial $dy/dx = y - x$, com condição inicial $y(0) = \frac{2}{3}$ (Exemplo 2).

Campos de direções: visualizando curvas integrais

Cada vez que especificamos uma condição inicial $y(x_0) = y_0$ de uma equação diferencial $y' = f(x, y)$, a **curva integral** (gráfico da solução) tem de passar pelo ponto (x_0, y_0), e deve ter coeficiente angular $f(x_0, y_0)$ nesse ponto. Podemos visualizar esses coeficientes angulares graficamente desenhando pequenos segmentos de reta de coeficiente angular $f(x, y)$ em certos pontos (x, y) na região do plano xy que é o domínio de f. Cada segmento tem o mesmo coeficiente angular que a curva integral que passa por (x, y), sendo assim tangente à curva aí. A figura resultante é chamada **campo de direções** (ou **campo de inclinações**) e fornece uma visualização da forma geral das curvas integrais. A Figura 9.2a mostra um campo de direções, com uma solução particular esboçada através dele na Figura 9.2b. Podemos ver como esses segmentos de reta indicam a direção que a curva integral toma em cada ponto pelo qual ela passa.

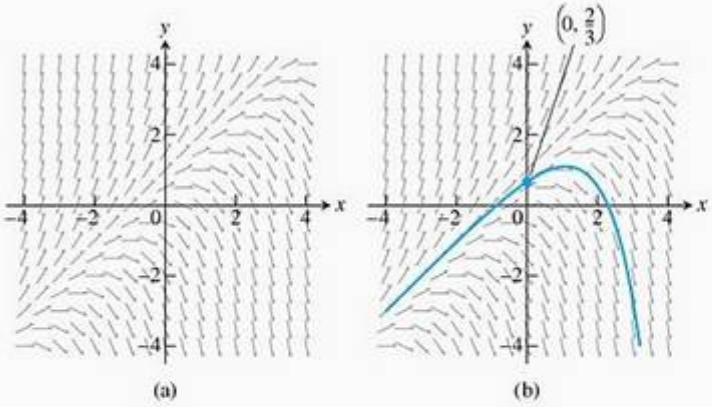


FIGURA 9.2 (a) O campo de direções de $\frac{dy}{dx} = y - x$. (b) A solução particular que passa pelo ponto $(0, \frac{2}{3})$ (Exemplo 2).

A Figura 9.3 mostra três campos de direção e podemos ver como as curvas integrais se comportam seguindo os segmentos de retas tangentes nesses campos.

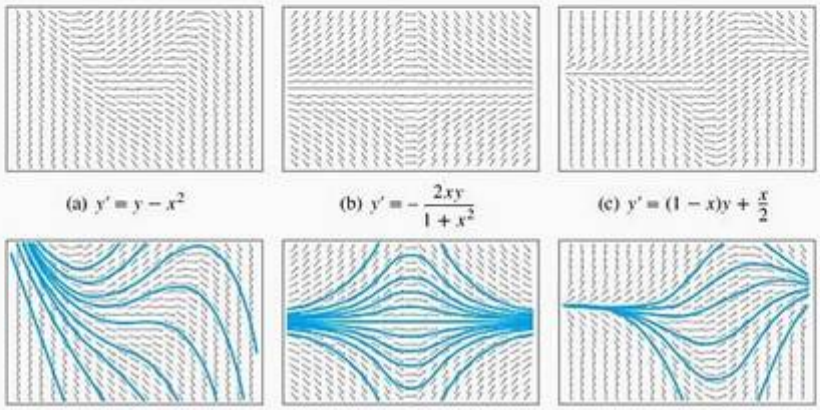


FIGURA 9.3 Os campos de direção (linha superior) e curvas integrais escolhidas (linha inferior). Em versões feitas por computador, os segmentos de reta são algumas vezes retratados com setas, como aqui. Entretanto, isso não deve ser tomado como uma indicação de que coeficientes angulares têm sentidos, pois eles não têm.

A construção de campos de direção com lápis e papel pode ser entediante. Todos os nossos exemplos foram gerados por computador.

Enquanto equações diferenciais gerais são difíceis de resolver, muitas equações importantes que surgem em ciência e aplicações têm formas especiais que fazem que possam ser resolvidas com técnicas especiais. Uma dessas classes é a de equações separáveis.

Equações separáveis

A equação $y' = f(x, y)$ é **separável** (ou **de variáveis separáveis**) quando f pode ser expressa como um produto de uma função de x por uma função de y. A equação diferencial tem então a forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)H(y)$$

Quando reescrevemos essa equação na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}, \qquad H(y) = \frac{1}{h(y)}$$

sua forma diferencial nos permite coletar todos os termos em y com dy e todos em x com dx:

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

Agora, simplesmente integramos cada um dos lados dessa equação:

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx \tag{2}$$

Após completarmos as integrações, obtemos a solução y definida implicitamente como uma função de x.

A justificativa de que podemos simplesmente integrar os dois lados da Equação (2) é baseada na regra de substituição (Seção 5.5):

$$\int h(y)\,dy = \int h(y(x))\frac{dy}{dx}\,dx$$

$$= \int h(y(x))\frac{g(x)}{h(y(x))}\,dx \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

$$= \int g(x)\,dx$$

EXEMPLO 3 Resolvendo uma equação separável

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)e^x$$

SOLUÇÃO Como $1 + y^2$ nunca é igual a zero, podemos resolver a equação separando as variáveis.

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)e^x$$

Trate dy/dx como um quociente de diferenciais e multiplique os dois lados por dx.

$$dy = (1 + y^2)e^x\,dx$$

$$\frac{dy}{1 + y^2} = e^x\,dx$$

Divida por $(1 + y^2)$.

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int e^x\,dx$$

Integre os dois lados.

$$\operatorname{tg}^{-1} y = e^x + C$$

C representa a combinação das duas constantes de integração.

A equação $\operatorname{tg}^{-1} y = e^x + C$ fornece y como uma função implícita de x. Quando $-\pi/2 < e^x + C < \pi/2$, podemos explicitar y como uma função de x calculando a tangente dos dois lados:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1} y) = \operatorname{tg}(e^x + C)$$

$$y = \operatorname{tg}(e^x + C)$$

EXEMPLO 4 Resolva a equação

$$(x + 1)\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1)$$

SOLUÇÃO Colocamos na forma diferencial, separamos as variáveis e integramos:

$$(x + 1)\,dy = x(y^2 + 1)\,dx$$

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{x\,dx}{x + 1} \qquad x \neq -1$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int \left(1 - \frac{1}{x + 1}\right) dx$$

$$\operatorname{tg}^{-1} y = x - \ln|x + 1| + C$$

O problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky, \qquad y(0) = y_0$$

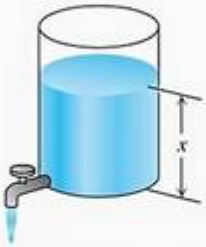


FIGURA 9.4 A taxa à qual a água vaza é $k\sqrt{x}$, onde k é uma constante positiva. No Exemplo 5, $k = 1/2$ e x é medido em pés.

Companion Website

Biografia histórica

Evangelista Torricelli (1608–1647)

envolve uma equação diferencial separável, e a solução $y = y_0e^{kt}$ fornece a lei de mudança exponencial (Seção 7.2). Já vimos esse problema de valor inicial como um modelo de fenômenos tais como crescimento populacional, decaimento radioativo e transferência de calor. Vamos agora apresentar uma aplicação em que aparece outra equação diferencial de primeira ordem separável.

Lei de Torricelli

A lei de Torricelli diz que se você drenar um tanque como o da Figura 9.4, a taxa em que a água sai é uma constante vezes a raiz quadrada da profundidade da água x. A constante depende do tamanho do buraco de drenagem. No Exemplo 5, assumimos que a constante seja 1/2.

EXEMPLO 5 Drenando um tanque

Um tanque na forma de um cilindro circular reto de raio 5 pés e altura 16 pés, que estava inicialmente cheio de água, está sendo drenado a uma taxa de $0{,}5\sqrt{x}$ pés^3/min. Determine uma fórmula para a profundidade e para a quantidade de água no instante t. Quanto tempo é necessário para o tanque ser esvaziado?

SOLUÇÃO O volume de um cilindro circular reto de raio r e altura h é $V = \pi r^2h$, de modo que o volume de água no tanque (Figura 9.4) é

$$V = \pi r^2 h = \pi(5)^2 x = 25\pi x$$

Derivando, obtemos

$$\frac{dV}{dt} = 25\pi\frac{dx}{dt}$$ É negativo, pois V está decrescendo e $dx/dt < 0$.

$$-0{,}5\sqrt{x} = 25\pi\frac{dx}{dt}$$ Lei de Torricelli.

Temos então o problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{x}}{50\pi}$$

$$x(0) = 16$$ A profundidade de água é 16 pés quando $t = 0$.

Resolvemos a equação diferencial por separação de variáveis.

$$x^{-1/2}\,dx = -\frac{1}{50\pi}\,dt$$

$$\int x^{-1/2}\,dx = -\int \frac{1}{50\pi}\,dt$$ Integre os dois lados.

$$2x^{1/2} = -\frac{1}{50\pi}t + C$$ Junte as constantes de integração.

A condição inicial $x(0) = 16$ determina o valor de C.

$$2(16)^{1/2} = -\frac{1}{50\pi}(0) + C$$

$$C = 8$$

Com $C = 8$, temos

$$2x^{1/2} = -\frac{1}{50\pi}t + 8 \qquad \text{ou} \qquad x^{1/2} = 4 - \frac{t}{100\pi}$$

As fórmulas procuradas são

$$x = \left(4 - \frac{t}{100\pi}\right)^2 \quad \text{e} \quad V = 25\pi x = 25\pi\left(4 - \frac{t}{100\pi}\right)^2$$

Em um instante t, qualquer a profundidade da água é de $(4 - t/(100\pi))^2$ pés, e o volume de água é de $25\pi\,(4 - t/(100\pi))^2$/pés^3. Em $t = 0$, temos que $x = 16$ pés e $V = 400\pi$ pés^3, como requerido. O tanque estará vazio ($V = 0$) em $t = 400\pi$ minutos, o que é aproximadamente 21 horas.

Exercícios 9.1

Verificando soluções

Nos exercícios 1 e 2, mostre que cada $y = f(x)$ é uma solução da equação diferencial dada.

1. $2y' + 3y = e^{-x}$
   (a) $y = e^{-x}$ (b) $y = e^{-x} + e^{-(3/2)x}$
   (c) $y = e^{-x} + Ce^{-(3/2)x}$
2. $y' = y^2$
   (a) $y = -\dfrac{1}{x}$ (b) $y = -\dfrac{1}{x+3}$ (c) $y = -\dfrac{1}{x+C}$

Nos exercícios 3 e 4, mostre que a função $y = f(x)$ é uma solução da equação diferencial dada.

3. $y = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt, \quad x^2y' + xy = e^x$
4. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}\displaystyle\int_1^x \sqrt{1+t^4}\,dt, \quad y' + \frac{2x^3}{1+x^4}y = 1$

Nos exercícios 5–8, mostre que cada função é uma solução do problema de valor inicial dado.

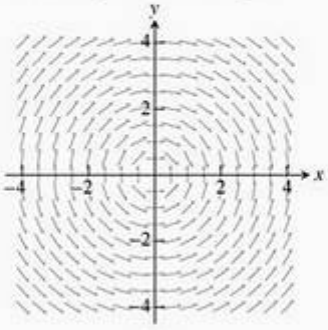
Equação diferencial	Condição inicial	Candidata a solução
5. $y' + y = \dfrac{2}{1+4e^{2x}}$	$y(-\ln 2) = \dfrac{\pi}{2}$	$y = e^{-x}\,\mathrm{tg}^{-1}(2e^x)$
6. $y' = e^{-x^2} - 2xy$	$y(2) = 0$	$y = (x-2)e^{-x^2}$
7. $xy' + y = -\operatorname{sen} x$, $x > 0$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$	$y = \dfrac{\cos x}{x}$
8. $x^2y' = xy - y^2$, $x > 1$	$y(e) = e$	$y = \dfrac{x}{\ln x}$

Equações separáveis

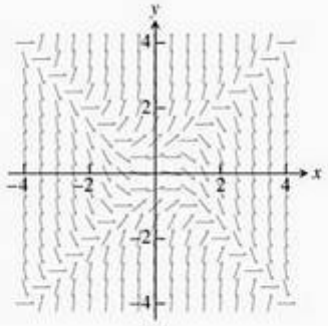
Nos exercícios 9–18, resolva a equação diferencial.

9. $2\sqrt{xy}\,\dfrac{dy}{dx} = 1, \quad x, y > 0$
10. $\dfrac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}, \quad y > 0$
11. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}$
12. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2e^{-y}$
13. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y}\cos^2\sqrt{y}$
14. $\sqrt{2xy}\,\dfrac{dy}{dx} = 1$
15. $\sqrt{x}\,\dfrac{dy}{dx} = e^{y+\sqrt{x}}, \quad x > 0$
16. $(\sec x)\dfrac{dy}{dx} = e^{y+\operatorname{sen} x}$
17. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1-y^2}, \quad -1 < y < 1$
18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x-y}}{e^{x+y}}$

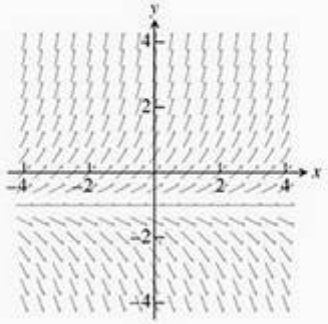
Nos exercícios 19–22, associe as equações diferenciais com seus campos de direções apresentados aqui.



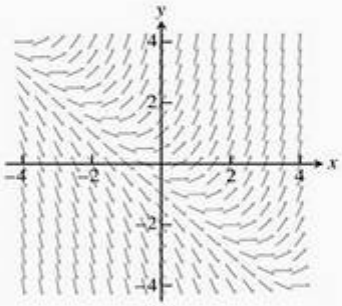
(a)



(b)



(c)



(d)

19. $y' = x + y$

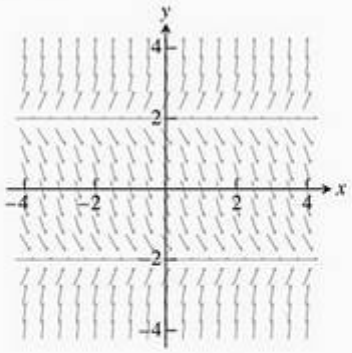
20. $y' = y + 1$

21. $y' = -\frac{x}{y}$

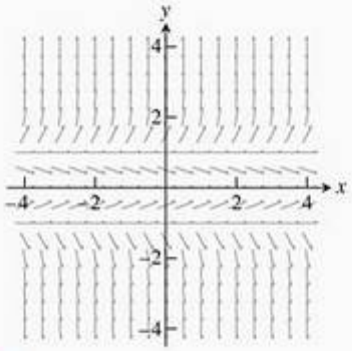
22. $y' = y^2 - x^2$

Nos exercícios 23 e 24, copie o campo de direções e esboce algumas curvas integrais.

23. $y' = (y + 2)(y - 2)$



24. $y' = y(y + 1)(y - 1)$



USANDO O COMPUTADOR

Campos de direções e curvas integrais

Nos exercícios 25-30, obtenha um campo de direções e adicione a ele os gráficos das soluções que passam pelos pontos dados.

25. $y' = y$ com

(a) (0, 1) **(b)** (0, 2) **(c)** (0, – 1)

26. $y' = 2(y - 4)$ com

(a) (0, 1) **(b)** (0, 4) **(c)** (0, 5)

27. $y' = y(x + y)$ com

(a) (0, 1) **(b)** (0, –2) **(c)** (0, 1/4) **(d)** (–1, –1)

28. $y' = y^2$ com

(a) (0, 1) **(b)** (0, 2) **(c)** (0, –1) **(d)** (0, 0)

29. $y' = (y - 1)(x + 2)$ com

(a) (0, –1) **(b)** (0, 1) **(c)** (0, 3) **(d)** (1, –1)

30. $y' = \dfrac{xy}{x^2 + 4}$ com

(a) (0, 2) **(b)** (0, –6) **(c)** $\left(-2\sqrt{3}, -4\right)$

Nos exercícios 31 e 32, obtenha um campo de direções e desenhe a solução particular no intervalo especificado. Use um SAC para encontrar a solução geral da equação diferencial.

31. **Uma equação logística** $y' = y(2 - y)$, $y(0) = 1/2$; $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 3$

32. $y' = (\text{sen } x)(\text{sen } y)$, $y(0) = 2$; $-6 \le x \le 6$, $-6 \le y \le 6$

As equações nos exercícios 33 e 34 não têm soluções que possam ser expressas em termos de funções elementares. Use um SAC para investigar graficamente cada uma das equações diferenciais.

33. $y' = \cos(2x - y)$, $y(0) = 2$; $0 \le x \le 5$, $0 \le y \le 5$; $y(2)$

34. **Uma equação de Gompertz** $y' = y(1/2 - \ln y)$, $y(0) = 1/3$; $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 3$; $y(3)$

35. Use um SAC para determinar as soluções de $y' + y = f(x)$ com a condição inicial $y(0) = 0$, se $f(x)$ for

(a) $2x$ **(b)** $\text{sen } 2x$ **(c)** $3e^{x/2}$ **(d)** $2e^{-x/2}\cos 2x$

Desenhe todas as quatro soluções no intervalo $-2 \le x \le 6$ para comparar os resultados.

36. **(a)** Use um SAC para desenhar o campo de direções da equação diferencial

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$$

na região $-3 \le x \le 3$ e $-3 \le y \le 3$.

(b) Separe as variáveis e use o integrador de um SAC para encontrar a solução geral na forma implícita.

(c) Usando o recurso para desenhar gráficos de funções implícitas de um SAC, faça o gráfico das curvas integrais para $C = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$.

(d) Determine e esboce o gráfico da solução que satisfaz a condição inicial $y(0) = -1$.

9.2 Equações diferenciais lineares de primeira ordem

A equação de crescimento/decaimento exponencial $dy/dx = ky$ (Seção 7.2) é uma equação diferencial separável. Ela também é um caso especial de uma equação diferencial que tem uma *forma linear*. As equações diferenciais lineares modelam um grande número de fenômenos do cotidiano, incluindo problemas de circuitos elétricos e misturas químicas.

Uma equação diferencial **linear** de primeira ordem é aquela que pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

onde P e Q são funções contínuas de x. A Equação (1) é a **forma-padrão** da equação linear.

Como a equação de crescimento/decaimento exponencial pode ser colocada na forma-padrão

$$\frac{dy}{dx} - ky = 0$$

vemos que ela é uma equação linear com $P(x) = -k$ e $Q(x) = 0$. A Equação (1) é *linear* (em y), pois y e sua derivada dy/dx ocorrem apenas com potência de primeiro grau, não estão multiplicadas uma pela outra e não aparecem como argumentos de nenhuma função (tais com sen y, e^y ou $\sqrt{dy/dx}$).

EXEMPLO 1 Determinando a forma-padrão

Coloque a seguinte equação linear na forma-padrão:

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0$$

SOLUÇÃO

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{3}{x}y \qquad \text{Divida por } x.$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x \qquad \text{Forma-padrão com } P(x) = -3/x \text{ e } Q(x) = x.$$

Observe que $P(x) = -3/x$, mas não é $+3/x$. A forma-padrão é $y' + P(x)y = Q(x)$, de modo que o sinal de menos é parte da fórmula para $P(x)$.

Resolvendo equações lineares

Vamos resolver a equação

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2}$$

multiplicando os dois lados por uma função positiva $v(x)$ que transforma o lado esquerdo na derivada do produto $v(x) \cdot y$. Logo mais, mostraremos como determinar v, mas, primeiro, queremos mostrar que uma vez que v esteja determinada, como ela fornece a solução que procuramos.

Aqui está por que multiplicar por $v(x)$ dá certo:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$ A equação original está na forma-padrão.

$$v(x)\frac{dy}{dx} + P(x)v(x)y = v(x)Q(x)$$ Multiplique pela função positiva $v(x)$.

$$\frac{d}{dx}(v(x)\cdot y) = v(x)Q(x)$$ $v(x)$ foi escolhida de modo que $v\frac{dy}{dx} + Pvy = \frac{d}{dx}(v\cdot y)$

$$v(x)\cdot y = \int v(x)Q(x)\,dx$$ Integre em relação a x.

$$y = \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\,dx \tag{3}$$

A Equação (3) expressa a solução da Equação (2) em termos das funções $v(x)$ e $Q(x)$. A função $v(x)$ é chamada **fator integrante** para a Equação (2), pois sua presença faz que a equação seja integrável.

Por que a fórmula para $P(x)$ não aparece também na solução? Ela aparece sim, mas indiretamente, na construção da função positiva $v(x)$. Temos que

$$\frac{d}{dx}(vy) = v\frac{dy}{dx} + Pvy$$ Condição imposta sobre v.

$$v\frac{dy}{dx} + y\frac{dv}{dx} = v\frac{dy}{dx} + Pvy$$ Regra do produto para derivadas.

$$y\frac{dv}{dx} = Pvy$$ Os termos $v = \frac{dy}{dx}$ se cancelam.

A última equação será válida se

$$\frac{dv}{dx} = Pv$$

$$\frac{dv}{v} = P\,dx$$ Variáveis separadas, $v > 0$.

$$\int \frac{dv}{v} = \int P\,dx$$ Integre os dois lados.

$$\ln v = \int P\,dx$$ Como $v > 0$ não precisamos do valor absoluto em $\ln v$.

$$e^{\ln v} = e^{\int P\,dx}$$ Tome exponenciais dos dois lados para obter v.

$$v = e^{\int P\,dx} \tag{4}$$

Portanto, uma fórmula para a solução geral da Equação (1) é dada pela Equação (3), onde $v(x)$ é dada pela Equação (4). Entretanto, em vez de decorar a fórmula, lembre-se apenas de como encontrar o fator integrante quando você tem a forma-padrão na qual $P(x)$ é identificada corretamente.

Para resolver a equação linear $y' + P(x)y = Q(x)$, multiplique os dois lados pelo fator integrante $v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ e integre os dois lados.

Nesse procedimento, quando você integra o produto no lado esquerdo, sempre obtém o produto $v(x)y$ do fator integrante pela função solução y, devido à definição de v.

Companion Website

Biografia histórica

Adrien Marie Legendre (1752-1833)

EXEMPLO 2 Resolvendo uma equação diferencial linear de primeira ordem

Resolva a equação

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0.$$

SOLUÇÃO Colocamos primeiro a equação na forma-padrão (Exemplo 1):

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x$$

de modo que $P(x) = -3/x$ é identificada.

O fator integrante é

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int(-3/x)\,dx} \\ &= e^{-3\ln|x|} && \text{A constante de integração é 0 para que } v \text{ seja o mais simples possível.} \\ &= e^{-3\ln x} && x > 0 \\ &= e^{\ln x^{-3}} = \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

A seguir, multiplicamos os dois lados da forma-padrão por $v(x)$ e integramos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3}\cdot\left(\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y\right) &= \frac{1}{x^3}\cdot x \\ \frac{1}{x^3}\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x^4}y &= \frac{1}{x^2} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}y\right) &= \frac{1}{x^2} && \text{O lado esquerdo é } \frac{d}{dx}(v\cdot y) \\ \frac{1}{x^3}y &= \int \frac{1}{x^2}\,dx && \text{Integre os dois lados.} \\ \frac{1}{x^3}y &= -\frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

Isolando y nesta última equação, obtemos a solução geral:

$$y = x^3\left(-\frac{1}{x} + C\right) = -x^2 + Cx^3 \qquad x > 0$$

EXEMPLO 3 Resolvendo um problema de valor inicial linear de primeira ordem

Resolva a equação

$$xy' = x^2 + 3y, \qquad x > 0$$

com a condição inicial $y(1) = 2$.

SOLUÇÃO Resolvemos primeiro a equação diferencial (Exemplo 2), obtendo

$$y = -x^2 + Cx^3, \qquad x > 0$$

Usamos então a condição inicial para determinar C:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + Cx^3 \\ 2 &= -(1)^2 + C(1)^3 && y = 2 \text{ quando } x = 1 \\ C &= 2 + (1)^2 = 3 \end{aligned}$$

A solução do problema de valor inicial é a função $y = -x^2 + 3x^3$.

EXEMPLO 4 Encontre a solução particular de

$$3xy' - y = \ln x + 1, \qquad x > 0$$

que satisfaz $y(1) = -2$.

SOLUÇÃO Com $x > 0$, escrevemos a equação na forma-padrão:

$$y' - \frac{1}{3x}y = \frac{\ln x + 1}{3x}$$

Então o fator integrante é dado por

$$v = e^{\int -dx/3x} = e^{(-1/3)\ln x} = x^{-1/3} \quad x > 0$$

Portanto

$$x^{-1/3}y = \frac{1}{3}\int (\ln x + 1)x^{-4/3}\,dx \quad \text{O lado esquerdo é } vy.$$

Integrando o lado direito por partes, obtemos

$$x^{-1/3}y = -x^{-1/3}(\ln x + 1) + \int x^{-4/3}\,dx + C$$

Logo

$$x^{-1/3}y = -x^{-1/3}(\ln x + 1) - 3x^{-1/3} + C$$

ou, resolvendo para y,

$$y = -(\ln x + 4) + Cx^{1/3}$$

Quando $x = 1$ e $y = -2$ nessa última equação, obtemos

$$-2 = -(0 + 4) + C$$

de modo que

$$C = 2$$

Substituindo C por 2 na equação para y, obtemos a solução particular

$$y = 2x^{1/3} - \ln x - 4$$

Para resolver a equação linear do Exemplo 2, integramos os dois lados da equação depois de multiplicar cada lado pelo fator integrante. Entretanto, podemos diminuir a quantidade de trabalho, como no Exemplo 4, lembrando que a integral do lado esquerdo é *sempre* o produto $v(x) \cdot y$ do fator integrante pela função solução. Da Equação (3), isso quer dizer que

$$v(x)y = \int v(x)Q(x)\,dx$$

Precisamos apenas integrar o produto do fator integrante $v(x)$ com o lado direito $Q(x)$ da Equação (1) e então igualar o resultado a $v(x) \cdot y$ para obter a solução geral. Contudo, para destacar o papel de $v(x)$ no processo de solução, seguimos, às vezes, o procedimento completo como ilustrado no Exemplo 2.

Observe que se a função $Q(x)$ for identicamente nula na forma-padrão dada pela Equação (1), então a equação linear é separável:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad Q(x) = 0$$

$$dy = -P(x)\,dx \quad \text{Separando as variáveis.}$$

Vamos apresentar agora dois problemas práticos modelados por uma equação diferencial linear de primeira ordem.

Circuitos *RL*

O diagrama na Figura 9.5 representa um circuito elétrico cuja resistência total é uma constante R ohms e cuja auto-indutância, exibida como uma espiral, é L henries, também constante. Há um interruptor cujos terminais a e b podem ser ligados para conectar a uma fonte de eletricidade constante de V volts.

A lei de ohm, $V = RI$, tem de ser modificada para esse circuito. Sua forma modificada é

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V, \tag{5}$$

onde i é a intensidade de corrente em ampere, e t é o tempo em segundos. Resolvendo essa equação, podemos prever como a corrente circulará depois de o interruptor ser ligado.

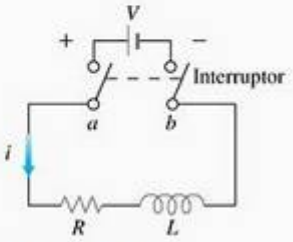


FIGURA 9.5 O circuito *RL* do Exemplo 5.

EXEMPLO 5 Fluxo de corrente elétrica

O interruptor no circuito *RL* na Figura 9.5 foi ligado no instante $t = 0$. Qual é o fluxo de corrente elétrica como uma função do tempo?

SOLUÇÃO A Equação (5) é uma equação diferencial linear de primeira ordem para i como função de t. Sua forma-padrão é

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L} \tag{6}$$

e a solução correspondente, dado que $i = 0$, quando $t = 0$, é

$$i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t} \tag{7}$$

(Exercício 32). Como R e L são positivos, $-(R/L)$ é negativo e $e^{-(R/L)t} \to 0$ quando $t \to \infty$. Portanto

$$\lim_{t\to\infty} i = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t}\right) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}\cdot 0 = \frac{V}{R}$$

Em dado instante, a corrente é teoricamente menor que V/R, mas, com o passar do tempo, a corrente se aproxima do **valor estacionário** V/R. De acordo com a equação

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V$$

$I = V/R$ é a corrente que circulará no circuito se $L = 0$ (sem indutância) ou $di/dt = 0$ (corrente estacionária, i = constante) (Figura 9.6).

A Equação (7) expressa a solução da Equação (6) como soma de dois termos: uma **solução estacionária** V/R e uma **solução transiente** $-(V/R)\,e^{-(R/L)t}$, que tende a zero quando $t \to \infty$.

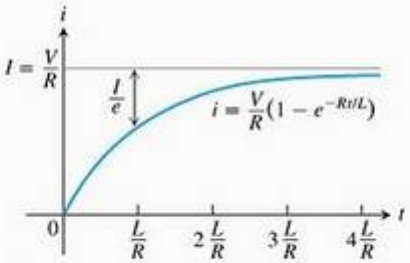


FIGURA 9.6 O crescimento da corrente no circuito *RL* do Exemplo 5. I é o valor estacionário da corrente. O número $t = L/R$ é constante de tempo do circuito. A corrente atinge 5% de seu valor estacionário em três constantes de tempo (Exercício 31).

Problemas de mistura

Um produto químico em uma solução líquida (ou dispersa em um gás) entra em um recipiente que contém também o líquido (ou o gás) com, possivelmente, uma quantidade específica do produto químico dissolvido. A mistura é mantida

uniforme agitando-a e sai do recipiente a uma taxa conhecida. Nesse processo, é freqüentemente importante saber a concentração do produto químico no recipiente em dado instante. A equação diferencial que descreve o processo é baseada na fórmula

$$\begin{array}{c}\text{Taxa de variação}\\ \text{da quantidade}\\ \text{no recipiente}\end{array} = \begin{pmatrix}\text{taxa à qual o}\\ \text{produto químico}\\ \text{chega}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{taxa à qual}\\ \text{o produto}\\ \text{químico sai}\end{pmatrix} \tag{8}$$

Se $y(t)$ é a quantidade da química no recipiente no instante t, e $V(t)$ é o volume total do líquido no instante t, então a taxa de saída do produto químico no instante t é

$$\begin{aligned}\text{Taxa de saída} &= \frac{y(t)}{V(t)} \cdot (\text{taxa de escoamento})\\ &= \begin{pmatrix}\text{concentração no}\\ \text{recipiente no}\\ \text{instante } t\end{pmatrix} \cdot (\text{taxa de escoamento})\end{aligned} \tag{9}$$

Com isso, a Equação (8) torna-se

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix}\text{taxa de chegada}\\ \text{do produto químico}\end{pmatrix} - \frac{y(t)}{V(t)} \cdot (\text{taxa de escoamento}) \tag{10}$$

Se, digamos, y for medido em libras, V em galões e t em minutos, as unidades da Equação (10) serão

$$\frac{\text{libras}}{\text{minutos}} = \frac{\text{libras}}{\text{minutos}} - \frac{\text{libras}}{\text{galões}} \cdot \frac{\text{galões}}{\text{minutos}}$$

EXEMPLO 6 Tanque de estocagem de uma refinaria de petróleo

Em uma refinaria de petróleo, um tanque de estocagem contém 2.000 galões de gasolina que tem, inicialmente, 100 libras de um aditivo dissolvido. No preparo para o tempo de inverno, a gasolina contendo 2 libras de aditivo por galão é bombeada dentro do tanque a uma taxa de 40 gal/min. A solução bem misturada é bombeada para fora a uma taxa de 45 gal/min. Quanto há de aditivo no tanque 20 minutos após o início do processo de bombeamento (Figura 9.7)?

SOLUÇÃO Seja y a quantidade (em libras) de aditivo no tanque no instante t. Sabemos que $y = 100$ quando $t = 0$. O número de galões de gasolina e aditivo na solução dentro do tanque em um instante t é

$$\begin{aligned}V(t) &= 2.000 \text{ gal} + \left(40 \frac{\text{gal}}{\text{min}} - 45 \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)(t \text{ min})\\ &= (2.000 - 5t) \text{ gal}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\text{Taxa de saída} &= \frac{y(t)}{V(t)} \cdot (\text{taxa de escoamento}) && \text{Equação (9)}\\ &= \left(\frac{y}{2.000 - 5t}\right) 45 && \text{A taxa de saída é 45 gal/min e } v = 2.000 - 5t.\\ &= \frac{45y}{2.000 - 5t} \frac{\text{lb}}{\text{min}}\end{aligned}$$

FIGURA 9.7 O tanque de estocagem do Exemplo 6 mistura o líquido que entra com o líquido armazenado para produzir o líquido que sai.

Também

$$\text{Taxa de entrada} = \left(2\,\frac{\text{lb}}{\text{gal}}\right)\left(40\,\frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)$$

$$= 80\,\frac{\text{lb}}{\text{min}} \qquad \text{Equação (10)}$$

A equação diferencial que modela o processo de mistura é

$$\frac{dy}{dt} = 80 - \frac{45y}{2.000 - 5t}$$

em libras por minuto.

Para resolver essa equação diferencial, vamos primeiro escrevê-la na forma-padrão:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{45}{2.000 - 5t}\,y = 80$$

Portanto, $P(t) = 45/(2.000 - 5t)$ e $Q(t) = 80$.

O fator integrante é

$$v(t) = e^{\int P\,dt} = e^{\int \frac{45}{2.000-5t}\,dt}$$

$$= e^{-9\ln(2.000-5t)} \qquad 2.000 - 5t > 0$$

$$= (2.000 - 5t)^{-9}$$

Multiplicando os dois lados da equação-padrão por $v(t)$ e integrando os dois lados, obtemos

$$(2.000 - 5t)^{-9} \cdot \left(\frac{dy}{dt} + \frac{45}{2.000 - 5t}\,y\right) = 80(2.000 - 5t)^{-9}$$

$$(2.000 - 5t)^{-9}\,\frac{dy}{dt} + 45(2.000 - 5t)^{-10}\,y = 80(2.000 - 5t)^{-9}$$

$$\frac{d}{dt}\left[(2.000 - 5t)^{-9}y\right] = 80(2.000 - 5t)^{-9}$$

$$(2.000 - 5t)^{-9}y = \int 80(2.000 - 5t)^{-9}\,dt$$

$$(2.000 - 5t)^{-9}y = 80 \cdot \frac{(2.000 - 5t)^{-8}}{(-8)(-5)} + C$$

A solução geral é

$$y = 2(2.000 - 5t) + C(2.000 - 5t)^9$$

Como $y = 100$, quando $t = 0$, podemos determinar o valor de C:

$$100 = 2(2.000 - 0) + C(2.000 - 0)^9$$

$$C = -\frac{3.900}{(2.000)^9}$$

A solução particular do problema de valor inicial é

$$y = 2(2.000 - 5t) - \frac{3.900}{(2.000)^9}(2.000 - 5t)^9$$

A quantidade de aditivo 20 minutos após o início do bombeamento é

$$y(20) = 2[2.000 - 5(20)] - \frac{3.900}{(2.000)^9}[2.000 - 5(20)]^9 \approx 1.342 \text{ lb}$$

Exercícios 9.2

Equações lineares de primeira ordem

Resolva as equações diferenciais nos exercícios 1–14.

1. $x\dfrac{dy}{dx} + y = e^x, \quad x > 0$

2. $e^x\dfrac{dy}{dx} + 2e^x y = 1$

3. $xy' + 3y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}, \quad x > 0$

4. $y' + (\operatorname{tg} x)y = \cos^2 x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

5. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 1 - \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

6. $(1 + x)y' + y = \sqrt{x}$

7. $2y' = e^{x/2} + y$

8. $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 2x$

9. $xy' - y = 2x \ln x$

10. $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{x} - 2y, \quad x > 0$

11. $(t - 1)^3\dfrac{ds}{dt} + 4(t - 1)^2 s = t + 1, \quad t > 1$

12. $(t + 1)\dfrac{ds}{dt} + 2s = 3(t + 1) + \dfrac{1}{(t + 1)^2}, \quad t > -1$

13. $\operatorname{sen}\theta\dfrac{dr}{d\theta} + (\cos\theta)r = \operatorname{tg}\theta, \quad 0 < \theta < \pi/2$

14. $\operatorname{tg}\theta\dfrac{dr}{d\theta} + r = \operatorname{sen}^2\theta, \quad 0 < \theta < \pi/2$

Resolvendo problemas de valor inicial

Resolva os problemas de valor inicial nos exercícios 15–20.

15. $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 3, \quad y(0) = 1$

16. $t\dfrac{dy}{dt} + 2y = t^3, \quad t > 0, \quad y(2) = 1$

17. $\theta\dfrac{dy}{d\theta} + y = \operatorname{sen}\theta, \quad \theta > 0, \quad y(\pi/2) = 1$

18. $\theta\dfrac{dy}{d\theta} - 2y = \theta^3 \sec\theta \operatorname{tg}\theta, \quad \theta > 0, \quad y(\pi/3) = 2$

19. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} - 2(x^2 + x)y = \dfrac{e^{x^2}}{x + 1}, \quad x > -1, \quad y(0) = 5$

20. $\dfrac{dy}{dx} + xy = x, \quad y(0) = -6$

21. Resolva o problema de valor inicial de crescimento/decaimento exponencial para y como uma função de t considerando a equação diferencial como uma equação linear de primeira ordem com $P(x) = -k$ e $Q(x) = 0$:

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad (k \text{ constante}) \quad y(0) = y_0$$

22. Resolva o seguinte problema de valor inicial para u como uma função de t:

$$\frac{du}{dt} + \frac{k}{m}u = 0 \ (k \text{ e } m \text{ constantes positivas}), \ u(0) = u_0$$

(a) como uma equação linear de primeira ordem.

(b) como uma equação separável.

Teoria e exemplos

23. Qual das equações a seguir está correta? Justifique sua resposta.

(a) $x\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = x \ln|x| + C$ (b) $x\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = x \ln|x| + C$

24. Qual das equações a seguir está correta? Justifique sua resposta.

(a) $\dfrac{1}{\cos x}\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{tg} x + C$

(b) $\dfrac{1}{\cos x}\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{tg} x + \frac{C}{\cos x}$

25. **Mistura salina** Um tanque contém inicialmente 100 galões de salmoura, na qual 50 libras de sal estão dissolvidas. Uma salmoura contendo 2 lb/gal de sal é despejada no tanque a uma taxa de 5 gal/min. A mistura é mantida uniforme ao ser agitada e sai do tanque a uma taxa de 4 gal/min.

(a) A que taxa (libras por minuto) o sal entra no tanque no instante t?

(b) Qual é o volume de salmoura no instante t?

(c) A que taxa (libras por minuto) o sal sai do tanque no instante t?

(d) Escreva e resolva o problema de valor inicial que descreve o processo de mistura.

(e) Ache a concentração de sal no tanque 25 minutos após o início do processo.

26. **Problema de mistura** Um tanque de capacidade de 200 galões está com água destilada até a metade. No instante $t = 0$, uma solução que contém 0,5 lb/gal de um concentrado entra no tanque a uma taxa de 5 gal/min, e a mistura bem agitada é expelida a uma taxa de 3 gal/min.

(a) Em que instante o tanque estará cheio?

(b) No instante em que o tanque está cheio, quantas libras do concentrado ele conterá?

27. **Mistura fertilizante** Um tanque contém 100 galões de água potável. Uma solução que contém 1 lb/gal de um fertilizante solúvel para gramado é despejada no tanque a uma taxa de 1 gal/min, e a mistura é bombeada para fora do tanque a uma taxa de 3 gal/min. Determine a quantidade máxima de fertilizante no tanque e o tempo necessário para alcançar esse máximo.

28. **Poluição por monóxido de carbono** Uma sala de conferências de uma corporação contém inicialmente 4.500 pés^3 de ar livre de monóxido de carbono. Começando no instante $t = 0$, uma fumaça de cigarro contendo 4% de monóxido de carbono é exalada na sala a uma taxa de 0,3 pés^3/min. Um ventilador de teto mantém o ar da sala, bem circulado, e o ar deixa a sala à taxa constante de 0,3 pés^3/min. Determine o instante em que a concentração de monóxido de carbono na sala é de 0,01%.

29. **Corrente em um circuito *RL* ligado** Quantos segundos depois do interruptor de um circuito *RL* ser ligado a corrente i levará para atingir a metade do valor estacionário? Observe que o tempo depende de R e L e não de quanta voltagem é aplicada.

30. **Corrente em um circuito *RL* desligado** Se o interruptor de um circuito *RL* for desligado depois da corrente atingir o valor estacionário $I = R/L$, o decaimento da corrente (esboçado graficamente aqui) obedece a equação

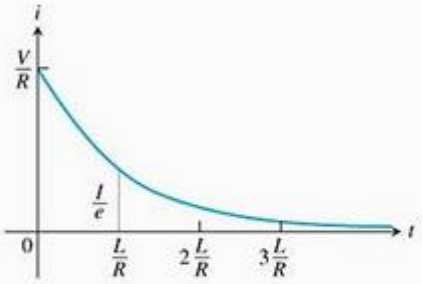
$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

que é a Equação (5) com $V = 0$.

(a) Resolva a equação para expressar i como uma função de t.

(b) Quanto tempo depois do interruptor ser desligado a corrente levará para atingir a metade de seu valor inicial?

(c) Mostre que o valor da corrente quando $t = L/R$ é I/e. (O significado desse instante será explicado no próximo exercício.)



31. **Constantes de tempo** Os engenheiros chamam o número L/R *constante de tempo* do circuito *RL* da Figura 9.6. O significado da constante de tempo é que a corrente atingirá 95% do seu valor final em três constantes de tempo a partir do instante em que o circuito for ligado (Figura 9.6). Portanto, a constante de tempo fornece uma medida de quão rapidamente um circuito individual atingirá o equilíbrio.

(a) Determine o valor de i na Equação (7) que corresponde a $t = 3L/R$ e mostre que é cerca de 95% do valor de equilíbrio $I = V/R$.

(b) Aproximadamente, que porcentagem da corrente estacionária estará circulando no circuito duas constantes de tempo após o interruptor ser ligado (isto é, quando $t = 2L/R$)?

32. **Dedução da Equação (7) do Exemplo 5**

(a) Mostre que a solução da equação

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

é

$$i = \frac{V}{R} + Ce^{-(R/L)t}$$

(b) Use a condição inicial $i(0) = 0$ para determinar o valor de C. Isso completa a dedução da Equação (7).

(c) Mostre que $i = V/R$ é uma solução da Equação (6) e que $i = Ce^{-(R/L)t}$ satisfaz a equação

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

Companion Website

Biografia histórica

James Bernoulli (1654-1705)

Uma **equação diferencial de Bernoulli** é da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Observe que, se $n = 0$ ou 1, a equação de Bernoulli é linear. Para outros valores de n, a substituição $u = y^{1-n}$ transforma a equação de Bernoulli na equação linear

$$\frac{du}{dx} + (1 - n)P(x)u = (1 - n)Q(x)$$

Por exemplo, na equação

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{-x}y^2$$

temos $n = 2$, de modo que $u = y^{1-2} = y^{-1}$ e $du/dx = -y^{-2}\,dy/dx$. Então $dy/dx = -y^2 du/dx = -u^{-2}\,du/dx$. A substituição na equação original fornece

$$-u^{-2}\frac{du}{dx} - u^{-1} = e^{-x}u^{-2}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{du}{dx} + u = -e^{-x}$$

A última equação é linear na variável dependente (incógnita) u.

Resolva as equações diferenciais nos exercícios 33–36.

33. $y' - y = -y^2$

34. $y' - y = xy^2$

35. $xy' + y = y^{-2}$

36. $x^2y' + 2xy = y^3$

9.3 Método de Euler

Companion Website

Biografia histórica

Leonhard Euler (1703-1783)

Quando não é necessário ou não for possível determinar imediatamente uma solução *exata* para um problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, podemos muitas vezes usar um computador para gerar uma tabela de valores aproximados de y para valores de x em um intervalo adequado. Tal tabela é uma **solução numérica** do problema, e o método pelo qual geramos essa tabela é um **método numérico**. Os métodos numéricos são geralmente rápidos e precisos e são freqüentemente escolhidos quando as fórmulas exatas são desnecessárias, indisponíveis ou demasiadamente complicadas. Nesta seção, estudaremos um desses métodos, chamado método de Euler, no qual muitos outros métodos numéricos são baseados.

Método de Euler

Dada uma equação diferencial $dy/dx = f(x, y)$ e uma condição inicial $y(x_0) = y_0$, podemos aproximar a solução $y = y(x)$ por sua linearização

$$L(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) \quad \text{ou} \quad L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

A função $L(x)$ fornece uma boa aproximação da solução $y(x)$ em um pequeno intervalo em torno de x_0 (Figura 9.8). A base do método de Euler é emendar uma seqüência de linearizações para aproximar a curva em um intervalo maior. A seguir, explicamos como o método funciona.

Sabemos que o ponto (x_0, y_0) está na curva integral. Suponha que especifiquemos um novo valor para a variável independente $x_1 = x_0 + dx$. (Lembre-se de que $dx = \Delta x$ na definição de diferenciais.) Se o incremento dx for pequeno, então

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)\,dx$$

é uma boa aproximação para o valor exato da solução $y = y(x_1)$. Assim, a partir do ponto (x_0, y_0), que está *exatamente* na curva integral, obtemos um ponto (x_1, y_1) que está muito próximo do ponto $(x_1, y(x_1))$ na curva integral (Figura 9.9).

Usando o ponto (x_1, y_1) e o coeficiente angular $f(x_1, y_1)$ da curva integral que passa por (x_1, y_1), vamos ao segundo passo. Fazendo $x_2 = x_1 + dx$, usamos a linearização da curva integral que passa por (x_1, y_1) para calcular

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\,dx$$

Isso fornece a próxima aproximação (x_2, y_2) para valores ao longo da curva integral $y = y(x)$ (Figura 9.10). Continuando desse modo, vamos ao terceiro passo a partir do ponto (x_2, y_2) com coeficiente angular $f(x_2, y_2)$ para obter a terceira aproximação

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\,dx$$

e assim por diante. Estamos literalmente construindo uma aproximação para uma das soluções seguindo a direção do campo de direções da equação diferencial.

Os passos na Figura 9.10 foram desenhados grandes para ilustrar o processo de construção e, por isso, a aproximação parece ser grosseira. Na prática, dx deve ser suficientemente pequeno para fazer a curva cinza encostar na curva azul e fornecer uma boa aproximação do começo ao fim.

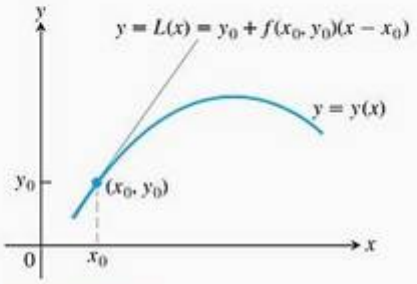


FIGURA 9.8 A linearização $L(x)$ de $y = y(x)$ em $x = x_0$.

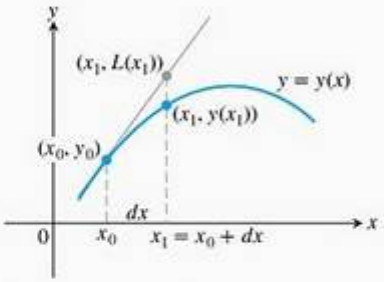


FIGURA 9.9 O primeiro passo do método de Euler aproxima $y(x_1)$ a $y_1 = L(x_1)$.

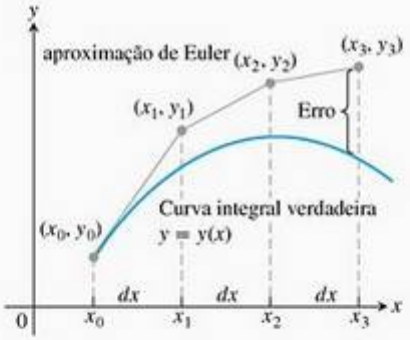


FIGURA 9.10 Os três passos na aproximação de Euler para a solução do problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Quanto mais passos, mais os erros envolvidos se acumulam, mas não exageradamente como exibido aqui.

EXEMPLO 1 Usando o método de Euler

Determine as três primeiras aproximações y_1, y_2, y_3 usando o método de Euler para o problema de valor inicial

$$y' = 1 + y, \; y(0) = 1$$

começando em $x_0 = 0$ e com $dx = 0{,}1$.

SOLUÇÃO Temos que $x_0 = 0, y_0 = 1, x_1 = x_0 + dx = 0{,}1, x_2 = x_0 + 2dx = 0{,}2$ e $x_3 = x_0 + 3dx = 0{,}3$.

Primeiro:
$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\,dx \\ &= y_0 + (1 + y_0)\,dx \\ &= 1 + (1 + 1)(0{,}1) = 1{,}2 \end{aligned}$$

Segundo:
$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,dx \\ &= y_1 + (1 + y_1)\,dx \\ &= 1{,}2 + (1 + 1{,}2)(0{,}1) = 1{,}42 \end{aligned}$$

Terceiro:
$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)\,dx \\ &= y_2 + (1 + y_2)\,dx \\ &= 1{,}42 + (1 + 1{,}42)(0{,}1) = 1{,}662 \end{aligned}$$

O processo passo a passo usado no Exemplo 1 pode ser continuado facilmente. Usando valores igualmente espaçados para a variável independente na tabela e gerando n deles, seja

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + dx \\ x_2 &= x_1 + dx \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + dx \end{aligned}$$

Calcule então a aproximação da solução

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\,dx \\ y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,dx \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,dx \end{aligned}$$

O número de passos n pode ser tão grande quanto se queira, mas os erros se acumulam se n for muito grande.

O método de Euler pode ser implantado facilmente em um computador ou uma calculadora. Um programa de computador gera uma tabela de soluções numéricas de um problema de valor inicial e nos permite entrar com os valores de x_0 e y_0, o número de passos n e o tamanho do passo dx. O programa então calcula soluções aproximadas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de modo iterativo, exatamente como descrevemos.

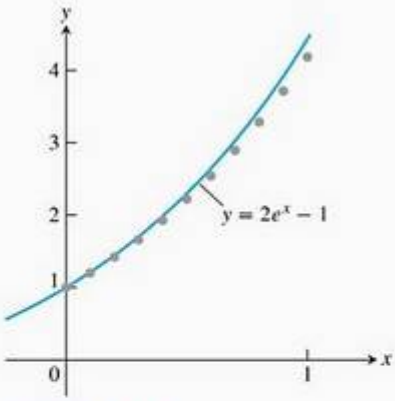


FIGURA 9.11 O gráfico de $y = 2e^x - 1$ superposto sobre os pontos obtidos com a aproximação de Euler na Tabela 9.1 (Exemplo 2).

EXEMPLO 2 Investigando a precisão do método de Euler

Use o método de Euler para resolver

$$y' = 1 + y, \; y(0) = 1$$

no intervalo $0 \le x \le 1$, começando em $x_0 = 0$ e com

(a) $dx = 0{,}1$

(b) $dx = 0{,}05$

Compare as aproximações com os valores da solução exata $y = 2e^x - 1$.

SOLUÇÃO

(a) Usamos um computador para gerar os valores aproximados da Tabela 9.1. A coluna de "erro" é obtida subtraindo-se os valores não arredondados fornecidos pelo método de Euler dos valores não arredondados determinados usando-se a solução exata. Todas as entradas foram então arredondadas até a quarta casa decimal.

TABELA 9.1 Solução de Euler de $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$, tamanho do passo $dx = 0{,}1$

x	y (Euler)	y (exato)	Erro
0	1	1	0
0,1	1,2	1,2103	0,0103
0,2	1,42	1,4428	0,0228
0,3	1,662	1,6997	0,0377
0,4	1,9282	1,9836	0,0554
0,5	2,2210	2,2974	0,0764
0,6	2,5431	2,6442	0,1011
0,7	2,8974	3,0275	0,1301
0,8	3,2872	3,4511	0,1639
0,9	3,7159	3,9192	0,2033
1,0	4,1875	4,4366	0,2491

No instante em que atingimos $x = 1$ (após dez passos), o erro é de aproximadamente 5,6% da solução exata. Um gráfico da solução exata junto com os pontos obtidos pela solução de Euler da Tabela 9.1 estão na Figura 9.11.

(b) Uma maneira de tentar reduzir o erro é decrescer o tamanho do passo. A Tabela 9.2 mostra os resultados e as comparações deles com as soluções exatas quando decrescemos o tamanho do passo para 0,05, dobrando o número de passos para 20. Como na Tabela 9.1, todos os cálculos foram feitos antes do arredondamento. Desta vez, quando atingimos $x = 1$, o erro relativo é apenas de aproximadamente 2,9%.

TABELA 9.2 Solução de Euler de $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$, tamanho do passo $dx = 0{,}05$

x	y (Euler)	y (exato)	Erro
0	1	1	0
0,05	1,1	1,1025	0,0025
0,10	1,205	1,2103	0,0053
0,15	1,3153	1,3237	0,0084

x	y (Euler)	y (exato)	Erro
0,20	1,4310	1,4428	0,0118
0,25	1,5526	1,5681	0,0155
0,30	1,6802	1,6997	0,0195
0,35	1,8142	1,8381	0,0239
0,40	1,9549	1,9836	0,0287
0,45	2,1027	2,1366	0,0340
0,50	2,2578	2,2974	0,0397
0,55	2,4207	2,4665	0,0458
0,60	2,5917	2,6442	0,0525
0,65	2,7713	2,8311	0,0598
0,70	2,9599	3,0275	0,0676
0,75	3,1579	3,2340	0,0761
0,80	3,3657	3,4511	0,0853
0,85	3,5840	3,6793	0,0953
0,90	3,8132	3,9192	0,1060
0,95	4,0539	4,1714	0,1175
1,00	4,3066	4,4366	0,1300

Companion Website
Biografia histórica
Carl Runge (1856-1927)

Poderia ser tentador reduzir ainda mais o tamanho do passo no Exemplo 2 para obter uma precisão maior. Cada cálculo adicional, entretanto, não apenas requer mais tempo de computador, mas, mais importante que isso, acumula os erros de arredondamento em virtude das representações aproximadas de números dentro do computador.

A análise de erros e a investigação de métodos são importantes para reduzir esses erros quando são feitos cálculos numéricos, no entanto, são mais adequadas para um curso mais avançado. Existem métodos numéricos mais precisos que o método de Euler, como você verá em um estudo mais avançado de equações diferenciais. Estudaremos aqui um aprimoramento do método de Euler.

Método de Euler melhorado

Podemos melhorar o método de Euler fazendo uma média de dois coeficientes angulares. Primeiro estimamos y_n como no método de Euler original, mas vamos denotá-lo por z_n. Tomamos então a média de $f(x_{n-1}, y_{n-1})$ e $f(x_n, z_n)$ no lugar de $f(x_{n-1}, y_{n-1})$ no passo seguinte. Calculamos então a próxima aproximação y_n usando

$$z_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,dx$$

$$y_n = y_{n-1} + \left[\frac{f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, z_n)}{2}\right] dx$$

EXEMPLO 3 Investigando a precisão do método de Euler melhorado

Use o método de Euler melhorado para resolver

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

no intervalo $0 \le x \le 1$, começando em $x_0 = 0$ e com $dx = 0{,}1$. Compare as aproximações com os valores da solução exata $y = 2e^x - 1$.

SOLUÇÃO Usamos um computador para gerar os valores aproximados da Tabela 9.3. A coluna de "erro" é obtida subtraindo os valores não arredondados obtidos pelo método de Euler melhorado dos valores não arredondados determinados usando a solução exata. Todas as entradas são então arredondadas até a quarta casa decimal.

TABELA 9.3 Solução de Euler melhorada de $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$, tamanho do passo $dx = 0{,}1$

x	y (Euler melhorado)	y (exato)	Erro
0	1	1	0
0,1	1,21	1,2103	0,0003
0,2	1,4421	1,4428	0,0008
0,3	1,6985	1,6997	0,0013
0,4	1,9818	1,9836	0,0018
0,5	2,2949	2,2974	0,0025
0,6	2,6409	2,6442	0,0034
0,7	3,0231	3,0275	0,0044
0,8	3,4456	3,4511	0,0055
0,9	3,9124	3,9192	0,0068
1,0	4,4282	4,4366	0,0084

No instante em que atingimos $x = 1$ (após dez passos), o erro relativo é de aproximadamente 0,19%.

Comparando as tabelas 9.1 e 9.3, vemos que o método de Euler melhorado é consideravelmente mais preciso que o método de Euler original, ao menos para o problema de valor inicial $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$.

EXEMPLO 4 Tanque de estocagem de uma refinaria de petróleo revisitado

No Exemplo 6 da Seção 9.2 olhamos um problema que envolve uma mistura de um aditivo entrando em um tanque de 2.000 galões de gasolina e que simultaneamente estava sendo bombeado para fora. A análise forneceu o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 80 - \frac{45y}{2.000 - 5t}, \qquad y(0) = 100$$

onde $y(t)$ é a quantidade de aditivo no instante t. O problema era encontrar $y(20)$. Usando o método de Euler com um incremento $dt = 0{,}2$ (ou 100 passos), as aproximações obtidas foram

$$y(0{,}2) \approx 115{,}55; \qquad y(0{,}4) \approx 131{,}0298; \ldots,$$

terminando com $y(20) \approx 1.344{,}3616$. O erro relativo em comparação com a solução exata $y(20) = 1.342$ é de aproximadamente 0,18%.

Exercícios 9.3

Calculando aproximações de Euler

Nos exercícios 1–6, use o método de Euler para calcular as três primeiras aproximações do problema de valor inicial dado para o tamanho do incremento especificado. Calcule a solução exata e investigue a precisão de suas aproximações. Arredonde seus resultados até a quarta casa decimal.

1. $y' = 1 - \frac{y}{x}, \quad y(2) = -1, \quad dx = 0{,}5$
2. $y' = x(1 - y), \quad y(1) = 0, \quad dx = 0{,}2$
3. $y' = 2xy + 2y, \quad y(0) = 3, \quad dx = 0{,}2$
4. $y' = y^2(1 + 2x), \quad y(-1) = 1, \quad dx = 0{,}5$
5. T $y' = 2xe^{x^2}, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0{,}1$
6. T $y' = y + e^x - 2, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0{,}5$
7. Use o método de Euler com $dx = 0{,}2$ para estimar $y(1)$ se $y' = y$ e $y(0) = 1$. Qual é o valor exato de $y(1)$?
8. Use o método de Euler com $dx = 0{,}2$ para estimar $y(2)$ se $y' = y/x$ e $y(1) = 2$. Qual é o valor exato de $y(2)$?
9. Use o método de Euler com $dx = 0{,}5$ para estimar $y(5)$ se T $y' = y^2/\sqrt{x}$ e $y(1) = -1$. Qual é o valor exato de $y(5)$?
10. Use o método de Euler com $dx = 1/3$ para estimar $y(2)$ se T $y' = y - e^{2x}$ e $y(0) = 1$. Qual é o valor exato de $y(2)$?

Método de Euler melhorado

Nos exercícios 11 e 12, use o método de Euler melhorado para calcular as três primeiras aproximações para o problema de valor inicial dado. Compare as aproximações com os valores da solução exata.

11. $y' = 2y(x + 1), \quad y(0) = 3, \quad dx = 0{,}2$

    (Veja o Exercício 3 para a solução exata.)
12. $y' = x(1 - y), \quad y(1) = 0, \quad dx = 0{,}2$

    (Veja o Exercício 2 para a solução exata.)

USANDO O COMPUTADOR

Método de Euler

Nos exercícios 13–16, use o método de Euler com o tamanho de passo especificado para estimar o valor da solução no ponto x^* dado. Ache o valor da solução exata em x^*.

13. $y' = 2xe^{x^2}, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0{,}1, \quad x^* = 1$
14. $y' = y + e^x - 2, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0{,}5, \quad x^* = 2$
15. $y' = \sqrt{x}/y, \quad y > 0, \quad y(0) = 1, \quad dx = 0{,}1, \quad x^* = 1$
16. $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0, \quad dx = 0{,}1, \quad x^* = 1$

Nos exercícios 17 e 18, (a) ache a solução exata do problema de valor inicial. Compare então a precisão da aproximação com $y(x^*)$ usando o método de Euler, começando em x_0, com tamanho de passo (b) 0,2; (c) 0,1 e (d) 0,05.

17. $y' = 2y^2(x - 1), \quad y(2) = -1/2, \quad x_0 = 2, \quad x^* = 3$
18. $y' = y - 1, \quad y(0) = 3, \quad x_0 = 0, \quad x^* = 1$

Método de Euler melhorado

Nos exercícios 19 e 20, compare a precisão da aproximação de $y(x^*)$ usando o método de Euler melhorado começando em x_0, com tamanho de passo

(a) 0,2 (b) 0,1 (c) 0,05

(d) Descreva o que acontece com o erro quando o tamanho de passo decresce.

19. $y' = 2y^2(x - 1), \quad y(2) = -1/2, \quad x_0 = 2, \quad x^* = 3$

    (Veja o Exercício 17 para a solução exata.)
20. $y' = y - 1, \quad y(0) = 3, \quad x_0 = 0, x^* = 1$

    (Veja o Exercício 18 para a solução exata.)

Investigando graficamente as equações diferenciais

Use um SAC para investigar graficamente cada uma das equações diferenciais nos exercícios 21–24. Execute os passos a seguir para ajudar em suas investigações.

(a) Desenhe um campo de direções da equação diferencial na janela xy dada.

(b) Determine a solução geral da equação diferencial usando o recurso de resolução de equações diferenciais do seu SAC.

(c) Faça os gráficos das soluções para os valores arbitrários da constante $C = -2, -1, 0, 1, 2$ sobrepostas ao desenho de seu campo de direções.

(d) Determine e desenhe o gráfico da solução que satisfaz a condição inicial especificada no intervalo $[0, b]$.

(e) Determine a aproximação numérica de Euler da solução do problema de valor inicial com quatro subintervalos e desenhe a aproximação de Euler sobreposta ao gráfico obtido no item (d).

(f) Repita a parte (e) para 8, 16 e 32 subintervalos. Desenhe essas três aproximações de Euler sobrepostas ao gráfico da parte (e).

(g) Determine o erro (y(exato) − y(Euler)) no ponto especificado $x = b$ para cada uma de suas quatro aproximações de Euler. Discuta a melhora na porcentagem de erro.

21. $y' = x + y$, $y(0) = -7/10$; $-4 \le x \le 4$, $-4 \le y \le 4$; $b = 1$

22. $y' = -x/y$, $y(0) = 2$; $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 3$; $b = 2$

23. **Uma equação logística** $y' = y(2 - x)$, $y(0) = 1/2$; $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 3$; $b = 3$

24. $y' = (\text{sen } x)(\text{sen } y)$, $y(0) = 2$; $-6 \le x \le 6$, $-6 \le y \le 6$; $b = 3\pi/2$

9.4 Soluções gráficas de equações diferenciais autônomas

No Capítulo 4, vimos que o sinal da primeira derivada determina onde o gráfico de uma função é crescente e onde é decrescente. O sinal da segunda derivada determina a concavidade do gráfico. Podemos usar nosso conhecimento de como derivadas determinam a forma do gráfico para resolver equações diferenciais graficamente. As idéias iniciais para proceder assim são as noções de *reta de fase* e *valor de equilíbrio*. Chegamos a essas noções ao investigar de um ponto de vista diferente do estudado no Capítulo 4, o que acontece quando a derivada de uma função derivável é zero.

Valores de equilíbrio e retas de fase

Quando derivamos implicitamente uma equação

$$\frac{1}{5}\ln(5y - 15) = x + 1$$

obtemos

$$\frac{1}{5}\left(\frac{5}{5y - 15}\right)\frac{dy}{dx} = 1$$

Isolando $y' = dy/dx$, obtemos que $y' = 5y - 15 = 5(y - 3)$. Nesse caso, a derivada y' é uma função só de y (da variável dependente) e é zero quando $y = 3$.

Uma equação diferencial para a qual a derivada dy/dx é uma função só de y é chamada uma equação diferencial **autônoma**. Vamos investigar o que acontece quando a derivada, em uma equação autônoma, é igual a zero.

Definições **Valores de equilíbrio**

Se $dy/dx = g(y)$ é uma equação diferencial autônoma, então os valores de y para os quais $dy/dx = 0$ são chamados **valores de equilíbrio** ou **pontos estacionários**.

Portanto, os valores de equilíbrio são aqueles nos quais nenhuma mudança ocorre na variável dependente, de modo que y está em *repouso*. A ênfase é sobre o valor de y no qual $dy/dx = 0$, não no valor de x, como foi estudado no Capítulo 4.

EXEMPLO 1 Encontrando valores de equilíbrio

Os valores de equilíbrio da equação diferencial autônoma

$$\frac{dy}{dx} = (y + 1)(y - 2)$$

são $y = -1$ e $y = 2$.

Para construir uma solução gráfica de uma equação diferencial autônoma, como no Exemplo 1, desenhamos primeiro a **reta de fase** para a equação, que é uma representação gráfica sobre o eixo y, que mostra os valores de equilíbrio da equação com os intervalos onde dy/dx e d^2y/dx^2 são positivas e negativas. Com isso, sabemos onde as soluções são crescentes e decrescentes e a concavidade da curva integral. Essas são as características essenciais dos gráficos de funções que estudamos na Seção 4.4, e que agora nos permitem determinar a forma das curvas integrais mesmo sem ter as fórmulas para elas.

EXEMPLO 2 Desenhando uma reta de fase e esboçando curvas integrais

Desenhe a reta de fase da equação

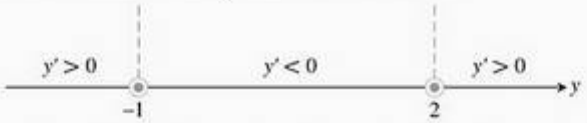
$$\frac{dy}{dx} = (y + 1)(y - 2)$$

e use-a para esboçar as soluções da equação.

SOLUÇÃO

1. *Desenhe uma reta numérica para y e marque os valores de equilíbrio* $y = -1$ e $y = 2$, *onde* $dy/dx = 0$.

2. *Identifique e marque os intervalos onde* $y' > 0$ e $y' < 0$. Este passo é parecido com o que fizemos na Seção 4.3, com a diferença de agora estar sendo feito no eixo y em vez de no eixo x.



Podemos resumir a informação sobre o sinal de y' na própria reta de fase. Como $y' > 0$ no intervalo à esquerda de $y = -1$, uma solução da equação diferencial com um valor $y < -1$ crescerá a partir desse valor em direção a $y = -1$. Ilustramos essa informação desenhando uma seta apontando para -1.

Analogamente, $y' < 0$ entre $y = -1$ e $y = 2$, portanto uma solução com um valor nesse intervalo decresce em direção a $y = -1$.

Para $y > 2$, temos que $y' > 0$, portanto uma solução com um valor de y maior do que 2 crescerá sem limite a partir desse valor.

Em resumo, as curvas integrais abaixo da reta horizontal $y = -1$ no plano xy crescem em direção a $y = -1$. As curvas integrais entre as retas $y = -1$ e $y = 2$ decrescem de $y = 2$ em direção a $y = -1$. As curvas integrais acima de $y = 2$ crescem distanciando-se de $y = 2$ e continuam crescendo.

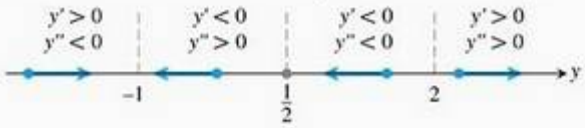
3. *Calcule y'' e marque os intervalos onde $y'' > 0$ e $y'' < 0$.* Para encontrar y'', derivamos y' em relação a x usando derivação implícita.

$$y' = (y + 1)(y - 2) = y^2 - y - 2 \quad \text{Fórmula para } y'\text{...}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(y^2 - y - 2) \\ &= 2yy' - y' \\ &= (2y - 1)y' \\ &= (2y - 1)(y + 1)(y - 2) \end{aligned}$$

Diferenciada implicitamente em relação a x

Dessa fórmula, vemos que y'' muda de sinal em $y = -1$, $y = 1/2$ e $y = 2$. Adicionamos à reta de fase essa informação sobre o sinal de y''.



4. *Esboce diversas soluções no plano xy.* As retas horizontais $y = -1$ e $y = 2$ dividem o plano em faixas horizontais nas quais sabemos o sinal de y' e y''. Em cada faixa, essa informação nos diz se as curvas integrais sobem ou descem e como elas se deformam conforme x cresce (Figura 9.12).

As "retas de equilíbrio" $y = -1$ e $y = 2$ são também curvas integrais. (As funções constantes $y = -1$ e $y = 2$ satisfazem a equação diferencial.) As curvas integrais que cruzam a reta $y = 1/2$ têm um ponto de inflexão nela. A concavidade muda de côncava para baixo (acima da reta) para côncava para cima (abaixo da reta).

Como previmos no Passo 2, as soluções nas faixas do meio e inferior se aproximam do valor de equilíbrio $y = -1$ conforme x cresce. As soluções na faixa superior crescem a partir de $y = 2$.

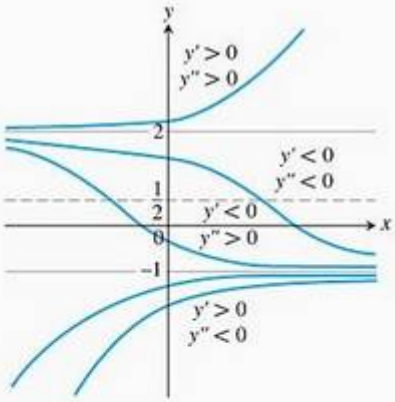


FIGURA 9.12 As soluções gráficas do Exemplo 2 incluem as retas horizontais $y = -1$ e $y = -2$, que passam pelos valores de equilíbrio.

Equilíbrio estável e instável

Observe a Figura 9.12 mais uma vez, em particular o comportamento das curvas integrais próximo aos valores de equilíbrio. Quando uma solução assume um valor próximo a -1, ela tende assintoticamente a esse valor; $y = -1$ é um **equilíbrio estável**. O comportamento perto de $y = 2$ é exatamente o oposto: todas as soluções, exceto a solução de equilíbrio $y = 2$ *se afastam* dela à medida que x cresce. Chamamos $y = 2$ **equilíbrio instável**. Se a solução estiver *neste* valor, ela permanece, mas se não estiver exatamente nele, mesmo estando muito próxima, ela se afasta. (Algumas vezes, um valor de equilíbrio é instável porque uma solução se afasta dele apenas de um lado do ponto.)

Agora que sabemos o que procuramos, já podemos ver esse comportamento na reta de fase inicial. As setas se afastam de $y = 2$ e, à esquerda dele, apontam para $y = -1$.

Apresentamos, agora, vários exemplos de aplicações para os quais podemos esboçar uma família de curvas integrais para as equações diferenciais que os modelam usando o método de Exemplo 2.

FIGURA 9.13 Primeiro passo da construção da reta de fase para a lei de resfriamento de Newton do Exemplo 3. A temperatura sempre tende ao valor de equilíbrio (meio ambiente).

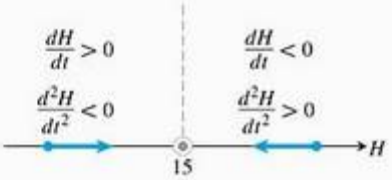


FIGURA 9.14 A reta de fase completa da lei de resfriamento de Newton (Exemplo 3).

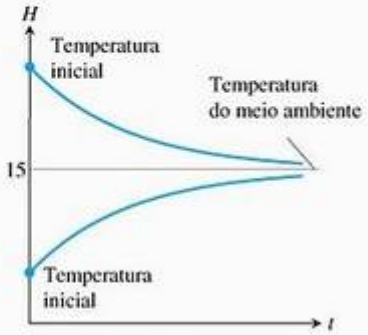


FIGURA 9.15 Temperatura *versus* tempo. Qualquer que seja a temperatura inicial, a temperatura do objeto $H(t)$ tende a 15 °C, a temperatura do meio ambiente.

Na Seção 7.2, resolvemos analiticamente a equação diferencial

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_S), \qquad k > 0$$

que modela a lei de resfriamento de Newton. Aqui, H é a temperatura (quantidade de calor) de um objeto no instante t, e H_S é a temperatura constante do meio ambiente. Nosso primeiro exemplo usa uma análise da reta de fase para entender o comportamento desse modelo de temperatura em função do tempo.

EXEMPLO 3 Sopa esfriando

O que acontece com a temperatura da sopa quando um prato de sopa quente é colocado sobre uma mesa em uma sala? Sabemos que a sopa esfria, mas como é uma curva típica da temperatura em função do tempo?

SOLUÇÃO Suponha que o meio ambiente tem temperatura constante, em graus Celsius, de 15 °C. Podemos então expressar a diferença de temperaturas como $H(t) - 15$. Assumindo que H é uma função derivável do tempo t, pela lei de resfriamento de Newton, existe uma constante de proporcionalidade $k > 0$ tal que

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - 15) \tag{1}$$

(*menos* k para fornecer uma derivada negativa quando $H > 15$).

Como $dH/dt = 0$ em $H = 15$, a temperatura de 15 °C é um valor de equilíbrio. Se $H > 15$, a Equação (1) nos diz que $(H - 15) > 0$ e $dH/dt < 0$. Se o objeto é mais quente que a sala ele esfriará. Analogamente, se $H < 15$, então $(H - 15) < 0$ e $dH/dt > 0$. Um objeto mais frio que a sala se aquecerá. Portanto, o comportamento descrito pela Equação (1) está de acordo com nossa intuição de como a temperatura deveria se comportar. Essas observações são capturadas na reta de fase inicial da Figura 9.13. O valor $H = 15$ é um equilíbrio estável.

Determinamos a concavidade das curvas integrais derivando os dois lados da Equação (1) em relação a t:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dH}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(-k(H - 15))$$

$$\frac{d^2H}{dt^2} = -k\frac{dH}{dt}$$

Como $-k$ é negativo, vemos que d^2H/dt^2 é positiva quando $dH/dt < 0$ e negativa quando $dH/dt > 0$. A Figura 9.14 adiciona essa informação à reta de fase.

A reta de fase completa mostra que se a temperatura do objeto estiver acima do valor de equilíbrio de 15 °C, o gráfico de $H(t)$ será decrescente e côncavo para cima. Se a temperatura estiver abaixo de 15 °C (a temperatura do meio ambiente), o gráfico de $H(t)$ será crescente e côncavo para baixo. Usamos essa informação para esboçar curvas integrais típicas (Figura 9.15).

Da curva integral superior na Figura 9.15, vemos que à medida que o objeto esfria, a taxa à qual ele esfria diminui, pois dH/dt se aproxima de zero. Essa observação está implícita na lei de resfriamento de Newton e contida na equação diferencial, mas o achatamento do gráfico fornece uma representação visual do fenômeno. A habilidade de discernir o comportamento físico por meio de gráficos é uma ferramenta poderosa para o entendimento de modelagens de problemas práticos.

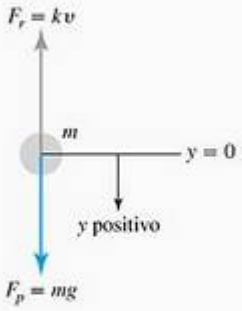


FIGURA 9.16 Um objeto caindo sob a influência da gravidade com força de resistência suposta como proporcional à velocidade.

FIGURA 9.17 Reta de fase inicial para o Exemplo 4.

EXEMPLO 4 Analisando a queda de um corpo que encontra força de resistência

Galileu e Newton observaram que a taxa de variação da quantidade de movimento adquirida por um objeto em movimento é igual à força líquida aplicada a ele. Em termos matemáticos,

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \tag{2}$$

onde F é a força, e m e v são a massa e a velocidade do objeto. Se m varia com o tempo, por exemplo, se o objeto for um foguete queimando combustível, o lado direito da Equação (2) se expande a

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

usando a regra do produto. Entretanto, em muitas situações, m é constante, e então $dm/dt = 0$, e a Equação (2) tem a forma simples

$$F = m\frac{dv}{dt} \quad \text{ou} \quad F = ma \tag{3}$$

conhecida como *segunda lei de movimento de Newton*.

Em queda livre, a aceleração constante exercida pela gravidade é denotada por g, e a única força agindo para baixo é

$$F_p = mg$$

a força de propulsão exercida pela gravidade. Entretanto, quando pensamos sobre um objeto verdadeiro caindo através do ar — por exemplo, uma moeda de uma grande altura ou mesmo um pára-quedista de uma altura maior ainda —, sabemos que, em algum ponto, a resistência do ar é um fator que interfere na velocidade da queda. Um modelo mais realista de queda livre incluiria a resistência do ar exibida como uma força F_r no diagrama esquemático da Figura 9.16.

Para velocidades bem abaixo da velocidade do som, experimentos físicos mostram que F_r é aproximadamente proporcional à velocidade do corpo. Portanto, a força líquida de um corpo em queda é

$$F = F_p - F_r$$

que fornece

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v \tag{4}$$

Podemos usar uma reta de fase para analisar as funções velocidade que são soluções dessa equação diferencial.

O ponto de equilíbrio, obtido tornando o lado direito da Equação (4) igual a zero é

$$v = \frac{mg}{k}$$

Se o corpo se mover inicialmente mais rápido que isso, dv/dt é negativa e o corpo cai mais devagar. Se o corpo se mover a uma velocidade inferior a mg/k, então $dv/dt > 0$, e a velocidade do corpo aumenta. Essas informações são resumidas no diagrama da reta de fase inicial na Figura 9.17.

Determinamos a concavidade das curvas integrais derivando os dois lados da Equação (4) em relação a t:

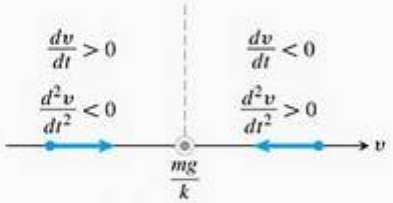


FIGURA 9.18 A reta de fase completa do Exemplo 4.

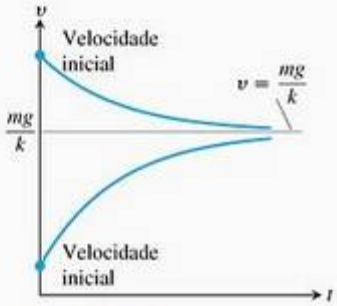


FIGURA 9.19 Curvas de velocidade típicas do Exemplo 4. O valor $v = mg/k$ é a velocidade terminal.

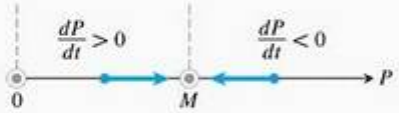


FIGURA 9.20 A reta de fase inicial para a Equação (6).

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(g - \frac{k}{m}v\right) = -\frac{k}{m}\frac{dv}{dt}$$

Vemos que $d^2v/dt^2 < 0$ quando $v < mg/k$ e $d^2v/dt^2 > 0$ quando $v > mg/k$. A Figura 9.18 adiciona essa informação à reta de fase. Observe a semelhança com a reta de fase para a lei de resfriamento de Newton (Figura 9.14). As curvas integrais são também semelhantes (Figura 9.19).

A Figura 9.19 exibe duas soluções típicas. Qualquer que seja a velocidade inicial, vemos que a velocidade do corpo tende ao valor limite $v = mg/k$. Esse valor, um ponto de equilíbrio estável, é chamado **velocidade terminal** do corpo. Os pára-quedistas podem variar sua velocidade de 95 mph a 180 mph mudando a quantidade da área do corpo que se opõe à queda.

EXEMPLO 5 Analisando o crescimento populacional em um ambiente limitante

Na Seção 7.2, examinamos o crescimento populacional usando o modelo de variação exponencial. Isto é, se P representa o número de indivíduos e se negligenciamos partidas e chegadas, então

$$\frac{dP}{dt} = kP \tag{5}$$

onde $k > 0$ é a taxa de nascimento menos a taxa de morte por indivíduo por unidade de tempo.

Como o ambiente natural tem apenas um número limitado de recursos para sustentar a vida, é razoável supor que apenas uma população máxima M pode ser acomodada. Quando a população se aproxima da **população-limite** ou **capacidade de carga**, os recursos tornam-se menos abundantes e a taxa de crescimento k decresce. Uma relação simples que exibe esse comportamento é

$$k = r(M - P)$$

onde $r > 0$ é uma constante. Observe que k decresce à medida que P aumenta em direção a M e k é negativa se P é maior que M. Substituindo $r(M - P)$ por k na Equação (5), obtemos a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P = rMP - rP^2 \tag{6}$$

O modelo dado pela Equação (6) é chamado **crescimento logístico**.

Podemos prever o comportamento populacional em relação ao tempo analisando a reta de fase da Equação (6). Os valores de equilíbrio são $P = M$ e $P = 0$, e podemos ver que $dP/dt > 0$ se $0 < P < M$ e $dP/dt < 0$ se $P > M$. Essas observações estão registradas na reta de fase na Figura 9.20.

Determinamos a concavidade das curvas de população derivando os dois lados da Equação (6) em relação a t:

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(rMP - rP^2)\\ &= rM\frac{dP}{dt} - 2rP\frac{dP}{dt}\\ &= r(M - 2P)\frac{dP}{dt}\end{aligned} \tag{7}$$

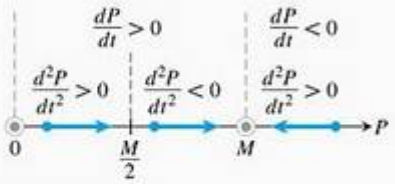


FIGURA 9.21 A reta de fase completa para o crescimento logístico (Equação 6).

Se $P = M/2$, então $d^2P/dt^2 = 0$. Se $P < M/2$, então $(M - 2P)$ e dP/dt são positivos e $d^2P/dt^2 > 0$. Se $M/2 < P < M$, então $(M - 2P) < 0$, $dP/dt > 0$ e $d^2P/dt^2 < 0$. Se $P > M$, então $(M - 2P)$ e dP/dt são ambos negativos, $d^2P/dt^2 > 0$. Adicionamos essa informação à reta de fase (Figura 9.21).

As retas $P = M/2$ e $P = M$ dividem o primeiro quadrante do plano tP em faixas horizontais nas quais conhecemos os sinais de dP/dt e d^2P/dt^2. Em cada faixa, sabemos como as curvas integrais sobem e descem e como elas se deformam à medida que o tempo passa. As retas de equilíbrio $P = 0$ e $P = M$ são curvas de população. As curvas de população que cruzam a reta $P = M/2$ têm nela um ponto de inflexão, que dá a elas uma forma **sigmóide** (curvada em duas direções como a letra **S**). A Figura 9.22 exibe duas curvas de população típicas.

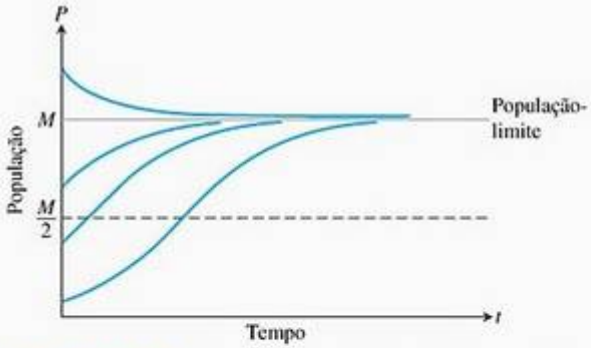


FIGURA 9.22 Curvas de população do Exemplo 5.

Exercícios 9.4

Retas de fase e curvas integrais

Nos exercícios 1–8,

(a) identifique os valores de equilíbrio. Quais são estáveis e quais são instáveis?

(b) construa a reta de fase. Identifique os sinais de y' e y''

(c) esboce várias curvas integrais.

1. $\frac{dy}{dx} = (y + 2)(y - 3)$
2. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$
3. $\frac{dy}{dx} = y^3 - y$
4. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y$
5. $y' = \sqrt{y}, \quad y > 0$
6. $y' = y - \sqrt{y}, \quad y > 0$
7. $y' = (y - 1)(y - 2)(y - 3)$
8. $y' = y^3 - y^2$

Modelos de crescimento populacional

As equações diferenciais autônomas nos exercícios 9–12 representam modelos de crescimento populacional. Em cada exercício, use a análise da reta de fase para esboçar curvas integrais $P(t)$, selecionando diversos valores $P(0)$ (como no Exemplo 5). Quais equilíbrios são estáveis e quais são instáveis?

9. $\frac{dP}{dt} = 1 - 2P$
10. $\frac{dP}{dt} = P(1 - 2P)$
11. $\frac{dP}{dt} = 2P(P - 3)$
12. $\frac{dP}{dt} = 3P(1 - P)\left(P - \frac{1}{2}\right)$

13. **Continuação catastrófica do Exemplo 5** Suponha que uma população saudável de algumas espécies esteja crescendo em um ambiente limitante e que a população atual seja P_0, razoavelmente próxima da capacidade de carga M_0. Você pode imaginar uma população de peixes vivendo em um lago de água doce em uma área selvagem. De repente uma catástrofe, como a erupção de um vulcão, contamina o lago e destrói uma parte significante do alimento e do oxigênio dos quais os peixes dependem. O resultado é um novo ambiente com uma capacidade de carga M_1, consideravelmente menor que M_0, e, na verdade, menor que a população atual P_0. Começando em algum instante antes da catástrofe, esboce uma curva "antes e depois" que mostre como a população de peixes responde à mudança no ambiente.

14. **Controlando uma população** O departamento de caça e pesca de certo estado está planejando emitir permissões de caça para controlar a população de cervos (um cervo por permissão). Sabe-se que se a população de cervos cai abaixo de certo nível m, então os cervos serão extintos. Também é sabido que se a população de cervos cresce acima da capacidade de carga M, então a população decrescerá de volta para M por causa de doença e má nutrição.

(a) Discuta se o modelo seguinte para a taxa de crescimento da população de cervos em função do tempo é razoável:

$$\frac{dP}{dt} = rP(M - P)(P - m)$$

onde P é a população de cervos e r é uma constante de proporcionalidade positiva. Inclua uma reta de fase.

(b) Explique por que esse modelo difere do modelo logístico $dP/dt = rP(M - P)$. Esse modelo é melhor que o modelo logístico?

(c) Mostre que se $P > M$ para todo t, então $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$.

(d) O que acontece se $P < m$ para todo t?

(e) Discuta as soluções da equação diferencial. Quais são os pontos de equilíbrio do modelo? Explique a dependência do valor do equilíbrio de P em relação aos valores iniciais de P. Quantas permissões devem ser emitidas?

Aplicações e exemplos

15. ***Skydiving*** Se um corpo de massa m que está caindo desde o repouso sob a ação da gravidade encontrar uma força de resistência do ar proporcional ao quadrado da velocidade, então a velocidade do corpo após t segundos da queda satisfaz a equação

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \qquad k > 0$$

onde k é uma constante que depende das propriedades aerodinâmicas do corpo e da densidade do ar. (Assumimos que a queda é muito curta para ser afetada pelas mudanças na resistência do ar.)

(a) Desenhe uma reta de fase para a equação.

(b) Esboce uma curva de velocidade típica.

(c) Para um pára-quedista de 160 libras de peso (mg = 160) e com o tempo em segundos e a distância em pés, um valor típico de k é 0,005. Qual é a velocidade terminal do pára-quedista?

16. **Distância proporcional a $\sqrt{v}$** Um corpo de massa m é disparado verticalmente para baixo com velocidade inicial v_0. Assuma que a força de resistência é proporcional à raiz quadrada da velocidade e determine a velocidade terminal por meio da análise gráfica.

17. **Velejando** Um barco à vela está se movendo ao longo de um caminho reto com o vento fornecendo uma força constante de 50 libras na direção do movimento. A outra única força agindo no barco é a resistência enquanto o barco se move na água. A força de resistência é numericamente igual a cinco vezes a velocidade do barco e a velocidade inicial é 1 pé/s. Qual é a velocidade máxima do barco sob a ação desse vento em pés por segundo?

18. **Difusão de informação** Os sociólogos reconhecem um fenômeno chamado *difusão social*, que é a disseminação de alguma informação, inovação tecnológica ou cultural, que se torna moda entre a população. Os membros da população podem ser divididos em duas classes: aqueles que têm a informação e aqueles que não a têm. Em uma população fixa cujo tamanho seja conhecido, é razoável supor que a taxa de difusão seja proporcional ao número de quem tem a informação vezes o número daqueles que ainda não a receberam. Se X denota a quantidade de indivíduos que têm a informação em uma população de N pessoas, então o modelo matemático para a difusão social é dado por

$$\frac{dX}{dt} = kX(N - X)$$

onde t representa o tempo em dias, e k é uma constante positiva.

(a) Discuta se o modelo é razoável.

(b) Construa uma reta de fase identificando os sinais de X' e X''.

(c) Esboce curvas integrais representativas.

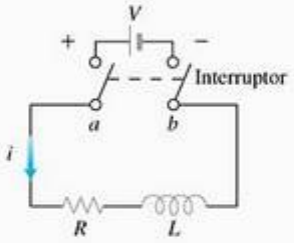
(d) Preveja o valor de X para o qual a informação está se disseminando mais rapidamente. Quantas pessoas vão de fato receber a informação?

19. **Corrente em um circuito *RL*** O diagrama a seguir representa um circuito elétrico cuja resistência total é uma constante R ohms e cuja auto-indutância, exibida como uma espiral, é L henries, também constante. Há um interruptor cujos terminais a e b podem ser ligados para conectar a uma fonte elétrica de V volts.

A Lei de Ohm, $V = Ri$, tem de ser modificada para tal circuito. A forma modificada é

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V$$

onde i é a intensidade de corrente em ampères, e t é o tempo em segundos. Resolvendo essa equação, podemos prever como a corrente circulará no circuito depois que o interruptor for ligado.



Use uma análise da reta de fase para esboçar a curva integral assumindo que o interruptor no circuito RL foi ligado no instante $t = 0$. O que acontece com a corrente quando $t \to \infty$? Esse valor é chamado *solução de estado estacionário*.

20. Uma pérola no xampu Suponha que uma pérola esteja afundando em um líquido denso, como o xampu, sujeita a uma força de atrito oposta à sua queda e proporcional à sua velocidade. Suponha também que exista a força de empuxo exercida pelo xampu. De acordo com o *Princípio de Arquimedes*, a força de empuxo é igual ao peso do líquido deslocado pela pérola. Usando m para a massa da pérola e P para a massa de xampu deslocada pela pérola enquanto ela desce, complete os passos a seguir.

(a) Desenhe um diagrama esquemático mostrando as forças agindo na pérola enquanto ela afunda como na Figura 9.16.

(b) Usando $v(t)$ para a velocidade da pérola como função do tempo t, escreva uma equação diferencial que modele a velocidade da pérola considerada um corpo em queda.

(c) Construa uma reta de fase mostrando os sinais de v' v''.

(d) Esboce curvas integrais típicas.

(e) Qual é a velocidade terminal da pérola?

9.5 Aplicações de equações diferenciais de primeira ordem

Vamos agora olhar três aplicações das equações diferenciais que estudamos. A primeira aplicação analisa um objeto se movendo ao longo de uma reta, sujeito a uma força oposta ao seu movimento. A segunda é um modelo de crescimento populacional que leva em conta fatores no ambiente que limitam o crescimento, como disponibilidade de alimento ou de recursos vitais. A última aplicação considera uma curva ou curvas que intersectam *ortogonalmente* (isto é, em ângulos retos) cada curva de uma segunda família de curvas.

Resistência proporcional à velocidade

Em alguns casos, é razoável supor que a resistência encontrada por um objeto que se move, tal como um carro rodando em ponto morto até parar, seja proporcional à sua velocidade. Quanto mais rápido o objeto se move, mais seu movimento adiante sofre resistência do pelo ar através do qual ele passa. Para descrever isso em termos matemáticos, supomos que o objeto tenha massa m e se mova ao longo de uma reta coordenada, com função posição s e velocidade v em um tempo t. Da segunda lei de movimento de Newton, a força de resistência oposta ao movimento é

$$\text{Força} = \text{massa} \times \text{aceleração} = m\frac{dv}{dt}$$

Podemos expressar a hipótese de que a força de resistência é proporcional à velocidade escrevendo

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \qquad \text{ou} \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v \qquad (k > 0)$$

Esta é uma equação diferencial separável que representa variação exponencial. A solução da equação com a condição inicial $v = v_0$ em $t = 0$ é (Seção 7.2)

$$v = v_0 e^{-(k/m)t} \tag{1}$$

O que podemos aprender com a Equação (1)? Podemos ver imediatamente que, quando m é bem grande, como a massa de um barco com 20.000 toneladas de minério no lago Erie, será necessário um longo tempo para que

sua velocidade se aproxime de zero (pois t tem de ser grande no expoente da equação para fazer que kt/m seja suficientemente grande e assim v ser pequena). Podemos aprender ainda mais se integrarmos a Equação (1) para determinar a posição s em função do tempo t.

Suponha que o corpo esteja deslizando até parar e que a única força que age nele seja a de resistência, que é proporcional à sua velocidade. Quão longe ele deslizará? Para descobrir, começamos com a Equação (1) e resolvemos o problema de valor inicial

$$\frac{ds}{dt} = v_0 e^{-(k/m)t}, \qquad s(0) = 0$$

Integrando em relação a t, obtemos

$$s = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + C$$

Substituindo $s = 0$ quando $t = 0$, obtemos

$$0 = -\frac{v_0 m}{k} + C \qquad \text{e} \qquad C = \frac{v_0 m}{k}$$

Portanto, a posição do corpo no instante t é

$$s(t) = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + \frac{v_0 m}{k} = \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t}) \tag{2}$$

Para determinar quanto o corpo deslizará, vamos calcular o limite de $s(t)$ quando $t \to \infty$. Como $-(k/m) < 0$, sabemos que $e^{-(k/m)t} \to 0$ quando $t \to \infty$, de modo que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} s(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t}) \\ &= \frac{v_0 m}{k}(1 - 0) = \frac{v_0 m}{k} \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Distância deslizada} = \frac{v_0 m}{k} \tag{3}$$

É claro que esta é uma situação ideal. Apenas em matemática o tempo pode estender-se ao infinito. O número $v_0 m/k$ é apenas um limite superior (ainda que um limite útil). Entretanto, é realidade ao menos que, se m for grande, será necessária uma grande quantidade de energia para parar o corpo. Esta é a razão pela qual os transatlânticos têm de ser levados ao cais por rebocadores. Qualquer navio convencional que entrasse em um porto com velocidade suficiente para manobrar se chocaria ao píer antes que pudesse parar.

No sistema inglês, quando o peso é medido em libras, a massa é medida em **slugs**. Logo,

$$\text{Libras} = \text{slugs} \times 32$$

assumindo que a aceleração da gravidade seja 32 pés/s^2.

EXEMPLO 1 Um esquiador deslizando

Para um esquiador de 192 libras de peso, o k na Equação (1) é aproximadamente 1/3 slug/s e $m = 192/32 = 6$ slugs. Quanto tempo levará para que a velocidade do esquiador passe de 11 pés/s (7,5 mph) para 1 pé/s? Que distância o esquiador vai deslizar até parar completamente?

SOLUÇÃO Respondemos a primeira pergunta obtendo t da Equação (1):

$$\begin{aligned} 11e^{-t/18} &= 1 \quad \text{Equação (1) com } k = 1/3,\ m = 6,\ v_0 = 11,\ v = 1 \\ e^{-t/18} &= 1/11 \\ -t/18 &= \ln(1/11) = -\ln 11 \\ t &= 18 \ln 11 \approx 43 \text{ s} \end{aligned}$$

Respondemos à segunda pergunta com a Equação (3):

$$\text{Distância deslizada} = \frac{v_0 m}{k} = \frac{11 \cdot 6}{1/3}$$

$$= 198 \text{ pés}$$

Modelando o crescimento populacional

Na Seção 7.2, modelamos o crescimento populacional com a lei de variação exponencial:

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(0) = P_0$$

onde P é a população no instante t, $k > 0$ é uma constante de crescimento e P_0 é o tamanho da população no instante $t = 0$. Na Seção 7.2, encontramos a solução $P = P_0e^{kt}$ para esse modelo. Entretanto, uma questão a ser levantada é: "Quanto esse modelo é bom?".

Para começar uma avaliação do modelo, observe que a equação diferencial do crescimento exponencial afirma que

$$\frac{dP/dt}{P} = k \tag{4}$$

é constante. Essa taxa é chamada **taxa de crescimento relativo**. Agora, a Tabela 9.4 fornece a população mundial referente à metade do ano para os anos 1980 a 1989. Supondo que $dt = 1$ e que $dP \approx \Delta P$, vemos pela tabela que a taxa de crescimento relativo na Equação (4) é aproximadamente a constante 0,017. Então, baseando-se nos dados da tabela com $t = 0$ representando 1980, $t = 1$ representando 1981 e assim por diante, a população mundial poderia ser modelada por

$$\text{Equação diferencial:} \quad \frac{dP}{dt} = 0{,}017\,P$$

$$\text{Condição inicial:} \quad P(0) = 4.454$$

TABELA 9.4 População mundial (referente a meados do ano)

Ano	População (milhões)	$\Delta P/P$
1980	4.454	76/4.454 ≈ 0,0171
1981	4.530	80/4.530 ≈ 0,0177
1982	4.610	80/4.610 ≈ 0,0174
1983	4.690	80/4.690 ≈ 0,0171
1984	4.770	81/4.770 ≈ 0,0170
1985	4.851	82/4.851 ≈ 0,0169
1986	4.933	85/4.933 ≈ 0,0172
1987	5.018	87/5.018 ≈ 0,0173
1988	5.105	85/5.105 ≈ 0,0167
1989	5.190	

Fonte: U.S. Bureau of Census (setembro de 1999): www.census.gov/ipc/www/worldpop.html.

A solução desse problema de valor inicial fornece a função população $P = 4.454e^{0{,}017t}$. Para meados de 1999 (então, $t = 19$), a solução prevê uma população de aproximadamente 6.152 milhões, ou 6,15 bilhões (Figura 9.23), que é maior

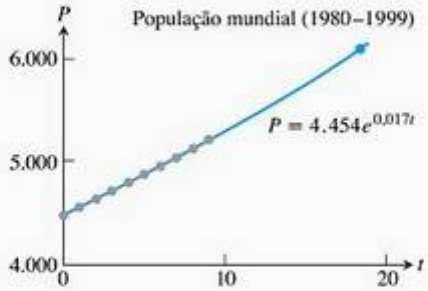


FIGURA 9.23 Observe que o valor da solução $P = 4.454e^{0,017t}$ é 6.152,16 quando $t = 19$, que é um pouco maior que a população real em 1999.

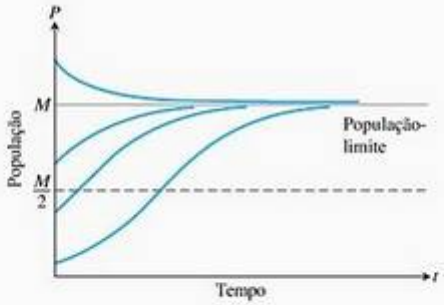


FIGURA 9.24 Curvas integrais do modelo populacional logístico $dP/dt = r(M - P)P$.

que a população real de 6.001 milhões, dada pelo U.S. Bureau of Census (Tabela 9.5). Vamos examinar dados mais recentes para ver se há uma mudança na taxa de crescimento.

A Tabela 9.5 exibe a população mundial para os anos 1990 a 2002. Por essa tabela, vemos que a taxa de crescimento relativo é positiva, mas decresce conforme a população cresce devido a fatores ambientais, econômicos e outros. Na média, a taxa de crescimento decresceu de aproximadamente 0,0003 por ano durante os anos 1990 a 2002. Isto é, o gráfico de k na Equação (4) está mais próximo de ser uma reta com coeficiente angular negativo $-r = -0,0003$. No Exemplo 5 da Seção 9.4, propusemos um modelo mais realista que é o **modelo de crescimento logístico**

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P \tag{5}$$

onde M é a população máxima ou **capacidade de carga**, que é a capacidade de sustentação do ambiente em um longo período. Comparando a Equação (5) com o modelo exponencial, vemos que $k = r(M - P)$ é uma função linear decrescente da população em vez de ser constante. As soluções gráficas do modelo logístico da Equação (5) foram obtidas na Seção 9.4 e estão exibidas (novamente) na Figura 9.24. Pelos gráficos, observamos que se $P < M$, então a população cresce em direção a M; se $P > M$, então a taxa de crescimento será negativa ($r > 0$, $M > 0$) e a população decresce.

TABELA 9.5 População recente do mundo

Ano	População (milhões)	$\Delta P/P$
1990	5.275	$84/5.275 \approx 0,0159$
1991	5.359	$84/5.359 \approx 0,0157$
1992	5.443	$81/5.443 \approx 0,0149$
1993	5.524	$81/5.524 \approx 0,0147$
1994	5.605	$80/5.605 \approx 0,0143$
1995	5.685	$79/5.685 \approx 0,0139$
1996	5.764	$80/5.764 \approx 0,0139$
1997	5.844	$79/5.844 \approx 0,0135$
1998	5.923	$78/5.923 \approx 0,0132$
1999	6.001	$78/6.001 \approx 0,0130$
2000	6.079	$73/6.079 \approx 0,0120$
2001	6.152	$76/6.152 \approx 0,0124$
2002	6.228	?
2003	?	

Fonte: U.S. Bureau of Census (setembro de 2003): www.census.gov/ipc/www/worldpop.htm.

EXEMPLO 2 Modelando uma população de ursos

Sabe-se que um parque nacional tem a capacidade de abrigar 100 ursos cinzentos, mas não mais. Dez ursos estão no parque no presente momento. Modelamos a população por uma equação diferencial logística com $r = 0,001$ (embora o modelo possa não dar resultados confiáveis para níveis populacionais muito pequenos).

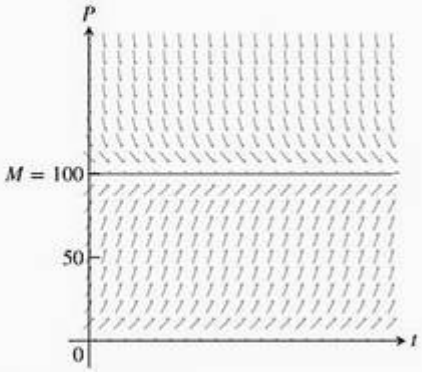


FIGURA 9.25 Um campo de direções da equação diferencial logística $dP/dt = 0{,}001(100 - P)P$ (Exemplo 2).

(a) Desenhe e descreva um campo de direções para a equação diferencial.

(b) Use o método de Euler com tamanho de passo $dt = 1$ para estimar o tamanho da população em 20 anos.

(c) Determine a solução analítica de crescimento logístico $P(t)$ e desenhe seu gráfico.

(d) Quando a população de ursos chega a 50?

SOLUÇÃO

(a) *Campo de direções.* A capacidade de carga é 100, de modo que $M = 100$. A solução que procuramos é uma solução da equação diferencial a seguir.

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}001(100 - P)P$$

A Figura 9.25 exibe um campo de direções para essa equação diferencial. Parece haver nesse campo uma assíntota horizontal em $P = 100$. As curvas integrais caem para esse nível por cima e sobem para ele por baixo.

(b) *Método de Euler.* Com tamanho de passo $dt = 1$, $t_0 = 0$, $P(0) = 10$ e

$$\frac{dP}{dt} = f(t, P) = 0{,}001(100 - P)P$$

obtemos as aproximações na Tabela 9.6, usando a fórmula iterativa

$$P_n = P_{n-1} + 0{,}001(100 - P_{n-1})P_{n-1}$$

TABELA 9.6 Solução de Euler de $dP/dt = 0{,}001(100 - P)P$, $P(0) = 10$, tamanho de passo $dt = 1$

t	P (Euler)	t	P (Euler)
0	10		
1	10,9	11	24,3629
2	11,8712	12	26,2056
3	12,9174	13	28,1395
4	14,0423	14	30,1616
5	15,2493	15	32,2680
6	16,5417	16	34,4536
7	17,9222	17	36,7119
8	19,3933	18	39,0353
9	20,9565	19	41,4151
10	22,6130	20	43,8414

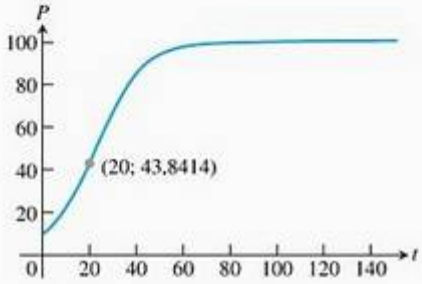


FIGURA 9.26 Aproximações de Euler da solução de $dP/dt = 0{,}001(100 - P)P$, $P(0) = 10$, tamanho de passo $dt = 1$.

Existem aproximadamente 44 ursos cinzentos após 20 anos. A Figura 9.26 exibe um gráfico da aproximação de Euler no intervalo $0 \le t \le 150$ com tamanho de passo $dt = 1$. Esse gráfico é parecido com os gráficos das curvas inferiores esboçados na Figura 9.24.

(c) *Solução analítica.* Podemos assumir que $t = 0$ quando a população de ursos for 10, de modo que $P(0) = 10$. O modelo logístico que procuramos é uma solução do problema de valor inicial a seguir.

$$\text{Equação diferencial: } \frac{dP}{dt} = 0{,}001(100 - P)P$$

$$\text{Condição inicial: } P(0) = 10$$

Para preparar para a integração, reescrevemos a equação diferencial na forma:

$$\frac{1}{P(100-P)}\frac{dP}{dt} = 0{,}001$$

Usando decomposição em frações parciais no lado esquerdo e multiplicando os dois lados por 100, obtemos

$$\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{100-P}\right)\frac{dP}{dt} = 0{,}1$$

$$\ln|P| - \ln|100-P| = 0{,}1t + C \qquad \text{Integre em relação a } t.$$

$$\ln\left|\frac{P}{100-P}\right| = 0{,}1t + C$$

$$\ln\left|\frac{100-P}{P}\right| = -0{,}1t - C \qquad \ln\frac{a}{b} = -\ln\frac{b}{a}$$

$$\left|\frac{100-P}{P}\right| = e^{-0{,}1t-C} \qquad \text{Exponencie.}$$

$$\frac{100-P}{P} = (\pm e^{-C})e^{-0{,}1t}$$

$$\frac{100}{P} - 1 = Ae^{-0{,}1t} \qquad \text{Faça } A = \pm e^{-C}.$$

$$P = \frac{100}{1+Ae^{-0{,}1t}} \qquad \text{Determine } P.$$

Esta é a solução geral da equação diferencial. Quando $t = 0$, $P = 10$ e obtemos

$$10 = \frac{100}{1+Ae^{0}}$$

$$1 + A = 10$$

$$A = 9$$

Logo, o modelo logístico é

$$P = \frac{100}{1+9e^{-0{,}1t}}$$

Seu gráfico (Figura 9.27) está sobreposto ao campo de direções da Figura 9.25.

(d) Quando a população de ursos chegará a 50? Desse modelo,

$$50 = \frac{100}{1+9e^{-0{,}1t}}$$

$$1 + 9e^{-0{,}1t} = 2$$

$$e^{-0{,}1t} = \frac{1}{9}$$

$$e^{0{,}1t} = 9$$

$$t = \frac{\ln 9}{0{,}1} \approx 22 \text{ anos}$$

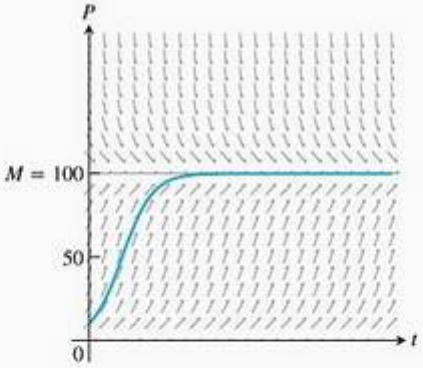


FIGURA 9.27 O gráfico de $P = \dfrac{100}{1+9e^{-0{,}1t}}$ sobreposto ao campo de direções da Figura 9.25 (Exemplo 2).

A solução da equação diferencial logística geral

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P$$

pode ser obtida como no Exemplo 2. No Exercício 10, pediremos que você demonstre que a solução é

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-rMt}}$$

O valor de A é determinado por uma condição inicial adequada.

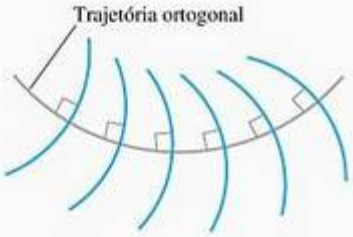


FIGURA 9.28 Uma trajetória ortogonal intercepta a família de curvas em ângulos retos.

Trajetórias ortogonais

Uma **trajetória ortogonal** a uma família de curvas é uma curva que intersecta cada curva da família em ângulos retos ou *ortogonalmente* (Figura 9.28). Por exemplo, cada reta que passa pela origem é uma trajetória ortogonal à família de círculos centrados na origem $x^2 + y^2 = a^2$ (Figura 9.29). Esses sistemas de curvas mutuamente ortogonais são particularmente importantes em problemas físicos relacionados a potencial elétrico, nos quais as curvas em uma família correspondem ao fluxo de corrente elétrica, e as da outra família correspondem a curvas com potencial constante. Elas também ocorrem em hidrodinâmica e em problemas de fluxo de calor.

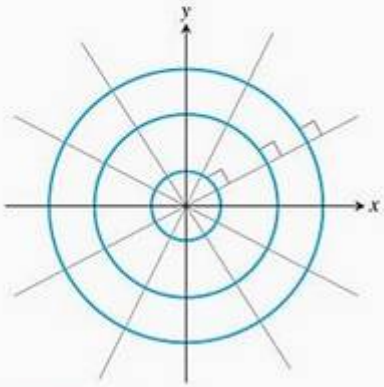


FIGURA 9.29 Toda reta que passa pela origem é ortogonal à família de círculos centrados na origem.

EXEMPLO 3 Determinando trajetórias ortogonais

Determine as trajetórias ortogonais à família de curvas $xy = a$, onde $a \neq 0$ é uma constante arbitrária.

SOLUÇÃO As curvas $xy = a$ formam uma família de hipérboles com assíntotas $y = \pm x$. Vamos encontrar primeiro o coeficiente angular de cada curva na família, ou seja, os valores de dy/dx. Derivando implicitamente $xy = a$, obtemos

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

Logo, o coeficiente angular da reta tangente em um ponto (x, y) da hipérbole $xy = a$ é $y' = -y/x$. Em uma trajetória ortogonal, o coeficiente angular tem de ser o oposto do inverso, isto é, x/y. Portanto, as trajetórias ortogonais têm de satisfazer

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Essa equação diferencial é separável e vamos resolvê-las como na Seção 9.1:

$$y\,dy = x\,dx \qquad \text{Separe as variáveis.}$$

$$\int y\,dy = \int x\,dx \qquad \text{Integre os dois lados.}$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y^2 - x^2 = b \tag{6}$$

onde $b = 2C$ é uma constante arbitrária. As trajetórias ortogonais são a família de hipérboles dada pela Equação (6) e esboçada na Figura 9.30.

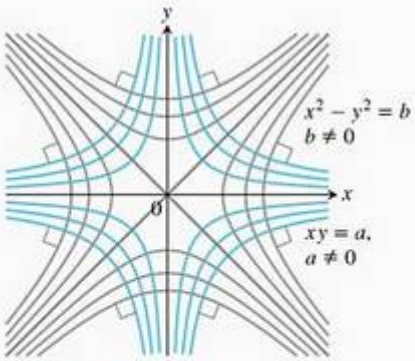


FIGURA 9.30 Cada curva é ortogonal a toda curva da outra família que ela encontra (Exemplo 3).

Exercícios 9.5

1. **Bicicleta deslizando** Um ciclista de 66 kg sobre uma bicicleta de 7 kg começa a deslizar no nível do solo a 9 m/s. O k na Equação (1) é aproximadamente 3,9 kg/s.
   (a) Que distância o ciclista deslizará antes de parar completamente?
   (b) Quanto tempo levará para a velocidade do ciclista cair para 1 m/s?

2. **Encouraçado deslizando** Suponha que um encouraçado de classe Iowa tem massa em torno de 51.000 toneladas métricas (51.000.000 kg) e um valor k na Equação (1) de aproximadamente 59.000 kg/s. Assuma que o navio perde potência quando está se movendo a uma velocidade de 9 m/s.
   (a) Que distância, aproximadamente, o navio deslizará antes de parar na água?
   (b) Após aproximadamente quanto tempo a velocidade do navio cairá para 1 m/s?

3. Os dados da Tabela 9.7 foram coletados com um detector de movimento e um CBL™ de Valerie Sharritts, uma professora de matemática da St. Francis DeSales High School, em Columbus, Ohio. A tabela mostra a distância s (em metros) em termos do tempo t (em segundos) que sua filha Ashley deslizou com patins quando tinha 10 anos. Determine um modelo para a posição de Ashley baseado nos dados da Tabela 9.7, na forma da Equação (2). Sua velocidade inicial era $v_0 = 2{,}75$ m/s, sua massa $m = 39{,}92$ kg (ela pesava 88 libras) e a distância total que ela deslizou foi de 4,91 m.

4. **Deslizando até parar** A Tabela 9.8 exibe a distância s (metros) em termos do tempo t (em segundos) que Kelly Schmitzer deslizou em patins. Determine um modelo para sua posição na forma da Equação (2). Sua velocidade inicial era $v_0 = 0{,}80$ m/s, sua massa $m = 49{,}90$ kg (110 libras) e a distância total que ela deslizou foi de 1,32 m.

5. **População de peixinhos** Um aquário de 2.000 galões não pode conter mais que 150 peixinhos. Seis peixinhos foram colocados no aquário. Assuma que a taxa de crescimento da população seja

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}0015\,(150 - P)P$$

   onde o tempo t é em semanas.
   (a) Determine uma fórmula para a população de peixinhos em termos de t.
   (b) Quanto tempo levará para a população de peixinhos chegar a 100? E a 125?

6. **População de gorilas** Certa reserva de animais não pode abrigar mais que 250 gorilas de planície. Sabe-se que 28 gorilas estavam na reserva em 1970. Assuma que a taxa de crescimento da população seja

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}0004\,(250 - P)P$$

   onde o tempo t é em anos.
   (a) Determine uma fórmula para a população de gorilas em função de t.
   (b) Depois de quanto tempo a população de gorilas vai atingir a capacidade de carga da reserva?

TABELA 9.7 Dados da patinação de Ashley Sharritts

t (s)	s (m)	t (s)	s (m)	t (s)	s (m)
0	0	2,24	3,05	4,48	4,77
0,16	0,31	2,40	3,22	4,64	4,82
0,32	0,57	2,56	3,38	4,80	4,84
0,48	0,80	2,72	3,52	4,96	4,86
0,64	1,05	2,88	3,67	5,12	4,88
0,80	1,28	3,04	3,82	5,28	4,89
0,96	1,50	3,20	3,96	5,44	4,90
1,12	1,72	3,36	4,08	5,60	4,90
1,28	1,93	3,52	4,18	5,76	4,91
1,44	2,09	3,68	4,31	5,92	4,90
1,60	2,30	3,84	4,41	6,08	4,91
1,76	2,53	4,00	4,52	6,24	4,90
1,92	2,73	4,16	4,63	6,40	4,91
2,08	2,89	4,32	4,69	6,56	4,91

TABELA 9.8 Dados da patinação de Kelly Schmitzer

t (s)	s (m)	t (s)	s (m)	t (s)	s (m)
0	0	1,5	0,89	3,1	1,30
0,1	0,07	1,7	0,97	3,3	1,31
0,3	0,22	1,9	1,05	3,5	1,32
0,5	0,36	2,1	1,11	3,7	1,32
0,7	0,49	2,3	1,17	3,9	1,32
0,9	0,60	2,5	1,22	4,1	1,32
1,1	0,71	2,7	1,25	4,3	1,32
1,3	0,81	2,9	1,28	4,5	1,32

7. **Viveiro de linguados no Pacífico** A quantidade de linguados em um viveiro no Oceano Pacífico tem sido modelada pela equação logística

$$\frac{dy}{dt} = r(M - y)y$$

onde $y(t)$é o peso total da população de linguados em quilogramas no tempo t (medido em anos), a capacidade de carga é estimada em $M = 8 \times 10^7$ kg e $r = 0{,}08875 \times 10^{-7}$ por ano.

(a) Se $y(0) = 1{,}6 \times 10^7$ kg, qual é o peso total da população de linguados após 1 ano?

(b) Quando o peso total de linguados no viveiro será de 4×10^7 kg?

8. **Modelo logístico modificado** Suponha que a equação diferencial logística do Exemplo 2 seja modificada para

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}001(100 - P)P - c$$

para alguma constante c.

(a) Explique o significado da constante c. Que valores de c seriam realistas para a população de ursos cinzentos (Exemplo 2)?

T (b) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial quando $c = 1$. Quais são as soluções de equilíbrio (Seção 9.4)?

(c) Desenhe várias curvas integrais em seu campo de direções do item (a). Descreva o que acontece com a população de ursos cinzentos para várias populações iniciais.

9. **Soluções exatas** Determine as soluções exatas dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$

(b) $y' = 0{,}5(400 - y)y, \quad y(0) = 2$

10. **Equação diferencial logística** Mostre que a solução da equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P$$

é

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-rMt}}$$

onde A é uma constante arbitrária.

11. **Solução catastrófica** Sejam k e P_0 constantes positivas.

(a) Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP^2, \quad P(0) = P_0$$

T (b) Mostre que o gráfico da solução do item (a) tem uma assíntota vertical em um valor positivo de t. Qual é esse valor de t?

12. **Populações extintas** Considere o modelo populacional

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)(P - m)$$

onde $r > 0$, M é o valor máximo de população sustentável e m é a população mínima abaixo da qual a espécie será extinta.

(a) Seja $m = 100$, $M = 1.200$ e assuma que $m < P < M$. Mostre que a equação diferencial pode ser reescrita na forma

$$\left[\frac{1}{1.200 - P} + \frac{1}{P - 100}\right]\frac{dP}{dt} = 1.100r$$

e resolva essa equação separável.

(b) Ache a solução do item (a) que satisfaz $P(0) = 300$.

(c) Resolva a equação diferencial com a restrição $m < P < M$.

Trajetórias ortogonais

Nos exercícios 13–18, determine as trajetórias ortogonais às famílias de curvas. Esboce vários membros de cada família.

13. $y = mx$
14. $y = cx^2$
15. $kx^2 + y^2 = 1$
16. $2x^2 + y^2 = c^2$
17. $y = ce^{-x}$
18. $y = e^{kx}$

19. Mostre que as curvas $2x^2 + 3y^2 = 5$ e $y^2 = x^3$ são ortogonais.

20. Determine a família de soluções da equação diferencial dada e a família de trajetórias ortogonais. Esboce as duas famílias.

(a) $x\,dx + y\,dy = 0$ (b) $x\,dy - 2y\,dx = 0$

21. Sejam a e b dois números positivos. Esboce as parábolas

$$y^2 = 4a^2 - 4ax \quad \text{e} \quad y^2 = 4b^2 + 4bx$$

no mesmo diagrama. Mostre que elas têm interseção no ponto $(a - b, \pm 2\sqrt{ab})$, e que toda "a-parábola" é ortogonal a toda "b-parábola".

Questões de revisão

1. O que é uma equação diferencial de primeira ordem? Quando uma função é solução de tal equação?

2. Como você resolve equações diferenciais de primeira ordem separáveis?

3. O que é a lei de mudança exponencial? Como ela pode ser deduzida de um problema de valor inicial? Quais são algumas aplicações dessa lei?

4. O que é o campo de direções de uma equação diferencial $y' = f(x, y)$? O que podemos aprender com esses campos?

5. Como você resolve equações diferenciais lineares de primeira ordem?

6. Descreva o método de Euler para resolver numericamente o problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Dê um exemplo. Comente a precisão do método. Por que você pode querer resolver um problema de valor inicial numericamente?

7. Descreva o método de Euler melhorado para resolver numericamente o problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Qual é a vantagem desse método em comparação ao método de Euler?

8. O que é uma equação diferencial autônoma? O que são valores de equilíbrio? Qual é a diferença entre eles e pontos críticos? O que é um valor de equilíbrio estável? E instável?

9. Como você constrói uma reta de fase para uma equação diferencial autônoma? Como a reta de fase lhe auxilia a esboçar um gráfico que descreve qualitativamente uma solução da equação diferencial?

10. Por que o modelo exponencial não é realista para prever o crescimento populacional em longo prazo? Como o modelo logístico corrige essa deficiência do modelo exponencial para o crescimento populacional? O que é a equação diferencial logística? Qual é a forma de sua solução? Descreva o gráfico da solução da equação logística.

Exercícios práticos

Nos exercícios 1–20, resolva a equação diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y}\cos^2\sqrt{y}$
2. $y' = \dfrac{3y(x+1)^2}{y-1}$
3. $yy' = \sec y^2 \sec^2 x$
4. $y\cos^2 x\, dy + \operatorname{sen} x\, dx = 0$
5. $y' = xe^y\sqrt{x-2}$
6. $y' = xye^{x^2}$
7. $\sec x\, dy + x\cos^2 y\, dx = 0$
8. $2x^2\, dx - 3\sqrt{y}\operatorname{cossec} x\, dy = 0$
9. $y' = \dfrac{e^y}{xy}$
10. $y' = xe^{x-y}\csc y$
11. $x(x-1)\, dy - y\, dx = 0$
12. $y' = (y^2-1)x^{-1}$
13. $2y' - y = xe^{x/2}$
14. $\dfrac{y'}{2} + y = e^{-x}\operatorname{sen} x$
15. $xy' + 2y = 1 - x^{-1}$
16. $xy' - y = 2x\ln x$
17. $(1+e^x)\, dy + (ye^x + e^{-x})\, dx = 0$
18. $e^{-x}\, dy + (e^{-x}y - 4x)\, dx = 0$
19. $(x + 3y^2)\, dy + y\, dx = 0$ (*Sugestão:* $d(xy) = y\, dx + x\, dy$)
20. $x\, dy + (3y - x^{-2}\cos x)\, dx = 0, \quad x > 0$

Problemas de valor inicial

Nos exercícios 21–30, resolva os problemas de valor inicial.

21. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x-y-2}, \quad y(0) = -2$
22. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\ln y}{1+x^2}, \quad y(0) = e^2$
23. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = x, \quad x > -1, \quad y(0) = 1$
24. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 1, \quad x > 0, \quad y(1) = 1$
25. $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2, \quad y(0) = -1$
26. $x\, dy + (y - \cos x)\, dx = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
27. $x\, dy - \left(y + \sqrt{y}\right) dx = 0, \quad y(1) = 1$
28. $y^{-2}\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}, \quad y(0) = 1$
29. $xy' + (x-2)y = 3x^3e^{-x}, \quad y(1) = 0$
30. $y\, dx + (3x - xy + 2)\, dy = 0, \quad y(2) = -1, \quad y < 0$

Método de Euler

Nos exercícios 31 e 32, use o método especificado para resolver o problema de valor inicial no intervalo dado, começando em x_0 e com $dx = 0{,}1$.

31. **Euler:** $y' = y + \cos x, \quad y(0) = 0; \quad 0 \le x \le 2; \quad x_0 = 0$

T

32. **Euler melhorado:** $y' = (2-y)(2x+3), \quad y(-3) = 1; \quad -3 \le x \le -1; \quad x_0 = -3$

T

Nos exercícios 33 e 34, use o método especificado com $dx = 0{,}05$ para estimar $y(c)$, onde y é uma solução do problema de valor inicial dado.

33. **Euler melhorado:**

T

$$c = 3; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x-2y}{x+1}, \quad y(0) = 1$$

34. **Euler:**

T

$$c = 4; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2y + 1}{x}, \quad y(1) = 1$$

Nos exercícios 35 e 36, use o método especificado para resolver o problema de valor inicial graficamente, começando em $x_0 = 0$ e com

(a) $dx = 0{,}1$ (b) $dx = -0{,}1$

35. Euler:

T
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{x+y+2}}, \quad y(0) = -2$$

36. Euler melhorado:

T
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y}{e^y + x}, \quad y(0) = 0$$

Campos de direções

Nos exercícios 37–40, esboce uma parte do campo de direções da equação. Adicione então ao seu desenho a curva integral que passa pelo ponto $P(1, -1)$. Use o método de Euler com $x_0 = 1$ e $dx = 0{,}2$ para estimar $y(2)$. Arredonde suas respostas até a quarta casa decimal. Determine o valor exato de $y(2)$ para comparar.

37. $y' = x$
38. $y' = 1/x$
39. $y' = xy$
40. $y' = 1/y$

Equações diferenciais autônomas e retas de fase

Nos exercícios 41 e 42,

(a) Identifique os valores de equilíbrio. Quais são estáveis e quais são instáveis?

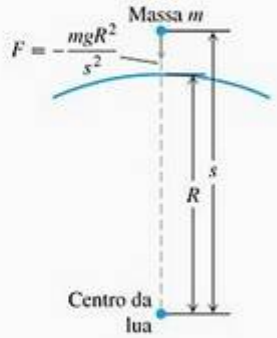
(b) Construa uma reta de fase. Identifique os sinais de y' e y''.

(c) Esboce uma seleção representativa de curvas integrais.

41. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 1$
42. $\dfrac{dy}{dx} = y - y^2$

Aplicações

43. **Velocidade de escape** A força de atração gravitacional F exercida por uma lua sem ar em um corpo de massa m a uma distância s do centro da lua é dada pela equação $F = -mg\,R^2 s^{-2}$, onde g é a aceleração da gravidade na superfície da lua e R é o raio da lua (veja a figura a seguir). A força F é negativa, pois ela age no sentido em que s decresce.



(a) Suponha que o corpo seja lançado verticalmente para cima em relação à da superfície da lua com velocidade inicial v_0 em $t = 0$. Use a segunda lei de Newton, $F = ma$, para mostrar que a velocidade do corpo na posição s é dada pela equação

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + v_0^2 - 2gR$$

Logo, a velocidade se mantém positiva desde que $v_0 \geq \sqrt{2gR}$. A velocidade $v_0 = \sqrt{2gR}$ é a **velocidade de escape** da lua. Um corpo lançado para cima com essa velocidade ou maior do que ela escapará da força gravitacional da lua.

(b) Mostre que se $v_0 = \sqrt{2gR}$, então

$$s = R\left(1 + \frac{3v_0}{2R}t\right)^{2/3}$$

44. **Deslizando até parar** A Tabela 9.9 mostra a distância s (metros) que Johnathon Krueger deslizou sobre patins em t segundos. Determine um modelo para a posição dele, na forma da Equação (2) da Seção 9.5. A velocidade inicial foi $v_0 = 0{,}86$ m/s, sua massa 30,84 kg (ele pesava 68 libras) e a distância total que ele deslizou foi 0,97 m.

TABELA 9.9 Dados da patinação de Johnathon Krueger

t (s)	s (m)	t (s)	s (m)	t (s)	s (m)
0	0	0,93	0,61	1,86	0,93
0,13	0,08	1,06	0,68	2,00	0,94
0,27	0,19	1,20	0,74	2,13	0,95
0,40	0,28	1,33	0,79	2,26	0,96
0,53	0,36	1,46	0,83	2,39	0,96
0,67	0,45	1,60	0,87	2,53	0,97
0,80	0,53	1,73	0,90	2,66	0,97

Exercícios adicionais

Teoria e aplicações

1. **Transporte por uma membrana celular** Sob algumas condições, o resultado do movimento de uma substância dissolvida através de uma membrana celular é descrito pela equação

$$\frac{dy}{dt} = k\frac{A}{V}(c - y)$$

Nessa equação, y é a concentração da substância dentro da célula e dy/dt é a taxa à qual y varia com o tempo. As letras k, A, V e c denotam constantes, sendo k o *coeficiente de permeabilidade* (uma propriedade da membrana), A a área da superfície, V o volume da célula e c a concentração da substância fora da célula. A equação diz que a taxa à qual a concentração varia dentro da célula é proporcional à diferença entre ela e a concentração fora da célula.

(a) Determine a solução $y(t)$ da equação, usando $y(0) = y_0$.

(b) Determine a concentração de estado estacionário, $\lim_{t\to\infty} y(t)$. (Baseado em *Some mathematical models in biology*, editado por R. M. Thrall, J. A. Mortimer, K. R. Rebman e R. F. Baum, rev. ed., dez. 1967, PB-202364, p. 101–103; distribuído por N.T.I.S., U.S. Department of Commerce.)

2. **Mistura com oxigênio** Por um tubo, o oxigênio flui para dentro de um frasco de 1 litro cheio de ar. A mistura de oxigênio com o ar (considerada bem agitada) escapa do frasco por outro tubo. Admitindo que o ar contém 21% de oxigênio, que porcentagem de oxigênio o frasco conterá após terem passado 5 l de oxigênio pelo tubo de entrada?

3. **Dióxido de carbono em uma sala de aula** Se em média uma pessoa respira 20 vezes por minuto exalando de cada vez 100 pol^3 de ar contendo 4% de dióxido de carbono, determine a porcentagem de dióxido de carbono no ar em uma sala fechada de 10.000 pés^3, 1 hora depois de uma aula com 30 estudantes ter começado. Admita que o ar seja puro no início, que os ventiladores admitem 1.000 pés^3 de ar puro por minuto e que o ar puro contenha 0,04% de dióxido de carbono.

4. **Peso de um foguete** Se uma força externa F age sobre um sistema cuja massa varia com o tempo, a lei do movimento de Newton é

$$\frac{d(mv)}{dt} = F + (v + u)\frac{dm}{dt}$$

Nessa equação, m é a massa do sistema no instante t, v é sua velocidade, e $v + u$ é a velocidade da massa que está entrando (ou saindo) do sistema à taxa dm/dt. Suponha que um foguete de massa inicial m_0 comece em repouso, mas é lançado para cima disparando parte de sua massa diretamente para trás à taxa constante $dm/dt = -b$ unidades por segundo e com velocidade constante relativamente ao foguete $u = -c$. A única força externa agindo no foguete é $F = -mg$ devido à gravidade. Sob essas hipóteses, mostre que a altura do foguete acima do solo após t segundos (t pequeno em comparação com m_0/b) é

$$y = c\left[t + \frac{m_0 - bt}{b}\ln\frac{m_0 - bt}{m_0}\right] - \frac{1}{2}gt^2$$

5. (a) Assuma que $P(x)$ e $Q(x)$ sejam funções contínuas no intervalo $[a, b]$. Use o Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1) para mostrar que toda função y que satisfaz a equação

$$v(x)y = \int v(x)Q(x)\,dx + C$$

para $v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ é uma solução da equação linear de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

(b) Se $C = y_0 v(x_0) - \int_{x_0}^{x} v(t)Q(t)\,dt$, então mostre que toda solução y do item (a) satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$.

6. (*Continuação do Exercício 5*) Assuma as hipóteses do Exercício 5 e assuma que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação linear de primeira ordem que satisfazem a condição inicial $y(x_0) = y_0$.

(a) Verifique que $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ é solução do problema de valor inicial

$$y' + P(x)y = 0, \quad y(x_0) = 0$$

(b) Para o fator integrante $v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$, mostre que

$$\frac{d}{dx}(v(x)[y_1(x) - y_2(x)]) = 0$$

Conclua que $v(x)[y_1(x) - y_2(x)] \equiv$ constante.

(c) Do item (a), temos que $y_1(x_0) - y_2(x_0) = 0$. Como $v(x) > 0$ para $a < x < b$, use o item (b) para provar que $y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$ no intervalo (a, b). Portanto $y_1(x) = y_2(x)$ para todo $a < x < b$.

Exercícios avançados

1. O gráfico de certa função contínua crescente $y = f(x)$ passa pela origem. Para cada ponto $(x, f(x))$, com x positivo, considere o retângulo com vértices opostos na origem e neste ponto e lados paralelos aos eixos coordenados. O gráfico desta f divide esses retângulos em duas regiões, uma das quais tem área n vezes a da outra, em que n é um inteiro positivo. Determine as possíveis funções f.

Nos exercícios 2 e 3, as equações diferenciais de segunda ordem podem ser reduzidas a uma equação de primeira ordem pela substituição $v = y'$. Encontre as soluções pedidas.

2. $y''/y' = 3$, com condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
3. $y''.\ y' = x\,(x + 1)$, com condições iniciais $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
4. Uma solução da equação diferencial y' sen $2x = 2y + 2 \cos x$ permanece limitada quando $x \to \pi/2$. Encontre essa solução. O que ocorre no ponto $x = \pi/2$? Por que existem soluções que não são limitadas?

Nos exercícios 5 e 6, encontre as equações diferenciais das famílias de curvas dadas. Encontre as equações das famílias correspondentes de curvas ortogonais e determine-as explicitamente, se possível. Use um SAC para traçar cada família de curvas junto com sua família ortogonal.

5. $y = x \cos (x + c)$, em que c é uma constante real.
6. Todos os círculos com centro na reta $x = y$, tangentes aos eixos coordenados.
7. A equação $y' + P\,y = Q\,y \ln y$ não é uma equação linear e não pode ser resolvida pelos métodos discutidos neste capítulo. Mostre que a substituição $v = \ln y$ transforma a equação anterior em uma equação linear.
8. Utilize o método do Exercício 7 para resolver $xy' = 2x^2\,y + y \ln y$.
9. A equação de Riccati $y' = p(x) + q(x)\,y + r(x)\,y^2$ não é linear e, em geral, não pode ser resolvida por métodos elementares. Entretanto, se for conhecida uma solução particular $y_1(x)$ da equação será possível encontrar sua solução geral. Mostre que a solução geral tem a forma $y(x) = y_1(x) + u\,(x)$, onde $u(x)$ é solução de uma equação de Bernoulli (veja os exercícios da Seção 9.2).
10. Use o método do Exercício 9 para resolver $y' = (1 - y)(2x + y)$. (*Sugestão*: $y_1\,(x) \equiv 1$ é uma solução.)
11. Identifique os pontos de equilíbrio de $y' = y(1 - y^3)$. Quais são estáveis e quais são instáveis? Trace um esboço de diversas curvas soluções. Em particular, trace um esboço da solução que satisfaz $y(0) = 0{,}1$.
12. Aplique o método de Euler para encontrar uma solução aproximada da equação do exercício anterior que satisfaça $y(0) = 0{,}1$, usando o passo $h = 0{,}1$, até $x = 3$. O que acontece com a solução aproximada? Você saberia explicar por quê? Use um SAC ou uma calculadora para seus cálculos.

Projetos de aplicação da tecnologia

MÓDULO MATHEMATICA/MAPLE

Dosagens de drogas: elas são eficazes? Elas são seguras?

Formule e resolva um modelo de valor inicial para a absorção de droga na corrente sangüínea.

MÓDULO MATHEMATICA/MAPLE

Equações diferenciais de primeira ordem e campos de direções

Esboce campos de direções e curvas integrais com diversas condições iniciais para equações diferenciais de primeira ordem selecionadas.

Apêndice A

A.1 Indução matemática

Pode-se provar que muitas fórmulas, como

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

são válidas para qualquer n número positivo ao se aplicar um axioma chamado *princípio da indução matemática*. Uma demonstração que empregue esse axioma denomina-se *demonstração por indução matemática ou demonstração por indução.*

Os passos envolvidos na demonstração de uma fórmula por indução são os seguintes:

1. Verifique que a fórmula é verdadeira para $n = 1$.
2. Mostre que, se a fórmula é verdadeira para qualquer número inteiro positivo $n = k$, então ela é verdadeira para o próximo inteiro, $n = k + 1$.

Segundo o axioma da indução, quando esses passos estiverem concluídos, a fórmula será válida para todos os n números inteiros positivos. De acordo com o Passo 1, ela é válida para $n = 1$. De acordo com o Passo 2, ela é válida para $n = 2$, para $n = 3$, para $n = 4$ e assim por diante. Se a primeira peça de dominó cair e a k-ésima peça de dominó sempre tocar a $(k + 1)$-ésima quando cair, todas as peças de dominó cairão.

De outro ponto de vista, suponha que tenhamos uma seqüência de sentenças $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, uma para cada inteiro positivo. Suponha também que possamos demonstrar que a pressuposição de que uma sentença seja verdadeira implica que a sentença seguinte também seja. Por fim, suponha que possamos demonstrar que S_1 seja verdadeira. Com isso, podemos concluir que as sentenças de S_1 em diante são verdadeiras.

EXEMPLO 1 Use a indução matemática para demonstrar que, para cada n número positivo,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUÇÃO Obtemos a resposta seguindo os dois passos descritos anteriormente.

1. A fórmula é verdadeira para $n = 1$, pois

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

2. Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, ela também o é para $n = k + 1$? A resposta é sim. Eis o porquê:

se
$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

então

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

A última expressão na seqüência de igualdades é $n(n+1)/2$ para $n = (k+1)$.

O princípio da indução matemática nos garante agora que a fórmula original é válida para todos os n inteiros positivos.

No Exemplo 4 da Seção 5.2, damos outra prova de que essa fórmula resulta na soma dos primeiros n inteiros. No entanto, a prova por indução matemática é mais geral. Ela pode ser usada para determinar as somas dos quadrados e cubos dos primeiros n inteiros (exercícios 9 e 10). Acompanhe outro exemplo.

EXEMPLO 2 Demonstre por indução matemática que, para todos os n números positivos inteiros

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

SOLUÇÃO Chegamos à demonstração executando os dois passos da indução matemática.

1. A fórmula é verdadeira para $n = 1$, pois

$$\frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2^1}$$

2. Se

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

então

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1 \cdot 2}{2^k \cdot 2} + \frac{1}{2^{k+1}}$$
$$= 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

Logo, a fórmula original é válida para $n = (k+1)$ toda vez que for válida para $n = k$.

Com esses passos verificados, o princípio da indução matemática garante que a fórmula seja válida para todos os n números inteiros positivos.

Outros números inteiros iniciais

Em vez de começar com $n = 1$, alguns argumentos de indução começam com outros números inteiros. Os passos para esses argumentos são os seguintes:

1. Verifique se a fórmula é verdadeira para $n = n_1$ (o primeiro inteiro apropriado).
2. Demonstre que, se a fórmula é válida para qualquer inteiro $n = k \geq n_1$, então será verdadeira também para $n = (k + 1)$.

Se esses passos forem seguidos, o princípio da indução matemática garantirá a fórmula para todo $n \geq n_1$.

EXEMPLO 3 Demonstre que $n! > 3^n$ se n for grande o suficiente.

SOLUÇÃO Quanto é "grande o suficiente"? Experimentemos:

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	2	6	24	120	720	5.040
3^n	3	9	27	81	243	729	2.187

Parece que $n! > 3^n$ para $n \geq 7$. Para termos certeza, aplicaremos a indução matemática. Tomamos $n_1 = 7$ no Passo 1 e tentemos o Passo 2.

Suponha que $k! > 3^k$ para algum $k \geq 7$. Então

$$(k + 1)! = (k + 1)(k!) > (k + 1)3^k > 7 \cdot 3^k > 3^{k+1}$$

Logo, para $k \geq 7$,

$$k! > 3^k \quad \text{implica} \quad (k + 1)! > 3^{k+1}$$

O princípio da indução matemática garante que $n! \geq 3^n$ para todo $n \geq 7$.

Exercícios A.1

1. Assumindo que a desigualdade triangular $|a + b| \leq |a| + |b|$ seja válida para dois números quaisquer a e b, demonstre que
$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$
para quaisquer n números.

2. Demonstre que, se $r \neq 1$, então
$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$
para qualquer n inteiro positivo.

3. Utilizando a regra do produto, $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$, e o fato de que $\frac{d}{dx}(x) = 1$, demonstre que $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ para qualquer n inteiro positivo.

4. Suponha que uma função $f(x)$ possua a propriedade de que $f(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para quaisquer números positivos x_1 e x_2. Demonstre que
$$f(x_1x_2 \quad x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \quad + f(x_n)$$
para o produto de quaisquer n números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

5. Demonstre que
$$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$$
para qualquer n inteiro positivo.

6. Demonstre que $n! > n^3$ se n for grande o bastante.

7. Demonstre que $2^n > n^2$ se n for grande o bastante.

8. Demonstre que $2^n \geq 18$ para $n \geq -3$.

9. **Soma de quadrados** Demonstre que a soma dos quadrados dos primeiros n inteiros positivos é
$$\frac{n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n + 1)}{3}$$

10. **Soma de cubos** Demonstre que a soma dos cubos dos primeiros n inteiros positivos é $(n(n + 1)/2)^2$.

11. **Regras para somas finitas** Demonstre que as seguintes regras para somas finitas são verdadeiras para todo inteiro positivo n.

(a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

(b) $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

(c) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$ (Qualquer número c)

(d) $\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot c$ (Se a_k tiver o valor constante c)

12. Demonstre que $|x^n| = |x|^n$ para todo n número positivo inteiro e para todo número real x.

A.2 Provas dos teoremas dos limites

Este apêndice demonstra as partes 2 a 5 do Teorema 1 e o Teorema 4 da Seção 2.2.

Teorema 1 Leis dos limites

Se L, M, c e k são números reais e

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} g(x) = M$, então

1. *Regra da soma:* $\lim_{x \to c} \left(f(x) + g(x)\right) = L + M$
2. *Regra da diferença:* $\lim_{x \to c} \left(f(x) - g(x)\right) = L - M$
3. *Regra do produto:* $\lim_{x \to c} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = L \cdot M$
4. *Regra da multiplicação por constante:* $\lim_{x \to c} \left(kf(x)\right) = kL$ (qualquer número k)
5. *Regra do quociente:* $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, se $M \neq 0$
6. *Regra da potenciação:* Se r e s são inteiros e não têm um fator comum, e se $s \neq 0$, então
$$\lim_{x \to c} \left(f(x)\right)^{r/s} = L^{r/s}$$
desde que $L^{r/s}$ seja um número real.
(Se s for par, presumimos que $L > 0$.)

Provamos a regra da soma na Seção 2.3; a regra da potenciação, por sua vez, é provada em livros mais avançados. Obtemos a regra da diferença substituindo $g(x)$ por $-g(x)$ e M por $-M$ na regra da soma. A regra da multiplicação por constante é o caso especial $g(x) = k$ da regra do produto. Assim, sobram apenas as regras do produto e do quociente.

PROVA DA REGRA DO PRODUTO DE LIMITES Demonstraremos que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para todo x na interseção D dos domínios de f e g,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)g(x) - LM| < \epsilon$$

Suponha então que ϵ seja um número positivo e escreva $f(x)$ e $g(x)$ como

$$f(x) = L + (f(x) - L), \qquad g(x) = M + (g(x) - M)$$

Multiplique essas expressões e subtraia LM:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) - LM &= (L + (f(x) - L))(M + (g(x) - M)) - LM \\ &= LM + L(g(x) - M) + M(f(x) - L) \\ &\quad + (f(x) - L)(g(x) - M) - LM \\ &= L(g(x) - M) + M(f(x) - L) + (f(x) - L)(g(x) - M) \qquad (1) \end{aligned}$$

Uma vez que f e g possuem limites L e M conforme $x \to c$, existem números positivos δ_1, δ_2, δ_3 e δ_4 tais que para qualquer x em D

$$\begin{aligned}
0 < |x - c| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - L| < \sqrt{\epsilon/3} \\
0 < |x - c| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad |g(x) - M| < \sqrt{\epsilon/3} \\
0 < |x - c| < \delta_3 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon/(3(1 + |M|)) \\
0 < |x - c| < \delta_4 \quad &\Rightarrow \quad |g(x) - M| < \epsilon/(3(1 + |L|))
\end{aligned} \tag{2}$$

Caso tomemos δ como o menor dos números de δ_1 a δ_4, as desigualdades do lado direito de (2) valerão simultaneamente para $0 < |x - c| < \delta$. Portanto, para qualquer x em D, $0 < |x - c| < \delta$ implica

$$\begin{aligned}
&|f(x) \cdot g(x) - LM| \quad \text{Desigualdade triangular aplicada à Equação (1).} \\
&\le |L||g(x) - M| + |M||f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M| \\
&\le (1 + |L|)|g(x) - M| + (1 + |M|)|f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\sqrt{\frac{\epsilon}{3}} = \epsilon. \quad \text{Valores da Equação (2).}
\end{aligned}$$

Isso conclui a prova da regra do produto de limites.

PROVA DA REGRA DO QUOCIENTE DE LIMITES Demonstraremos que $\lim_{x \to c} (1/g(x)) = 1/M$. Podemos concluir a partir da regra do produto de limites que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

Seja $\epsilon > 0$. Para demonstrar que $\lim_{x \to c} (1/g(x)) = 1/M$, precisaremos mostrar que existe um $\delta > 0$ tal que para todo x

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \epsilon$$

Uma vez que $|M| > 0$, existe um número positivo δ_1 tal que para todo x

$$0 < |x - c| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \frac{M}{2} \tag{3}$$

Para quaisquer números A e B, pode-se mostrar que $|A| - |B| \le |A - B|$ e $|B| - |A| \le |A - B|$, a partir do que se segue que $||A| - |B|| \le |A - B|$. Sendo $A = g(x)$ e $B = M$, temos

$$||g(x)| - |M|| \le |g(x) - M|$$

que pode ser combinada com a desigualdade à direita da Equação (3) para obtermos:

$$\begin{aligned}
||g(x)| - |M|| &< \frac{|M|}{2} \\
-\frac{|M|}{2} < |g(x)| - |M| &< \frac{|M|}{2} \\
\frac{|M|}{2} < |g(x)| &< \frac{3|M|}{2} \\
|M| < 2|g(x)| &< 3|M| \\
\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} &< \frac{3}{|g(x)|}
\end{aligned} \tag{4}$$

Portanto, $0 < |x - c| < \delta_1$ implica que

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - g(x)}{Mg(x)}\right| \le \frac{1}{|M|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot |M - g(x)|$$

$$< \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} \cdot |M - g(x)| \quad \text{Desigualdade (4)} \qquad (5)$$

Uma vez que $(1/2)|M|^2\,\epsilon > 0$, existe um número $\delta_2 > 0$ tal que para todo x

$$0 < |x - c| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |M - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}|M|^2 \qquad (6)$$

Caso tomemos δ como o menor de δ_1 e δ_2, tanto a conclusão da Equação (5) como a da (6) são verdadeiras para qualquer x tal que $0 < |x - c| < \delta$. Ao combinarmos essas conclusões, temos:

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon$$

Isso conclui a prova da regra do quociente de limites.

Teorema 4 **Teorema do confronto**
Suponha que $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para qualquer x em dado intervalo aberto I contendo c, exceto possivelmente quando $x = c$. Suponha também que $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$. Então, $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

PROVA PARA LIMITES À DIREITA Suponha que $\lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{x\to c^+} h(x) = L$. Então, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para qualquer x, o intervalo $c < x < c + \delta$ está contido em I e a desigualdade implica que

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \qquad \text{e} \qquad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$$

Essas desigualdades, combinadas com $g(x) \le f(x) \le h(x)$, fornecem

$$\begin{aligned} L - \epsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) &< L + \epsilon \\ L - \epsilon < f(x) &< L + \epsilon \\ -\epsilon < f(x) - L &< \epsilon \end{aligned}$$

Portanto, para qualquer x, a desigualdade $c < x < c + \delta$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$.

PROVA PARA LIMITES À ESQUERDA Suponha que

$$\lim_{x\to c^-} g(x) = \lim_{x\to c^-} h(x) = L$$

Então, para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, para qualquer x o intervalo $c - \delta < x < c$ está contido em I e a desigualdade implica que

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \qquad \text{e} \qquad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$$

Concluímos, como antes, que, para qualquer x, $c - \delta < x < c$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$.

PROVA PARA LIMITES BILATERAIS Se $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, então tanto $g(x)$ como $h(x)$ tendem a L quando $x \to c^+$ e $x \to c^-$; portanto $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ e $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$. Dessa maneira, $\lim_{x\to c} f(x)$ existe e é igual a L.

Exercícios A.2

1. Suponha que as funções $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ possuam limites L_1, L_2 e L_3, respectivamente, quando $x \to c$. Mostre que sua soma possui limite $L_1 + L_2 + L_3$. Utilize indução matemática (Apêndice A.1) para generalizar esse resultado para a soma de qualquer número finito de funções.

2. Utilize indução matemática e a regra do produto de limites do Teorema 1 para mostrar que, caso as funções $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ possuam limites $L_1, L_2, \ldots, L_n$ quando $x \to c$, então
$$\lim_{x \to c} f_1(x) f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \cdots \cdot L_n$$

3. Use o fato de que $\lim_{x \to c} x = c$ e o resultado do Exercício 2 pa mostrar que $\lim_{x \to c} x^n = c^n$ para qualquer inteiro $n > 1$.

4. **Limites de polinômios** Use o fato de que $\lim_{x \to c} (k) = k$ para qualquer k número juntamente com os resultados dos exercícios 1 e 3 para mostrar que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ para qualquer função polinomial
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \quad + a_1 x + a_0.$$

5. **Limites de funções racionais** Use o Teorema 1 e o resultado do Exercício 4 para provar que, se $f(x)$ e $g(x)$ são funções polinomiais e $g(c) \neq 0$, então
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}$$

6. **Compostas de funções contínuas** A Figura A.1 apresenta o diagrama para a demonstração de que a composta de duas funções contínuas é contínua. Reconstrua a demonstração a partir do diagrama. A afirmação a ser demonstrada é: se f é contínua em $x = c$ e g é contínua em $f(c)$, então $g \circ f$ é contínua em c.
Suponha que c seja um ponto interior do domínio de f e que $f(c)$ seja um ponto interior do domínio de g. Isso fará que os limites envolvidos sejam bilaterais. (Os argumentos para os casos que envolvem limites laterais são análogos.)

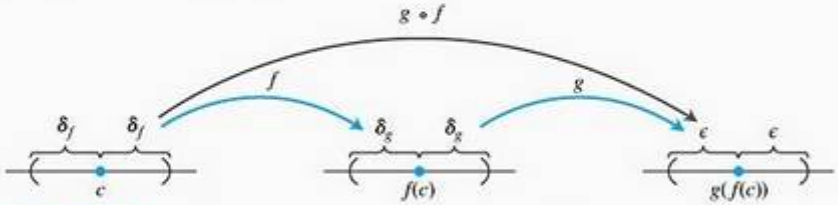


FIGURA A.1 O diagrama para a demonstração de que a composta de duas funções contínuas é contínua.

A.3 Limites que aparecem freqüentemente

Neste apêndice são verificados os limites (4) a (6) do Teorema 5 da Seção 11.1, Volume II.

Limite 4: Se $|x| < 1$, $\lim_{n \to \infty} x^n = 0$ Precisamos mostrar que a cada $\epsilon > 0$ corresponde um inteiro N tão grande que $|x^n| < \epsilon$ para todo n maior que N. Uma vez que $\epsilon^{1/n} \to 1$, enquanto $|x| < 1$, existe um inteiro N para cada $\epsilon^{1/n} > |x|$. Em outras palavras,
$$|x^N| = < |x|^N < \epsilon. \tag{1}$$

Esse inteiro é o que procuramos porque, se $|x| < 1$, então
$$|x^n| < |x^N| \quad \text{para qualquer } n > N. \tag{2}$$

A combinação das equações (1) e (2) produz $|x^n| < \epsilon$ para qualquer $n > N$, concluindo a prova.

Limite 5: Para qualquer número x, $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ Seja
$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Então

$$\ln a_n = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \to x$$

como podemos verificar pela aplicação da regra de L'Hôpital a seguir, na qual diferenciamos em relação a n:

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + x/n)}{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{1 + x/n}\right)\cdot\left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1 + x/n} = x$$

Aplique o Teorema 3, Seção 11.1, Volume II com $f(x) = e^x$ para concluir que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = a_n = e^{\ln a_n} \to e^x$$

Limite 6: Para qualquer número x, $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ Uma vez que

$$-\frac{|x|^n}{n!} \le \frac{x^n}{n!} \le \frac{|x|^n}{n!}$$

tudo o que precisamos mostrar é que $|x|^n/n! \to 0$. Então podemos aplicar o teorema do confronto para seqüências (Seção 11.1, Volume II, Teorema 2) e concluir que $x^n/n! \to 0$.

O primeiro passo para mostrar que $|x|^n/n! \to 0$ é escolher um inteiro $M > |x|$, de maneira que $(|x|/M) < 1$. Pelo limite 4, que acabamos de demonstrar, temos então $(|x|/M)^n \to 0$. Atemo-nos, então, aos valores de $n > M$. Para esses valores de n, podemos escrever

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^n}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot M\cdot \underbrace{(M+1)(M+2)\cdot \cdots \cdot n}_{(n-M)\text{ fatores}}}$$

$$\le \frac{|x|^n}{M!M^{n-M}} = \frac{|x|^n M^M}{M!M^n} = \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n$$

Logo,

$$0 \le \frac{|x|^n}{n!} \le \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n$$

Agora, a constante $M^M/M!$ não muda quando n aumenta. Então, o teorema do confronto nos diz que $|x|^n/n! \to 0$ porque $(|x|/M)^n \to 0$.

A.4 Teoria dos números reais

Uma apresentação rigorosa do cálculo apóia-se nas propriedades dos números reais. Muitos resultados sobre funções, derivadas e integrais seriam falsos se estabelecidos para funções definidas somente nos números racionais. Neste apêndice, examinaremos brevemente alguns conceitos básicos da teoria dos números reais; isso nos dará uma idéia do que pode ser aprendido em um estudo mais profundo e teórico de cálculo.

O que define os números reais são três categorias de propriedades: **algébricas**, de **ordem** e de **completude**. As propriedades algébricas envolvem adição e de multiplicação, subtração e divisão. Aplicam-se a números racionais ou complexos, bem como aos reais.

A estrutura dos números é construída em torno de um conjunto por meio de operações de adição e de multiplicação. As propriedades a seguir são exigidas da adição e da multiplicação.

A1 $a + (b + c) = (a + b) + c$ para quaisquer a, b, c.
A2 $a + b = b + a$ para quaisquer a, b, c.
A3 Existe um número chamado "0" tal que $a + 0 = a$ para qualquer a.
A4 Para qualquer número a, existe um b tal que $a + b = 0$.
M1 $a(bc) = (ab)c$ para quaisquer a, b, c.
M2 $ab = ba$ para quaisquer a, b.
M3 Existe um número chamado "1" tal que $a \cdot 1 = a$ para qualquer a.
M4 Para cada a diferente de zero, existe um b tal que $ab = 1$.
D $a(b + c) = ab + bc$ para quaisquer a, b, c.

A1 e M1 são *leis associativas*, A2 e M2 são *leis cumutativas*, A3 e M3 são *leis de identidade*, e D é a *lei distributiva*. Conjuntos que apresentam essas propriedades algébricas são exemplos de **corpos**, tópico estudado com profundidade na área de teoria matemática denominada álgebra abstrata.

As propriedades de **ordem**, por sua vez, permitem que comparemos o tamanho de dois números quaisquer. As propriedades de ordem são

O1 Para quaisquer a e b, ou $a \leq b$, ou $b \leq a$, ou ainda ambas as coisas.
O2 Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$.
O3 Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.
O4 Se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$.
O5 Se $\leq b$ e $0 \leq c$, então $ac \leq bc$.

O3 é a *lei da transitividade*, enquanto O4 e O5 relacionam ordem a adição e multiplicação.

Podemos ordenar os números reais, os inteiros e os racionais, mas não podemos ordenar os números complexos (veja o Apêndice A.5). Não há maneira razoável de definir se um número como $i = \sqrt{-1}$ é maior ou menor que zero. Um corpo em que o tamanho de dois elementos quaisquer possa ser comparado da maneira que acabamos de ver é chamado **corpo ordenado**. Tanto os números racionais quanto os reais são corpos ordenados, e além deles há muitos outros.

Podemos pensar nos números reais geometricamente, imaginando-os como pontos em uma reta. A **propriedade de completude** diz que os números reais correspondem a todos os pontos da reta, sem "buraco" ou "lacuna". Os racionais, por outro lado, pulam pontos como $\sqrt{2}$ e π, e os inteiros deixam de fora até mesmo frações como 1/2. Os reais, tendo a propriedade da completude, não omitem pontos.

O que queremos dizer exatamente com essa idéia vaga de "buracos" na reta? Para responder, precisamos dar uma descrição mais exata de completude. Um número M será um **limitante superior** para um conjunto de números se todos os números no conjunto forem menores ou iguais a esse limitante. M será o **menor limitante superior** se for o limitante superior mais baixo. Por exemplo, $M = 2$ é um limitante superior para os números negativos. $M = 1$ também o é, o que demonstra que 2 não é o menor limitante superior. O menor limitante superior para o conjunto de números negativos é $M = 0$. Deno-

minamos, então, corpo ordenado **completo** aquele em que qualquer conjunto não vazio limitado superiormente possui um menor limitante superior.

Se trabalharmos apenas com os números racionais, o conjunto de números menores que $\sqrt{2}$ será limitado superiormente, mas não terá um menor limitante superior racional, uma vez que qualquer limitante superior racional M pode ser substituído por um número racional ligeiramente menor que, ainda assim, será maior do que $\sqrt{2}$. Logo, os racionais não são completos. Entre os números reais, porém, um conjunto limitado superiormente sempre terá um menor limitante superior. Os reais são, portanto, um corpo ordenado completo.

A propriedade da completude está no âmago de muitos resultados em cálculo. Exemplo disso ocorre quando estamos procurando um valor máximo de uma função em um intervalo fechado $[a, b]$, como fizemos na Seção 4.1. A função $y = x - x^3$ possui um valor máximo em $[0, 1]$ no ponto x que satisfaz $1 - 3x^2 = 0$, ou $x = \sqrt{1/3}$. Se estivéssemos considerando apenas funções definidas em números racionais, teríamos de concluir que a função não tem máximo, uma vez que $\sqrt{1/3}$ é irracional (Figura A.2). Logo, o teorema do valor extremo (Seção 4.1), que implica que funções contínuas em intervalos fechados $[a, b]$ têm um valor máximo, não é verdadeiro para funções definidas somente no universo dos números racionais.

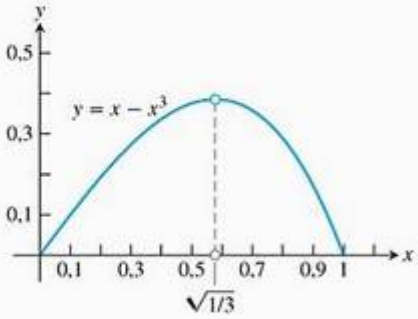


FIGURA A.2 O valor máximo de $y = x - x^3$ em $[0, 1]$ ocorre no número irracional $x = \sqrt{1/3}$.

Segundo o teorema do valor intermediário, uma função contínua f em um intervalo $[a, b]$ com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ precisa ser nula em algum ponto em $[a, b]$. Os valores da função não podem saltar do negativo para o positivo sem haver algum ponto x em $[a, b]$ onde $f(x) = 0$. O teorema do valor intermediário também se apóia na completude dos números reais e é falso para funções contínuas definidas somente nos números racionais. A função $f(x) = 3x^2 - 1$ tem $f(0) = -1$ e $f(1) = 2$, mas, se considerarmos f somente nos números racionais, ela nunca será igual a zero. O único valor de x para o qual $f(x) = 0$ é $x = \sqrt{1/3}$, um número irracional.

Já captamos as propriedades desejadas dos números reais dizendo que eles são um corpo ordenado completo. Mas isso não é tudo. Os matemáticos gregos da escola de Pitágoras tentaram imputar outra propriedade aos números da reta real: a condição de que todos os números são razões de inteiros. Eles perceberam que seu esforço havia sido em vão quando descobriram números irracionais tais como $\sqrt{2}$. Como sabemos que nossa tentativa de especificar os números reais também não está incorreta, por algum motivo ainda não percebido? O artista gráfico Escher desenhou ilusões óticas de escadas em espiral que subiam mais e mais até se reencontrarem embaixo. Um engenheiro que tentasse construir uma escada desse tipo descobriria que nenhuma estrutura é capaz de concretizar o projeto do arquiteto. Será que nosso projeto para os números reais também contém alguma contradição sutil e não é possível construir um sistema de números como este?

Resolvemos esse problema dando uma descrição específica dos números reais e verificando se as propriedades algébrica, de ordem e de completude são satisfeitas nesse modelo. Esse processo chama-se **construção** dos números reais, e, assim como escadas podem ser construídas com madeira, pedra ou aço, existem várias maneiras de construir os números reais. Uma delas os trata como o conjunto de todos os decimais infinitos,

$$a, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots$$

Nessa abordagem, um número real é um inteiro a seguido de uma seqüência de dígitos decimais $d_1, d_2, d_3, \ldots$, cada um deles entre 0 e 9. Essa seqüência pode parar, ou repetir-se em um padrão periódico, ou seguir indefinidamente

sem padrão. Dessa forma, 2,00, 0,3333333 ... e 3,1415926535898 ... representam três números reais que nos são familiares. Para entender o verdadeiro significado das reticências ("...") após esses dígitos, precisamos estudar a teoria de seqüências e séries, o que será feito no Capítulo 11, Volume II. Cada número real é construído como o limite de uma seqüência de números racionais dada por suas aproximações decimais finitas. Um decimal infinito é, portanto, o mesmo que uma série

$$a + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \cdots$$

Essa construção decimal dos números reais não é inteiramente direta. É fácil verificar que ela dá números que satisfazem as propriedades de completude e ordem, mas verificar as propriedades algébricas é bastante complicado. Até mesmo a soma ou a multiplicação de apenas dois números exige um número infinito de operações. Para fazer sentido, a divisão requer um cuidadoso argumento envolvendo limites de aproximações racionais para decimais infinitos.

Uma abordagem diferente ao assunto foi dada pelo matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916), que, em 1872, estabeleceu a primeira construção rigorosa dos números reais. Dado qualquer x número real, podemos dividir os números racionais em dois conjuntos: os menores ou iguais a x e os maiores. Engenhosamente, Dedekind inverteu esse raciocínio e definiu um número real como uma divisão dos números racionais em dois conjuntos como esses. A abordagem pode parecer estranha, mas métodos indiretos como esse, que constroem novas estruturas a partir de antigas, são comuns na teoria matemática.

Essas e outras abordagens (veja o Apêndice A.5) podem ser usadas para construir um sistema de números que tenha as propriedades algébrica, de ordem e de completude desejadas. Surge então uma dúvida final: será que todas essas construções resultam na mesma coisa? Ou será que diferentes construções resultam em diferentes sistemas de números, todos eles capazes de satisfazer as propriedades exigidas? Em caso positivo, qual desses sistemas será o dos números reais? Felizmente, a resposta é não, as diferentes abordagens não levam a resultados distintos. Os reais são o único sistema numérico que satisfaz as propriedades algébricas, de ordem e de completude.

A confusão em torno da natureza dos números reais e dos limites causou considerável controvérsia nos primórdios do cálculo. Pioneiros do cálculo, como Newton, Leibniz e seus sucessores, ao observar o que acontecia com a razão incremental

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

quando Δy e Δx tendiam a zero, diziam que a derivada resultante seria um quociente de duas quantidades infinitamente pequenas. Acreditava-se que esses "infinitésimos", indicados por dx e dy, seriam algum novo tipo de número, menor que qualquer número já conhecido, porém diferente de zero. De modo análogo, acreditava-se que uma integral definida era uma soma de um número infinito de infinitésimos.

$$f(x) \cdot dx$$

quando x variava em um intervalo fechado. Embora as razões incrementais $\Delta y/\Delta x$ usadas para aproximação fossem tão bem compreendidas quanto hoje, achava-se que era o quociente de quantidades infinitesimais, e não um limite, que concentrava o significado da derivada. Esse modo de pensar levava a di-

ficuldades lógicas, à medida que as tentativas de definição e manipulação dos infinitésimos incorriam em contradições e inconsistências. Razões incrementais mais concretas e fáceis de calcular não causam esse tipo de problema, mas elas eram vistas apenas como ferramentas de cálculo. Eram usadas para se trabalhar com o valor numérico da derivada e para derivar fórmulas gerais de cálculo, mas ninguém achava que elas ajudariam a responder o que era exatamente uma derivada. Hoje, percebemos que os problemas lógicos associados aos infinitésimos podem ser evitados quando *definimos* a derivada como o limite das razões incrementais que servem para aproximá-la. As ambigüidades da antiga abordagem não estão mais presentes e, na teoria do cálculo padrão, infinitésimos já não são necessários nem utilizados.

A.5 Números complexos

Este apêndice pode ser encontrado no Companion Website do livro (**www.aw.com/thomas_br**).

A.6 A propriedade distributiva para produtos vetoriais

Neste apêndice, provaremos a propriedade distributiva

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$$

identificada como propriedade 2 na Seção 12.4, Volume II.

PROVA Para deduzir a propriedade distributiva, construímos $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de um novo modo. Desenhamos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ a partir de um ponto comum O e construímos um plano M perpendicular a $\mathbf{u}$ em O (Figura A.10). Então projetamos $\mathbf{v}$ ortogonalmente em M, gerando um vetor $\mathbf{v}'$ de comprimento $|\mathbf{v}|$ sen θ. Rodamos $\mathbf{v}'$ 90° em torno de $\mathbf{u}$ no sentido positivo para produzir um vetor $\mathbf{v}''$. Por fim, multiplicamos $\mathbf{v}''$ pelo comprimento de $\mathbf{u}$. O vetor resultante $|\mathbf{u}|\mathbf{v}''$ é igual a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, já que $\mathbf{v}''$ tem a mesma direção que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ por sua construção (Figura A.10) e

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}''| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}'| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \text{ sen } \theta = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$$

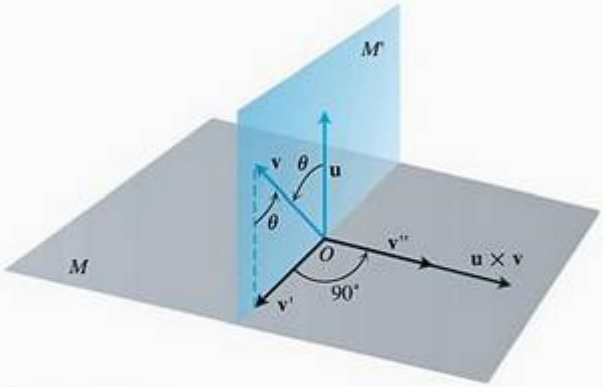


FIGURA A.10 Como explicado no texto, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\mathbf{v}''$.

Agora, cada uma das três operações, que são:

1. projeção em M,
2. rotação em torno de $\mathbf{u}$ em 90°,
3. multiplicação pela grandeza escalar $|\mathbf{u}|$,

quando aplicadas a um triângulo cujo plano não é paralelo a $\mathbf{u}$, produzirão outro triângulo. Se começarmos com o triângulo cujos lados são $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (Figura A.11) e aplicarmos esses três passos, obteremos sucessivamente:

1. Um triângulo cujos lados são $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ e $(\mathbf{v} + \mathbf{w})'$, satisfazendo a equação vetorial
$$\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})'$$
2. Um triângulo cujos lados são $\mathbf{v}''$, $\mathbf{w}''$ e $(\mathbf{v} + \mathbf{w})''$, satisfazendo a equação vetorial
$$\mathbf{v}'' + \mathbf{w}'' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})''$$
(a linha dupla em cada vetor tem o mesmo significado da Figura A.10)

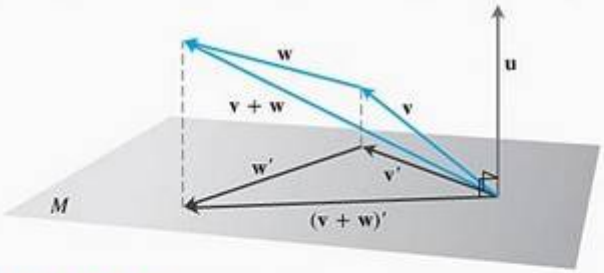


FIGURA A.11 Os vetores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e suas projeções em um plano perpendicular a $\mathbf{u}$.

3. Um triângulo cujos lados são, $|\mathbf{u}|\,\mathbf{v}''$, $|\mathbf{u}|\,\mathbf{w}''$ e $|\mathbf{u}|\,(\mathbf{v} + \mathbf{w})''$, satisfazendo a equação vetorial
$$|\mathbf{u}|\,\mathbf{v}'' + |\mathbf{u}|\,\mathbf{w}'' = |\mathbf{u}|\,(\mathbf{v} + \mathbf{w})''$$
Substituindo nessa última equação $|\mathbf{u}|\,\mathbf{v}'' = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|\,\mathbf{w}'' = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ e $|\mathbf{u}|\,(\mathbf{v} + \mathbf{w})'' = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ da discussão anterior, temos
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$
que é a lei que queríamos estabelecer.

A.7 O teorema das derivadas mistas e o teorema do incremento

Neste apêndice, deduzimos o teorema das derivadas mistas (Teorema 2, Seção 14.3, Volume II) e o teorema do incremento para funções de duas variáveis (Teorema 3, Seção 14.3, Volume II). Euler publicou seu teorema das derivadas mistas em 1734, em uma série de trabalhos que ele escreveu sobre hidrodinâmica.

Teorema 2 O teorema das derivadas mistas
Se $f(x, y)$ e suas derivadas parciais f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} são definidas ao longo de uma região aberta que contém um ponto (a, b) e são todas contínuas em (a, b), então $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

PROVA A igualdade de $f_{xy}(a, b)$ e $f_{yx}(a, b)$ pode ser estabelecida por quatro aplicações do teorema do valor médio (Teorema 4, Seção 4.2). Por

hipótese, o ponto (a, b) situa-se no interior de um retângulo R no plano xy no qual f, f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} são todas definidas. Fazemos h e k serem os números necessários para que o ponto $(a + h, b + k)$ também se situe em R e consideramos a diferença

$$\Delta = F(a+h) - F(a) \tag{1}$$

onde

$$F(x) = f(x, b + k) - f(x, b) \tag{2}$$

Aplicamos o teorema do valor médio a F, que é contínua porque é diferenciável, e a Equação (1) torna-se

$$\Delta = hF'(c_1) \tag{3}$$

onde c_1 situa-se entre a e $a + h$. Da Equação (2),

$$F'(x) = f_x(x, b + k) - f_x(x, b)$$

então a Equação (3) torna-se

$$\Delta = h[f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b)] \tag{4}$$

Agora, aplicamos o teorema do valor médio à função $g(y) = f_x(c_1, y)$ e temos

$$g(b + k) - g(b) = kg'(d_1)$$

ou

$$f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b) = k f_{xy}(c_1, d_1)$$

para algum d_1 entre b e $b + k$. Substituindo isso na Equação (4), obtemos

$$\Delta = hkf_{xy}(c_1, d_1) \tag{5}$$

para algum ponto (c_1, d_1) no retângulo R' cujos vértices são os quatro pontos (a, b), $(a + h, b)$, $(a + h, b + k)$ e $(a, b + k)$. (Veja a Figura A.12.)

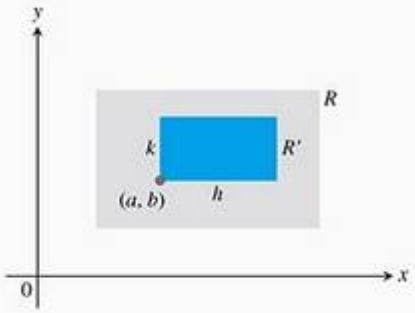


FIGURA A.12 A chave para provar $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ é que não importa quão pequeno seja R', f_{xy} e f_{yx} assumem valores iguais em algum lugar dentro de R' (embora não necessariamente no mesmo ponto).

Substituindo da Equação (2) na Equação (1), podemos escrever também

$$\begin{aligned}\Delta &= f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)\\ &= [f(a + h, b + k) - f(a, b + k)] - [f(a + h, b) - f(a, b)]\\ &= \phi(b + k) - \phi(b)\end{aligned} \tag{6}$$

onde

$$\phi = (y) = f(a + h, y) - f(a, y) \tag{7}$$

O teorema do valor médio aplicado à Equação (6) agora dá

$$\Delta = k\phi'(d_2) \tag{8}$$

para algum d_2 entre b e $b + k$. Pela Equação (7),

$$\phi' = (y) = f_y(a + h, y) - f(a, y) \tag{9}$$

Substituindo a Equação (9) na Equação (8), temos

$$\Delta = k[f_y(a + h, d_2) - f_y(a, d_2)]$$

Por fim, aplicamos o teorema do valor médio à expressão em colchetes e obtemos

$$\Delta = khf_{yx}(c_2, d_2) \tag{10}$$

para algum c_2 entre a e $a + h$.

Juntas, as equações (5) e (10) mostram que

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2) \tag{11}$$

onde tanto (c_1, d_1) como (c_2, d_2) situam-se no retângulo R' (Figura A.12). A Equação (11) não é bem o resultado que queremos, já que ela diz somente que f_{xy} tem o mesmo valor em (c_1, d_1) que tem em (c_2, d_2). Os números h e k em nossa discussão, entretanto, podem ser tão pequenos quanto desejamos. A hipótese de que f_{xy} e f_{yx} são ambas contínuas em (a, b) significa que $f_{xy}(c_1, d_1) = f_{xy}(a, b) + \epsilon_1$ e $f_{yx}(c_2, d_2) = f_{yx}(a, b)\ \epsilon_2$, onde $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ quando $h, k \to 0$. Portanto, se fazemos h e $k \to 0$, temos $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

A igualdade de $f_{xy}(a, b)$ e $f_{yx}(a, b)$ pode ser provada com hipóteses mais fracas que as consideradas aqui. Por exemplo, basta que f, f_x e f_y existam em R e que f_{xy} seja contínua em (a, b). Então, f_{yx} existirá em (a, b) e será igual a f_{xy} nesse ponto.

Teorema 3 **O teorema do incremento para funções de duas variáveis**

Suponha que as derivadas parciais de primeira ordem de $z = f(x, y)$ estejam definidas em uma região aberta R que contém o ponto (x_0, y_0) e que f_x e f_y sejam contínuas em (x_0, y_0). Então, a variação $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 - \Delta y) - f(x_0, y_0)$ no valor de f que resulta do movimento de (x_0, y_0) para outro ponto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ em R satisfaz uma equação da forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\ \Delta x + f_y(x_0, y_0)\ \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

onde $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x, \Delta y \to 0$.

PROVA Trabalhamos dentro de um retângulo T centrado em $A(x_0, y_0)$ e situado dentro de R e consideramos que Δx e Δy já são tão pequenos que o segmento de reta que une A a $B(x_0 + \Delta x, y_0)$ e o segmento de reta que une B a $C(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ situam-se no interior de T (Figura A.13).

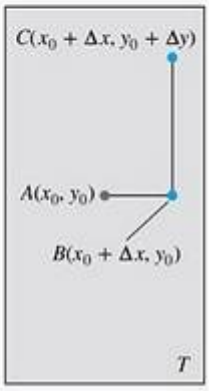


FIGURA A.13 A região retangular T na prova do teorema do incremento. A figura está desenhada para Δx e Δy positivos, mas o incremento pode ser zero ou negativo.

Podemos pensar em Δz como a soma $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2$ de dois incrementos, onde

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

é a variação do valor de f de A a B e

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x\ y_0)$$

é a variação do valor de f de B a C (Figura A.14).

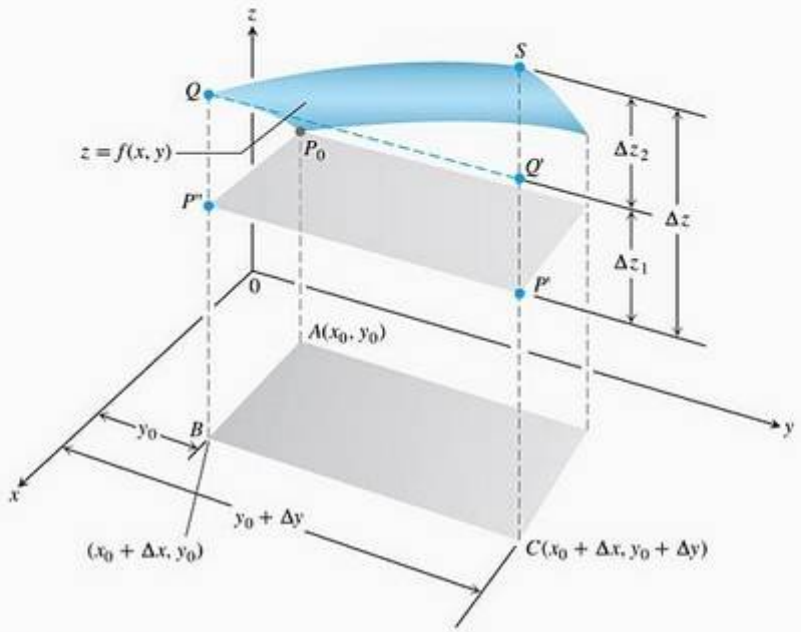


FIGURA A.14 Parte da superfície $z = f(x, y)$ próximo de $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Os pontos P_0, P' e P'' têm a mesma altura $z_0 = f(x_0, y_0)$ acima do plano xy. A variação de z é $\Delta z = P'S$. A variação

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

mostrada quando $P''Q = P'Q'$, é causada pela variação de x de x_0 para $x_0 + \Delta x$ enquanto se mantém y igual a y_0. Então, com x mantido igual a $x_0 + \Delta x$,

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

é a variação de z causada ao se variar y_0 de y_0 para $y_0 + \Delta y$, que é representada por $Q'S$? A variação total de z é a soma de Δz_1 e Δz_2.

No intervalo fechado de valores x que une x_0 a $x_0 + \Delta x$, a função $F(x) = f(x, y_0)$ é uma função de x diferenciável (e, portanto, contínua), com derivada

$$F'(x) = f_x(x, y_0)$$

Pelo teorema do valor médio (Teorema 4, Seção 4.2,), há um valor c em x entre x_0 e $x_0 + \Delta x$ no qual

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = F'(c)\Delta x$$

ou

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(c, y_0)\Delta x$$

ou

$$\Delta z_1 = f_x(c, y_0)\,\Delta x \tag{12}$$

Similarmente, $G'(y) = f_y(x_0 + \Delta x, y)$ é uma função de y diferenciável (e, portanto, contínua) no intervalo fechado y que une y_0 e $y_0 + \Delta y$, com derivada

$$G'(y) = f_y(x_0 + \Delta x, y)$$

Portanto, há um valor d em y entre y_0 e $y_0 + \Delta y$ no qual

$$G(y_0 + \Delta y) - G(y_0) = G'(d)\Delta y$$

ou

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, \Delta x, y) = f_y(x_0 + \Delta x, d)\,\Delta y$$

ou

$$\Delta z_2 = f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y. \tag{13}$$

Agora, quando Δx e $\Delta y \to 0$, sabemos que $c \to x_0$ e $d \to y_0$. Assim, uma vez que f_x e f_y são contínuas em (x_0, y_0), as quantidades

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0) \\ \epsilon_2 &= f_y(x_0 + \Delta x, d) - f_y(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{14}$$

aproximam-se de zero quando Δx e $\Delta y \to 0$.

Por fim,

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta z_1 + \Delta z_2 \\ &= f_x(c, y_0)\Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y && \text{Das equações (12) e (13)} \\ &= \left[f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1\right]\Delta x + \left[f_y(x_0 + y_0) + \epsilon_2\right]\Delta y && \text{Da equação (14).} \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y \end{aligned}$$

onde ϵ_1 e $\epsilon_2 \to 0$ quando Δx e $\Delta y \to 0$, que é o que queríamos provar.

Resultados análogos são verdadeiros para funções de qualquer número finito de variáveis independentes. Suponha que as derivadas parciais de primeira ordem de $w = f(x, y, z)$ sejam definidas ao longo de uma região aberta que contém o ponto (x_0, y_0, z_0) e que f_x, f_y e f_z sejam contínuas em (x_0, y_0, z_0). Então

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f_x\Delta x, f_y\Delta y, f_z\Delta z + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y + \epsilon_3\,\Delta z \end{aligned} \tag{15}$$

onde $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \to 0$ quando $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$

As derivadas parciais f_x, f_y, f_z na equação (15) são calculadas no ponto (x_0, y_0, z_0).

A Equação (15) pode ser provada tratando-se Δw como a soma dos três incrementos,

$$\Delta w_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) \tag{16}$$

$$\Delta w_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \tag{17}$$

$$\Delta w_3 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0) \tag{18}$$

e aplicando-se o teorema do valor médio a cada um deles separadamente. Duas coordenadas permanecem constantes e somente uma varia em cada um desses incrementos parciais Δw_1, Δw_2, Δw_3. Na Equação (17), por exemplo, somente y varia, desde que x seja mantido igual a $x_0 + \Delta x$ e z seja mantido igual a z_0. Como $f(x_0 + \Delta x, y, z_0)$ é uma função contínua de y com uma derivada f_y, ela está nas hipóteses do teorema do valor médio, e temos

$$\Delta w_2 = f_y(x_0 + \Delta x, y_1, z_0)\Delta y$$

para algum y_1 entre y_0 e $y_0 + \Delta y$

A.8 A área da projeção de um paralelogramo em um plano

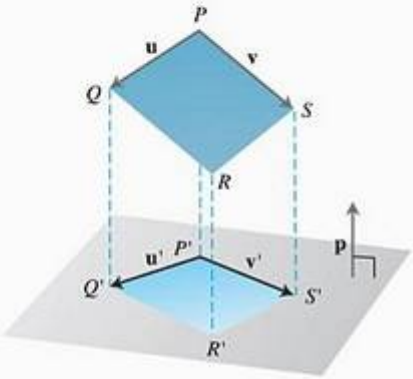


FIGURA A.15 O paralelogramo determinado por dois vetores **u** e **v** no espaço e a projeção ortogonal do paralelogramo em um plano. As retas de projeção, ortogonais ao plano, estão paralelas ao vetor unitário normal **p**.

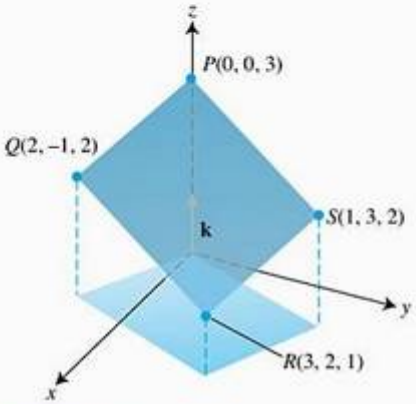


FIGURA A.16 O Exemplo 1 calcula a área da projeção ortogonal do paralelogramo *PQRS* no plano *xy*.

Neste apêndice, provamos o resultado necessário na Seção 16.5, Volume II de que $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|$ é a área da projeção do paralelogramo com lados determinados por **u** e **v** sobre qualquer plano cuja normal é **p**. (Veja a Figura A.15.)

Teorema
A área da projeção ortogonal do paralelogramo determinado pelos vetores **u** e **v** no espaço sobre um plano com vetor unitário normal **p** é

$$\text{Área} = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|$$

PROVA Na notação da Figura A.15, que mostra um paralelogramo típico determinado por vetores **u** e **v** e sua projeção ortogonal em um plano com vetor unitário **p**,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \overrightarrow{PP'} + \mathbf{u}' + \overrightarrow{Q'Q} \\ &= \mathbf{u}' + \overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{QQ'} && (\overrightarrow{Q'Q} = -\overrightarrow{QQ'}) \\ &= \mathbf{u}' + s\mathbf{p}. && \text{(para algum escalar } s\text{; já } (\overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{QQ'}) \text{ é paralelo a } \mathbf{p}) \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + t\mathbf{p}$$

para algum escalar t. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (\mathbf{u}' + s\mathbf{p}) \times (\mathbf{v}' + t\mathbf{p}) \\ &= (\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') + s(\mathbf{p} \times \mathbf{v}') + t(\mathbf{u}' \times \mathbf{p}) + st\underbrace{(\mathbf{p} \times \mathbf{p})}_{0} \qquad (1) \end{aligned}$$

Os vetores $\mathbf{p} \times \mathbf{v}'$ e $\mathbf{u}' \times \mathbf{p}$ são ambos ortogonais a **p**. Assim, quando fazemos o produto escalar de ambos os lados da equação (1) com **p**, o único termo restante à direita é $-(\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{p}$. Ficamos com

$$(\mathbf{u}' \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p} = (\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{p}$$

Em particular,

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}| = |(\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{p}|. \qquad (2)$$

O valor absoluto à direita é o volume da caixa determinado por $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ e **p**. A altura dessa caixa específica é $|\mathbf{p}| = 1$, portanto o volume da caixa é numericamente o mesmo que a área de sua base, a área do paralelogramo $P'Q'R'S'$. Combinando essa observação com a equação (2), obtemos

$$\text{Área de } P'Q'R'S' = |(\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{p}| = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|$$

que diz que a área da projeção ortogonal do paralelogramo determinado por **u** e **v** em um plano com vetor unitário normal **p** é $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|$, que é o que queríamos provar.

EXEMPLO 1 Determinando a área de uma projeção

Determine a área da projeção ortogonal no plano *xy* do paralelogramo determinado pelos pontos $P(0, 0, 3)$, $Q(2, -1, 2)$, $R(3, 2, 1)$ e $S(1, 3, 2)$ (Figura A.16).

SOLUÇÃO Com

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \qquad \mathbf{v} = \overrightarrow{PS} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = \mathbf{k}$$

temos

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

portanto, a área é

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}| = |7| = 7$$

A.9 Álgebra básica, geometria e fórmulas trigonométricas

Álgebra

Operações aritméticas

$$a(b + c) = ab + ac \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Lei dos sinais

$$-(-a) = a \qquad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Zero A divisão por zero não é possível.

$$\text{Se } a \neq 0: \frac{0}{a} = 0, a^0 = 1, 0^a = 0$$

Para qualquer número a: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

Lei dos expoentes

$$a^m a^n = a^{m+n}, \ (ab)^m = a^m b^m, \ (a^m)^n = a^{mn}, \ a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Se $a \neq 0$,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

O teorema binominal Para um n número positivo inteiro

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

Por exemplo,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (a - b)^3 = a^2 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Fatorando a diferença entre potências inteiras similares, $n > 1$

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Por exemplo,

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

Completando o quadrado Se $a \neq 0$,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + a\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ &= \underbrace{a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right)}_{\text{Isto é } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} + \underbrace{c - \frac{b^2}{4a}}_{\text{Chamaremos esta parte de } C.} \\ &= au^2 + C \qquad (u = x + (b/2a)) \end{aligned}$$

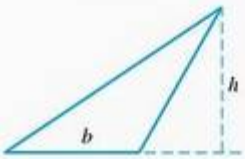
A fórmula quadrática Se $a \neq 0$ e $ax^2 + bx + c = 0$, então

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Geometria

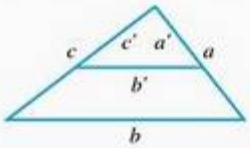
Fórmulas para área, circunferência e volume: (A = área, B = área da base, C = circunferência, S = área lateral ou área da superfície, V = volume)

Triângulo



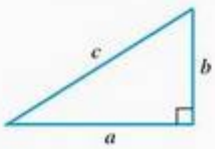
$A = \frac{1}{2}bh$

Triângulos semelhantes



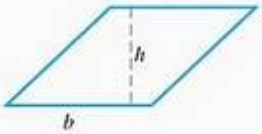
$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

Teorema de Pitágoras



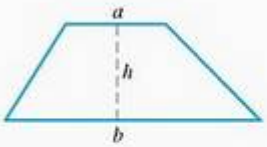
$a^2 + b^2 = c^2$

Paralelogramo



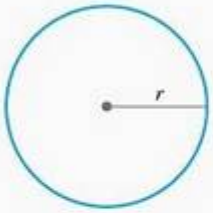
$A = bh$

Trapézio



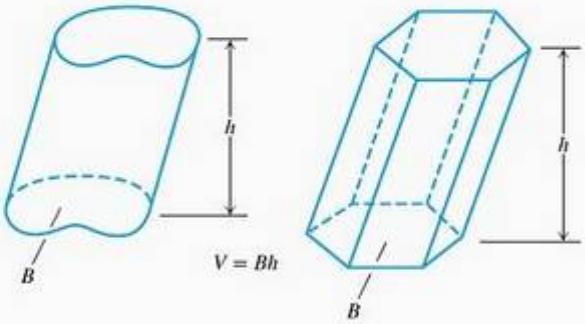
$A = \frac{1}{2}(a + b)h$

Círculo

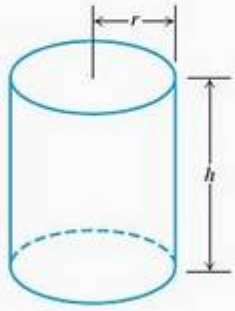


$A = \pi r^2$,
$C = 2\pi r$

Qualquer cilindro ou prisma com bases paralelas

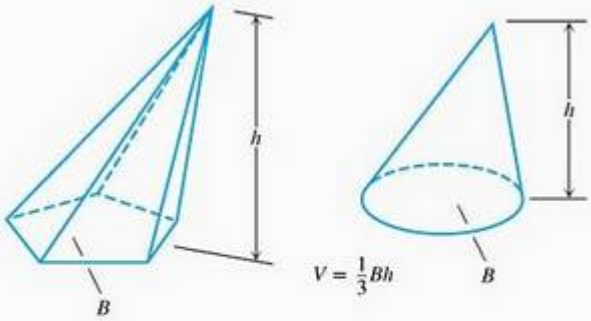


Cilindro circular reto



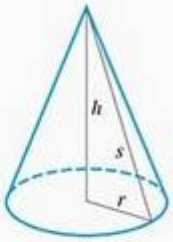
$V = \pi r^2 h$
$S = 2\pi h$ = Área do lado

Qualquer cone ou pirâmide



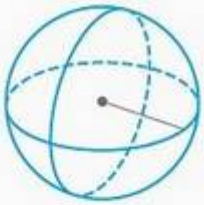
$V = \frac{1}{3}Bh$

Cone circular reto



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$S = \pi rs$ = Área do lado

Esfera



$V = \frac{4}{3}\pi r^3, S = 4\pi r^2$

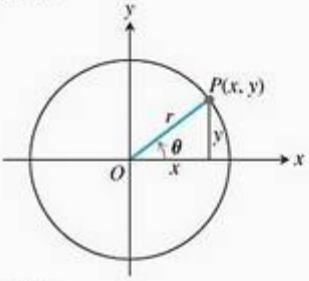
Fórmulas trigonométricas

Definições e identidades fundamentais

Seno: $sen\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta}$

Cosseno: $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sec\theta}$

Tangente: $tg\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\text{cotg}\,\theta}$



Identidades

$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \sec^2\theta = 1 + \text{tg}^2\theta, \quad \text{cosec}^2\theta = 1 + \text{cotg}^2\theta$

$\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$

$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \text{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

$\text{sen}(A + B) = \text{sen}\,A\cos B + \cos A\,\text{sen}\,B$

$\text{sen}(A - B) = \text{sen}\,A\cos B - \cos A\,\text{sen}\,B$

$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \text{sen}\,A\,\text{sen}\,B$

$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \text{sen}\,A\,\text{sen}\,B$

$\text{tg}(A + B) = \frac{\text{tg}\,A + \text{tg}\,B}{1 - \text{tg}\,A\,\text{tg}\,B} \qquad \text{tg}(A - B) = \frac{\text{tg}\,A - \text{tg}\,B}{1 + \text{tg}\,A\,\text{tg}\,B}$

$$\operatorname{sen}\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos A, \qquad \cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{sen}\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos A, \qquad \cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\cos(A - B) - \frac{1}{2}\cos(A + B)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\cos(A - B) + \frac{1}{2}\cos(A + B)$$

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A - B) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A + B)$$

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$$

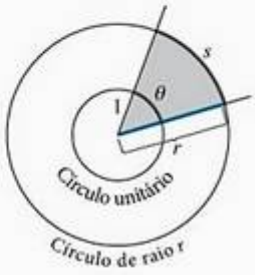
$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A - B)$$

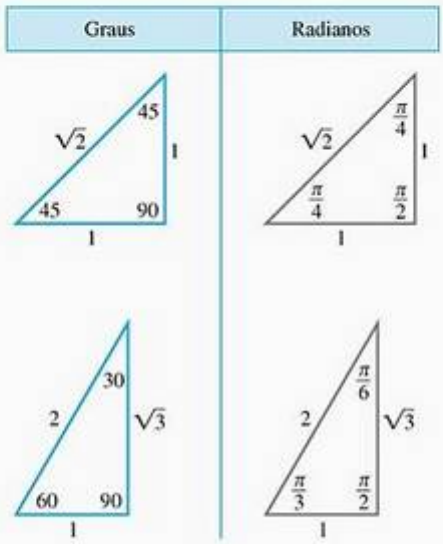
Funções trigonométricas

Medida do Radiano

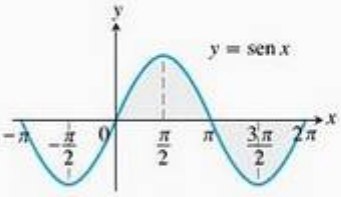


$$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1} = 1 \text{ ou } \theta = \frac{s}{r},$$

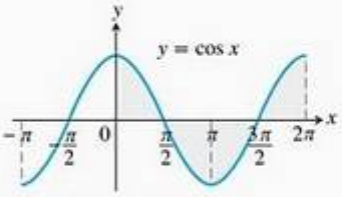
180 $= \pi$ radianos.



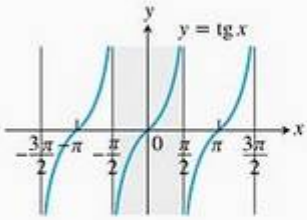
Os ângulos de dois triângulos comuns, em graus e radianos.



Domínio: $(-\infty, \infty)$
Imagem: $[-1, 1]$

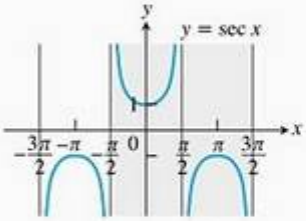


Domínio: $(-\infty, \infty)$
Imagem: $[-1, 1]$



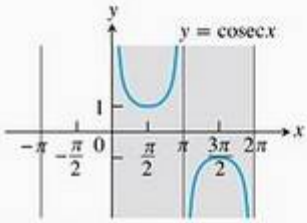
Domínio: Todos os números reais, exceto inteiros ímpares múltiplos de $\pi/2$

Imagem: $(-\infty, \infty)$



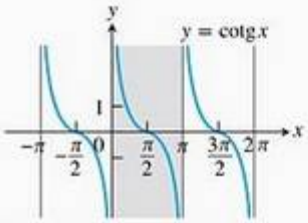
Domínio: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

Imagem: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Domínio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

Imagem: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Domínio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

Imagem: $(-\infty, \infty)$

Apêndice B

B.1 Números reais e a reta real

Esta seção aborda números reais, desigualdades, intervalos e valores absolutos.

Números reais

Uma grande parte da disciplina de cálculo baseia-se nas propriedades do sistema de números reais. **Números reais** são aqueles que podem ser expressos como decimais, por exemplo:

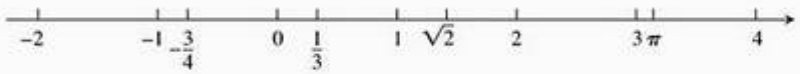
$$-\frac{3}{4} = -0{,}75000\ldots$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots$$

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$$

Nos três casos, os pontos (...) indicam que a seqüência de dígitos decimais prossegue infinitamente. Qualquer expansão decimal concebível representa um número real, embora certos números tenham duas representações. Por exemplo, os decimais infinitos 0,999... e 1,000... representam o mesmo número real 1. Uma afirmação análoga aplica-se a qualquer número com uma seqüência decimal infinita de noves.

Os números reais podem ser representados geometricamente como pontos em uma reta numerada denominada **reta real**.



O símbolo **R** indica o sistema de números reais ou — o que é a mesma coisa — a reta real.

As propriedades do sistema de números reais pertencem a três categorias: propriedades algébricas, propriedades de ordem e de completude. As **propriedades algébricas** dizem que os números reais podem ser somados, subtraídos, multiplicados e divididos (exceto por 0), resultando em outros números reais sob as regras usuais da aritmética. *Você nunca pode dividir por 0.*

Regras para desigualdades

Se a, b e c são números reais, então:

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2. $a < b \Rightarrow a - c < b - c$
3. $a < b$ e $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
4. $a < b$ e $c < 0 \Rightarrow bc < ac$

Caso especial: $a < b \Rightarrow -b < -a$

5. $a > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 0$
6. Se a e b são ambos positivos ou ambos negativos, então $a < b \Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.

As **propriedades de ordem** dos números reais foram dadas no Apêndice A.4. A partir dessas propriedades, podemos inferir as regras ao lado, nas quais o símbolo $\Rightarrow$ significa "implica".

Observe as regras de multiplicação de uma desigualdade por um número. Se multiplicarmos por um número positivo, a desigualdade permanecerá a mesma; se multiplicarmos por um número negativo, ela se inverterá. Do mesmo modo, recíprocos invertem a desigualdade para números que tenham o mesmo sinal. Por exemplo, $2 < 5$, mas $-2 > -5$ e $1/2 > 1/5$.

A **propriedade de completude** do sistema de números reais é mais profunda e difícil de definir. Contudo, essa propriedade é fundamental para entendermos o conceito de limite (Capítulo 2). *Grosso modo*, ela diz que existem números reais suficientes para "completar" a reta de números reais, de maneira que não fiquem "buracos" ou "lacunas" nessa reta. Muitos teoremas de cálculo não funcionariam se o sistema de números reais não fosse completo. É melhor deixar esse assunto para um curso mais avançado; de qualquer modo, o Apêndice A.4 dá alguma idéia do que está em jogo e de como os números reais são construídos.

Distinguimos três subconjuntos especiais dos números reais.

1. Os **números naturais**, isto é: 1, 2, 3, 4,...
2. Os **inteiros**, isto é: 0, ±1, ±2, ±3,...
3. Os **números racionais**, isto é, aqueles que podem ser expressos na forma de uma fração m/n, onde m e n são inteiros e $n \neq 0$. São exemplos desses números:

$$\frac{1}{3}, \quad -\frac{4}{9} - \frac{-4}{9} - \frac{4}{-9}, \quad \frac{200}{13} \quad \text{e} \quad 57 = \frac{57}{1}$$

Os números racionais são, justamente, os números reais com expansões decimais que

(a) são finitas (terminam em uma seqüência infinita de zeros), por exemplo,

$$\frac{3}{4} = 0{,}75000\ldots = 0{,}75$$

(b) ou repetem de tempos em tempos (terminando com um grupo de dígitos que se repete indefinidamente), por exemplo

$$\frac{23}{11} = 2{,}090909\ldots = 2{,}\overline{09}$$

A barra indica o grupo de dígitos que se repete (o período).

Uma expansão decimal finita é um tipo especial da expansão que se repete (dízima periódica), uma vez que os zeros do final se repetem.

O conjunto de números racionais possui as mesmas propriedades algébricas e de ordem dos números reais, mas não apresenta a propriedade da completude. Por exemplo, não há um número racional cujo quadrado seja 2; existe um "buraco" na reta racional onde $\sqrt{2}$ deveria estar.

Números reais que não são racionais recebem o nome de **números irracionais**. Eles se caracterizam por ter expansões decimais que não são finitas nem se repetem. São exemplos π, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\log_{10} 3$. Como toda expansão decimal representa um número real, obviamente existe uma quantidade infinita de números irracionais. Tanto os racionais quanto os irracionais podem ser encontrados arbitrariamente próximos a qualquer ponto da reta real.

A notação de conjunto é muito útil para especificar um subconjunto particular de números reais. Um **conjunto** é um agrupamento de objetos, e estes objetos são os **elementos** do conjunto. Se S é um conjunto, a notação $a \in S$

significa que a é um elemento de S, e $a \notin S$ significa que a não é um elemento de S. Se S e T são conjuntos, então $S \cup T$ é a sua **união** e consiste em todos os elementos que pertencem ou a S ou a T (ou, ainda, a S e a T). A **interseção** $S \cap T$ consiste em todos os elementos que pertencem tanto a S quanto a T. O **conjunto vazio** $\varnothing$ é aquele que não contém qualquer elemento. Por exemplo, a interseção entre os números racionais e os irracionais é o conjunto vazio.

É possível descrever certos conjuntos *listando* seus elementos entre chaves. Por exemplo, o conjunto A, formado pelos números naturais (ou inteiros positivos) menores que 6, pode ser expresso assim:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

O conjunto de todos os inteiros é escrito assim:

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

Outra maneira de descrever um conjunto é colocar dentro dos colchetes uma regra que gera todos os seus elementos. Por exemplo, o conjunto

$$A = \{x | x \text{ é um inteiro e } 0 < x < 6\}$$

é o conjunto de inteiros positivos menores que 6.

Intervalos

Um subconjunto da reta real é denominado um **intervalo** quando contém pelo menos dois números e todos os números reais que ficam entre qualquer par desses elementos. Por exemplo, o conjunto de todos os números reais x tais que $x > 6$ é um intervalo, assim como o conjunto de todos os x, tais que $-2 \leq x \leq 5$. O conjunto de todos os números reais diferentes de zero não é um intervalo; como 0 não está presente, o conjunto deixa de conter todo número real entre -1 e 1 (por exemplo).

TABELA B.1 Tipos de intervalo

Notação	Desrição do conjunto	Tipo	Desenho
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	Aberto	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	Fechado	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	Semi-aberto	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	Semi-aberto	
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	Aberto	
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	Fechado	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	Aberto	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	Fechado	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos os números reais)	Tanto aberto como fechado	

Geometricamente, intervalos correspondem a semi-retas e segmentos de

reta na reta real, assim como à reta real em si. Intervalos de números correspondentes a segmentos de reta são **intervalos finitos**; intervalos correspondentes a semi-retas e à reta real são **intervalos infinitos**.

Dizemos que um intervalo finito é **fechado** quando contém seus dois extremos; **semi-aberto** quando contém um extremo, mas não o outro; e **aberto** se não contém seus extremos. Os extremos também são chamados **pontos de fronteira**; eles formam a **fronteira** do intervalo. Os demais pontos do intervalo são os **pontos interiores** e, juntos, formam o **interior** do intervalo. Intervalos infinitos são fechados quando contêm um extremo finito; caso contrário, são abertos. Como um todo, a reta real □ é um intervalo infinito aberto e fechado ao mesmo tempo.

Resolvendo desigualdades

Determinar o intervalo ou os intervalos de números que satisfazem uma desigualdade em x é o mesmo que **resolver** essa desigualdade.

EXEMPLO 1

Resolva as seguintes desigualdades e mostre sua solução (os conjuntos que a solucionam) na reta real.

(a) $2x - 1 < x + 3$ **(b)** $-\frac{x}{3} < 2x + 1$ **(c)** $\frac{6}{x-1} \geq 5$

SOLUÇÃO

(a)

$$2x - 1 < x + 3$$
$$2x < x + 4 \quad \text{Some 1 a ambos os lados.}$$
$$x < 4 \quad \text{Subtraia } x \text{ de ambos os lados.}$$

O conjunto solução é o intervalo aberto $(-\infty, 4)$ (Figura B.1a).

(b)

$$-\frac{x}{3} < 2x + 1$$
$$-x < 6x + 3 \quad \text{Multiplique ambos os lados por 3.}$$
$$0 < 7x + 3 \quad \text{Some } x \text{ a ambos os lados.}$$
$$-3 < 7x \quad \text{Subtraia 3 de ambos os lados.}$$
$$-\frac{3}{7} < x \quad \text{Divida por 7.}$$

O conjunto solução é o intervalo aberto $(-3/7, \infty)$ (Figura B.1b).

(c) A desigualdade $6/(x - 1) \geq 5$ é válida somente se $x > 1$, caso contrário $6/(x - 1)$ é indefinido ou negativo. Assim, $(x - 1)$ é positivo e a desigualdade será preservada se multiplicarmos ambos os lados por $(x - 1)$; temos, então

$$\frac{6}{x-1} \geq 5$$
$$6 \geq 5x - 5 \quad \text{Multiplique ambos os lados por } (x - 1).$$
$$11 \geq 5x \quad \text{Some 5 a ambos os lados.}$$
$$\frac{11}{5} \geq x. \quad \text{Ou } x \leq \frac{11}{5}$$

O conjunto solução é o intervalo semi-aberto $(1, 11/5]$ (Figura B.1c).

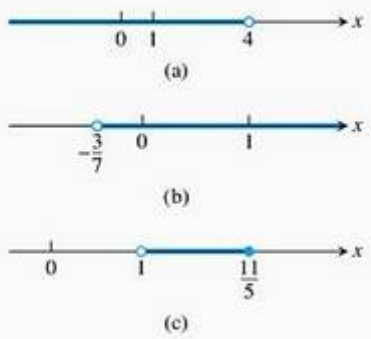


FIGURA B.1 Conjuntos solução para as desigualdades do Exemplo 1.

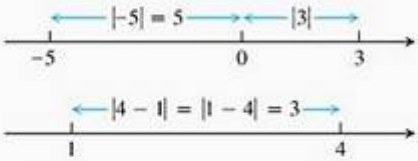


FIGURA B.2 Valores absolutos fornecem a distância entre pontos na reta numérica.

Valor absoluto

O **valor absoluto** de um número x, denotado por $|x|$, é definido pela fórmula

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

EXEMPLO 2 Calculando valores absolutos

$$|3| = 3, \quad |0| = 0, \quad |-5| = -(-5) = 5, \quad |-|a|| = |a|$$

Geometricamente, o valor absoluto de x é a distância de x a 0 na reta real. Como distâncias são sempre positivas ou iguais a 0, vemos que $|x| \geq 0$ para qualquer x número real, e $|x| = 0$ se e somente se $x = 0$. Do mesmo modo,

$$|x - y| = \text{a distância entre } x \text{ e } y$$

na reta real (Figura B.2).

Uma vez que o símbolo $\sqrt{a}$ denota a raiz quadrada *não negativa* de a, uma definição alternativa de $|x|$ é

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

É importante lembrar que $\sqrt{a^2} = |a|$. Não escreva $\sqrt{a^2} = a$, a menos que você já saiba que $a \geq 0$.

O valor absoluto tem as propriedades que se seguem. (Nos exercícios, você terá de provar tais propriedades.)

Propriedades dos valores absolutos

1. $|-a| = |a|$ — Um número e seu oposto, ou inverso aditivo, tem o mesmo valor absoluto.
2. $|ab| = |a|\,|b|$ — O valor absoluto de um produto é o produto dos valores absolutos.
3. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ — O valor absoluto de um quociente é o quociente os valores absolutos.
4. $|a+b| \leq |a| + |b|$ — A **desigualdade do triângulo**. O valor absoluto da soma de dois números é menor ou igual à soma de seus valores absolutos.

Observe que $|-a| \neq -|a|$. Por exemplo, $|-3| = 3$, enquanto $-|3| = -3$. Se a e b têm sinais diferentes, então $|a + b|$ é menor do que $|a| + |b|$. Em todos os demais casos, $|a + b|$ é igual a $|a| + |b|$. As barras de valor absoluto em expressões como $|-3 + 5|$ funcionam como parênteses. Fazemos os cálculos aritméticos *dentro* delas para depois tomar o valor absoluto.

EXEMPLO 3 Ilustrando a desigualdade do triângulo

$$|-3 + 5| = |2| = 2 < |-3| + |5| = 8$$
$$|3 + 5| = |8| = |3| + |5|$$
$$|-3 - 5| = |-8| = 8 = |-3| + |-5|$$

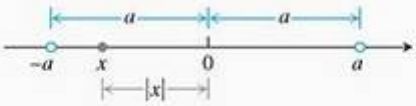


FIGURA B.3 $|x| < a$ significa que x está entre $-a$ e a.

Valores absolutos e intervalos

Se a é qualquer número positivo, então

5. $|x| = a \iff x = \pm a$
6. $|x| < a \iff -a < x < a$
7. $|x| > a \iff x > a$ ou $x < -a$
8. $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$
9. $|x| \geq a \iff x \geq a$ ou $x \leq -a$

A desigualdade $|x| < a$ diz que a distância de x a 0 é menor que o número positivo a. Isso significa que x precisa estar entre $-a$ e a, como podemos ver na Figura B.3.

As regras da tabela ao lado são todas conseqüência da definição de valor absoluto e, muitas vezes, são úteis quando estamos solucionando equações ou desigualdades que envolvam valores absolutos.

Em geral, o símbolo $\Leftrightarrow$ é usado por matemáticos para indicar a relação lógica "se e somente se". Ele também significa "implica e é implicado por".

EXEMPLO 4 Resolvendo uma equação com valores absolutos

Resolva a equação $|2x - 3| = 7$

SOLUÇÃO De acordo com a Propriedade 5, $2x - 3 = \pm 7$, logo existem duas possibilidades.

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 7 & \qquad 2x - 3 &= -7 && \text{Equações equivalentes sem valores absolutos.} \\ 2x &= 10 & \qquad 2x &= -4 && \text{Resolva como de costume.} \\ x &= 5 & \qquad x &= -2 \end{aligned}$$

As soluções de $|2x - 3| = 7$ são $x = 5$ e $x = -2$.

EXEMPLO 5 Resolvendo uma desigualdade que contém valores absolutos

Resolva a desigualdade $\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 1$

SOLUÇÃO Temos

$$\begin{aligned} \left|5 - \frac{2}{x}\right| < 1 &\Leftrightarrow -1 < 5 - \frac{2}{x} < 1 && \text{Propriedade 6.} \\ &\Leftrightarrow -6 < -\frac{2}{x} < -4 && \text{Subtraia 5.} \\ &\Leftrightarrow 3 > \frac{1}{x} > 2 && \text{Multiplique por } -\frac{1}{2}. \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} && \text{Pegue os recíprocos de cada parte.} \end{aligned}$$

Observe como as diversas regras de desigualdades foram usadas aqui. A multiplicação por um número negativo inverte a desigualdade. O mesmo acontece quando se tomam os recíprocos em uma desigualdade na qual os dois lados sejam positivos. A desigualdade original aplica-se se e somente se $(1/3) < x < (1/2)$. Assim, o conjunto solução é o intervalo aberto $(1/3, 1/2)$.

Exercícios B.1

Representações decimais

1. Expresse 1/9 como uma dízima periódica, usando uma barra para indicar o período (os dígitos que se repetem). Quais são as representações decimais de 2/9? 3/9? 8/9? 9/9?

Desigualdades

2. Se $2 < x < 6$, quais das seguintes afirmações sobre x são necessariamente verdadeiras e quais não são necessariamente verdadeiras?

(a) $0 < x < 4$ (b) $0 < x - 2 < 4$

(c) $1 < \frac{x}{2} < 3$ (d) $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

(e) $1 < \frac{6}{x} < 3$ (f) $|x - 4| < 2$

(g) $-6 < -x < 2$ (h) $-6 < -x < -2$

Nos exercícios 3–6, resolva as desigualdades e mostre os conjuntos solução na reta real.

3. $-2x > 4$ 4. $5x - 3 \leq 7 - 3x$

5. $2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6}$ 6. $\frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6)$

Valor absoluto

Resolva as equações dos exercícios 7–9.

7. $|y| = 3$ 8. $|2t + 5| = 4$ 9. $|8 - 3s| = \frac{9}{2}$

Resolva as desigualdades dos exercícios 10–17, expressando os conjuntos solução como intervalos ou uniões de intervalos. Além disso, mostre cada conjunto solução na reta real.

10. $|x| < 2$ 11. $|t - 1| \leq 3$ 12. $|3y - 7| < 4$

13. $\left|\frac{z}{5} - 1\right| \leq 1$ 14. $\left|3 - \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$ 15. $|2s| \geq 4$

16. $|1 - x| > 1$ 17. $\left|\frac{r + 1}{2}\right| \geq 1$

Desigualdades quadráticas

Resolva as desigualdades dos exercícios 18–21. Expresse os conjuntos solução como intervalos ou uniões de intervalos; depois, mostre-os na reta real. Use o resultado $\sqrt{a^2} = |a|$ conforme necessário.

18. $x^2 < 2$ 19. $4 < x^2 < 9$

20. $(x - 1)^2 < 4$ 21. $x^2 - x < 0$

Teoria e exemplos

22. Não caia na armadilha $|-a| = a$. Para quais números reais a essa equação é realmente verdadeira? Para quais números reais ela é falsa?

23. Resolva a equação $|x - 1| = 1 - x$.

24. **Uma prova da desigualdade do triângulo** Justifique cada um dos passos enumerados na prova da desigualdade do triângulo, a seguir.

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b)^2 && (1)\\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 && (2)\\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 && (3)\\ &= (|a| + |b|)^2 \\ |a + b| &\leq |a| + |b| && (4)\end{aligned}$$

25. Prove que $|ab| = |a|\,|b|$ para quaisquer números a e b.

26. Se $|x| \leq 3$ e $x > -1/2$, o que você pode dizer a respeito de x?

27. Represente graficamente a desigualdade $|x| + |y| \leq 1$.

28. Para qualquer número a, prove que $|-a| = |a|$.

29. Seja a qualquer número positivo. Prove que $|x| > a$ se e somente se $x > a$ ou $x < -a$.

30. (a) Se b é qualquer número real diferente de zero, prove que $|1/b| = 1/|b|$.

(b) Prove que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ para quaisquer números a e $b \neq 0$.

B.2 Retas, círculos e parábolas

Esta seção aborda coordenadas, retas, distância, círculos e parábolas no plano. A noção de incremento também é discutida.

Coordenadas cartesianas no plano

Na seção anterior, identificamos os pontos da reta de números reais atribuindo-lhes coordenadas. Pontos no plano podem ser identificados com pares ordenados de números reais. Para começar, traçamos duas retas coordenadas perpendiculares que se cruzam no ponto 0 de cada uma. Essas retas recebem o nome de **eixos coordenados** no plano. No eixo x, o horizontal, os números

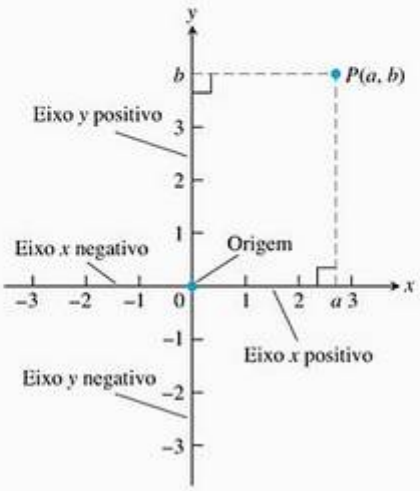


FIGURA B.4 As coordenadas cartesianas no plano baseiam-se em dois eixos perpendiculares que se cruzam na origem.

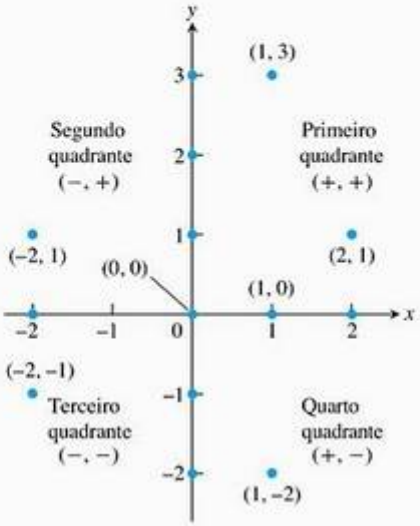


FIGURA B.5 Pontos identificados no sistema xy ou plano cartesiano. Todos os pontos dos eixos têm pares coordenados, mas geralmente são identificados com um número real apenas (assim, (1, 0) no eixo x é identificado como 1). Observe os padrões de sinal das coordenadas em cada quadrante.

Companion Website

Biografia histórica

René Descartes (1596-1650)

são indicados por x e aumentam para a direita. No eixo y, o vertical, os números são indicados por y e aumentam para cima (Figura B.4). Esses sentidos "para cima" e "para a direita" são positivos, enquanto os sentidos "para baixo" e "para a esquerda" são negativos. A **origem** O, também denominada 0, do sistema de coordenadas é o ponto no plano onde x e y são ambos zero.

Se P é qualquer ponto no plano, ele pode ser localizado por exatamente um par ordenado de números reais da seguinte maneira. Trace duas retas que cruzam P e são perpendiculares aos eixos coordenados. Essas retas cruzarão os eixos em pontos com coordenadas a e b (Figura B.4). O par ordenado (a, b) é atribuído ao ponto P e recebe o nome de **par coordenado**. O primeiro número, a, é a **coordenada x** (ou **abscissa**) de P; o segundo número, b, é a **coordenada y** (ou **ordenada**) de P. A abscissa de qualquer ponto no eixo y é 0. A ordenada de qualquer ponto no eixo x é 0. A origem é o ponto (0, 0).

Começando com um par ordenado (a, b), podemos reverter o processo e chegar a um ponto P correspondente no plano. Em geral, identificamos P com o par ordenado e escrevemos $P(a, b)$. Às vezes também nos referimos ao "ponto (a, b)" e fica claro, pelo contexto, quando (a, b) se refere a um ponto no plano e não a um intervalo aberto na reta real. A Figura B.5 mostra vários pontos identificados por suas coordenadas.

O sistema de coordenadas é chamado **sistema de coordenadas retangular** ou **sistema de coordenadas cartesiano** (em homenagem ao matemático francês do século XVI René Descartes). Os eixos coordenados desse plano coordenado ou cartesiano dividem o plano em quatro regiões denominadas **quadrantes**, numeradas em sentido anti-horário conforme mostrado na Figura B.5.

O **gráfico** de uma equação ou desigualdade nas variáveis x e y é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ no plano cujas coordenadas satisfazem essa equação ou desigualdade. Quando traçamos dados no plano de coordenadas ou representamos graficamente fórmulas cujas variáveis possuem diferentes unidades de medida, não precisamos usar a mesma escala nos dois eixos. Se traçamos tempo contra empuxo de um motor de foguete, por exemplo, não há motivo para colocar a marca que mostra 1 s no eixo do tempo à mesma distância da origem que a marca que mostra 1 lb no eixo do empuxo.

Em geral, porém, quando representamos graficamente funções cujas variáveis não representam grandezas físicas, e quando desenhamos figuras no plano de coordenadas para estudar sua geometria e trigonometria, tentamos fazer que as escalas dos eixos sejam idênticas. Uma unidade vertical de distância parecerá, nesse caso, igual a uma unidade horizontal. Como em um mapa ou um desenho em escala, os segmentos de reta que supostamente têm o mesmo comprimento vão de fato parecer iguais, e os ângulos supostamente congruentes vão parecer congruentes.

Já as telas de computadores e calculadoras são outra história. Normalmente, as escalas vertical e horizontal dos gráficos gerados digitalmente são diferentes, e existem distorções correspondentes em distâncias, coeficientes angulares e ângulos. Círculos podem parecer elipses, retângulos podem parecer quadrados, ângulos retos podem parecer agudos ou obtusos e assim por diante. Discutiremos essas telas e suas distorções com mais detalhes na Seção 1.4.

Incrementos e retas

Quando uma partícula se desloca de um ponto para outro em um plano, as variações líquidas de suas coordenadas são chamadas *incrementos*. Eles são

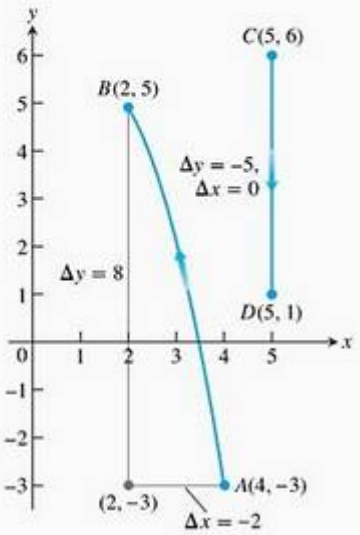


FIGURA B.6 Os incrementos podem ser positivos, negativos ou nulos (Exemplo 1).

obtidos subtraindo-se as coordenadas do ponto inicial daquelas do ponto final. Se x muda de x_1 para x_2, o **incremento** em x é

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

EXEMPLO 1 Indo do ponto $A(4, -3)$ para o ponto $B(2, 5)$, os incrementos das coordenadas x e y são

$$\Delta x = 2 - 4 = -2, \quad \Delta y = 5 - (-3) = 8$$

De $C(5, 6)$ para $D(5, 1)$, os incrementos são

$$\Delta x = 5 - 5 = 0, \quad \Delta y = 1 - 6 = -5$$

Veja a Figura B.6.

Dados dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ no plano, chamamos os incrementos $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta y = y_2 - y_1$, respectivamente, de **variação horizontal** e **variação vertical** de P_1 a P_2. Esses dois pontos sempre determinam uma única linha reta (em geral chamada simplesmente reta) que passa por ambos. Ela é denominada reta P_1P_2.

Toda reta não vertical no plano tem a propriedade de que a razão

$$m = \frac{\text{variação vertical}}{\text{variação horizontal}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

tem o mesmo valor para qualquer escolha de dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ na reta (Figura B.7). Isso porque, no caso de triângulos semelhantes, as razões dos lados correspondentes são iguais.

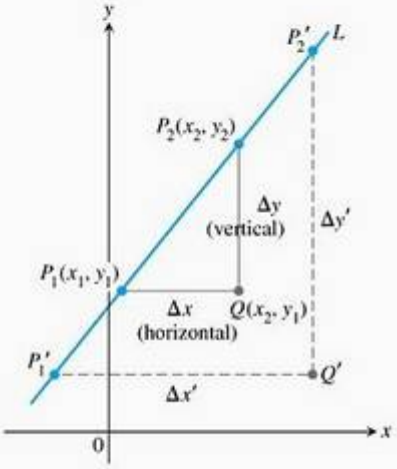


FIGURA B.7 Os triângulos P_1QP_2 e $P_1'Q'P_2'$ são semelhante, por isso a razão de seus lados tem o mesmo valor para quaisquer dois pontos da reta. Esse valor comum é o coeficiente angular da reta.

Definição Coeficiente angular

A constante

$$m = \frac{\text{variação vertical}}{\text{variação horizontal}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

é o **coeficiente angular** (ou inclinação) da reta não vertical P_1P_2.

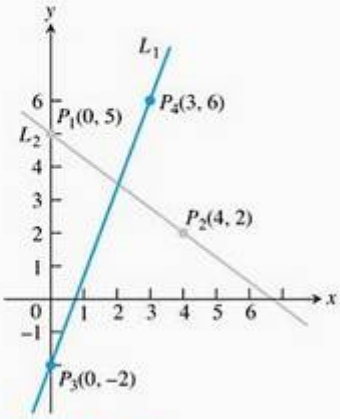


FIGURA B.8 O coeficiente angular de L_1 é

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - (-2)}{3 - 0} = \frac{8}{3}$$

Ou seja, y aumenta 8 unidades cada vez que x aumenta 3 unidades. O coeficiente angular de L_2 é

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 5}{4 - 0} = \frac{-3}{4}$$

Ou seja, y diminui 3 unidades cada vez que x aumenta 4 unidades.

O coeficiente angular nos diz a direção (para cima ou para baixo) e a inclinação de uma reta. Uma reta com coeficiente angular positivo dirige-se para cima e para a direita; uma reta com coeficiente angular negativo dirige-se para baixo e para a direita (Figura B.8). Quanto maior for o valor absoluto do coeficiente angular, mais rápida será a subida ou a descida da reta. O coeficiente angular de uma reta vertical é *indefinido*. Isso porque, como a variação horizontal Δx em uma reta vertical é zero, não podemos formar a razão do coeficiente angular m.

A direção e a inclinação de uma reta também podem ser medidas por meio de um ângulo. O **ângulo de inclinação** de uma reta que cruza o eixo x é o menor ângulo no sentido anti-horário a partir do eixo x na direção da reta (Figura B.9). A inclinação de uma reta horizontal é 0°. A inclinação de uma reta vertical é 90°. Se ϕ (a letra grega fi) é a inclinação de uma reta, então $0 \le \phi < 180°$.

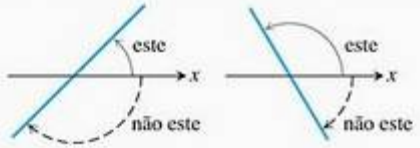


FIGURA B.9 Ângulos de inclinação são medidos no sentido anti-horário a partir do eixo x.

A Figura B.10 mostra a relação entre o coeficiente angular m de uma reta não vertical e o ângulo de inclinação ϕ dessa reta:

$$m = \text{tg}\,\phi$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{ou} \quad y = y_1 + m(x - x_1).$$

Retas têm equações relativamente simples. Todos os pontos em uma *reta vertical* que passa pelo ponto a no eixo x têm abscissas iguais a a. Logo, $x = a$ é uma equação da reta vertical. De modo análogo, $y = b$ é uma equação da *reta horizontal* que cruza o eixo y em b. (Veja a Figura B.11.)

Podemos escrever uma equação para qualquer reta não vertical L se conhecemos seu coeficiente angular m e suas coordenadas no ponto $P_1(x_1, y_1)$. Se $P(x, y)$ é *qualquer* outro ponto de L, então podemos usar os dos pontos P_1 e P para calcular o coeficiente angular,

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 5}{4 - 0} = \frac{-3}{4}$$

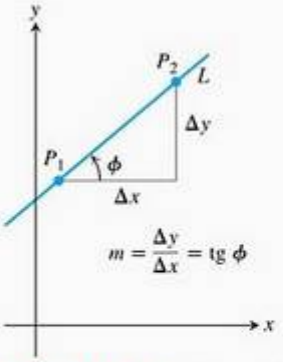


FIGURA B.10 O coeficiente angular de uma reta não vertical é a tangente de seu ângulo de inclinação.

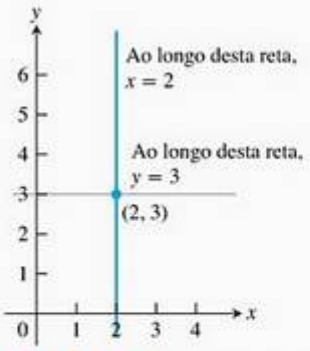


FIGURA B.11 As equações-padrão para retas verticais e horizontais através do ponto (2, 3) são $x = 2$ e $y = 3$.

de maneira que

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{ou} \qquad y = y_1 + m(x - x_1).$$

A equação

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

é a **equação ponto/coeficiente angular** da reta que passa pelo ponto (x_1, y_1) e tem coeficiente angular m.

EXEMPLO 2 Escreva uma equação para a reta que passa pelo ponto (2, 3) com coeficiente angular −3/2.

SOLUÇÃO Substituímos $x_1 = 2$, $y_1 = 3$ e $m = -3/2$ na equação ponto/coeficiente angular e obtemos

$$y = 3 - \frac{3}{2}(x - 2), \qquad \text{ou} \qquad y = -\frac{3}{2}x + 6$$

Quando $x = 0$, $y = 6$, de modo que a reta cruza o eixo y em $y = 6$.

EXEMPLO 3 Uma reta que passa por dois pontos

Escreva uma equação para a reta que passa pelos pontos (−2, −1) e (3, 4).

SOLUÇÃO O coeficiente angular da reta é

$$m = \frac{-1 - 4}{-2 - 3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

Podemos usar esse coeficiente angular com qualquer um dos pontos dados na equação ponto/coeficiente angular:

Com $(x_1, y_1) = (-2, -1)$	**Com $(x_1, y_1) = (3, 4)$**
$y = -1 + 1 \cdot (x - (-2))$	$y = 4 + 1 \cdot (x - 3)$
$y = -1 + x + 2$	$y = 4 + x - 3$
$y = x + 1$	$y = x + 1$

Mesmo resultado

De qualquer modo, $y = x + 1$ é uma equação da reta (Figura B.12).

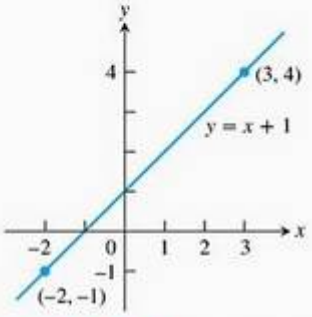


FIGURA B.12 A reta do Exemplo 3.

A ordenada do ponto onde uma reta não vertical corta o eixo y é chamada reta ou **intercepto do eixo y**. Similarmente, o **intercepto do eixo x** de uma reta não horizontal é a coordenada x do ponto onde ela cruza o eixo x (Figura B.13). Uma reta com coeficiente angular m e coeficiente linear b passa por $(0, b)$, tendo portanto a equação

$$y = b + m(x - 0) \quad \text{ou, simplificando,} \quad y = mx + b$$

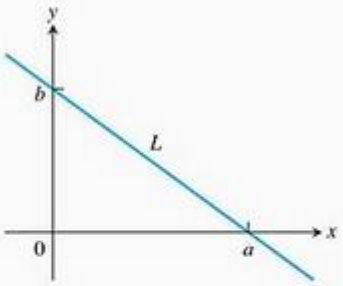


FIGURA B.13 A reta L tem o intercepto do eixo x em a e o intercepto do eixo y em b.

A equação

$$y = mx + b$$

é a **equação reduzida da reta** com coeficiente angular m e coeficiente linear b.

Retas com equação na forma $y = mx$ têm coeficiente linear 0, portanto atravessam a origem. Equações de retas são chamadas equações **lineares**.

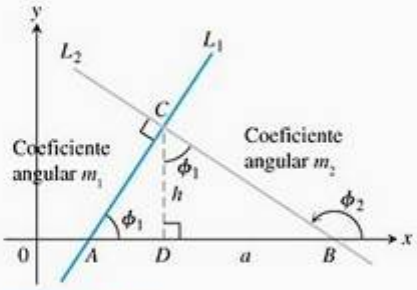


FIGURA B-14 ΔADC é semelhante a ΔCDB. Conseqüentemente, ϕ_1 também é o ângulo superior em ΔCDB. A partir dos lados de ΔCDB, temos $\operatorname{tg} \phi_1 = a/h$.

A equação

$$Ax + By = C \quad \text{(com } A \text{ e } B \text{ não simultaneamente nulos)}$$

é chamada **equação geral da reta** em x e y, pois seu gráfico sempre representa uma reta, e todas as retas têm uma equação nessa forma (mesmo aquelas que apresentam coeficientes angulares indefinidos).

Retas paralelas e perpendiculares

Retas que são paralelas têm ângulos de inclinação iguais; logo, possuem o mesmo coeficiente angular (se não forem verticais). De maneira inversa, retas com o mesmo coeficiente angular têm ângulos de inclinação iguais e, portanto, são paralelas.

Se duas retas não verticais L_1 e L_2 são perpendiculares, seus coeficientes angulares m_1 e m_2 satisfazem $m_1 m_2 = -1$, portanto cada coeficiente angular é o *recíproco negativo* do outro:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \qquad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Para perceber isso, observe os triângulos semelhantes na Figura B.14 e note que $m_1 = a/h$ e $m_2 = -h/a$. Conseqüentemente, $m_1 m_2 = (a/h)(-h/a) = -1$.

Distância e círculos no plano

A distância entre pontos no plano é calculada com uma fórmula que vem do teorema de Pitágoras (Figura B.15).

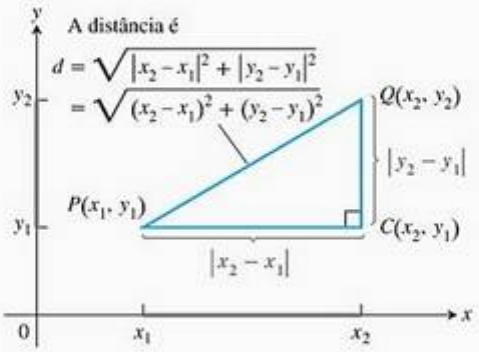


FIGURA B.15 Para calcular a distância entre $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$, aplique o teorema de Pitágoras ao triângulo PCQ.

Fórmula da distância para pontos no plano

A distância entre $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ é

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EXEMPLO 4 Calculando a distância

(a) A distância entre $P(-1, 2)$ e $Q(3, 4)$ é

$$\sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

(b) A distância da origem até $P(x, y)$ é

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

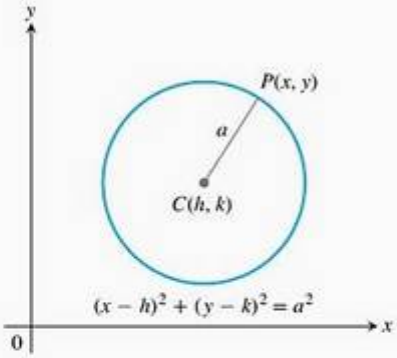


FIGURA B.16 Um círculo de raio a no plano xy, com centro em (h, k).

Por definição, um **círculo** de raio a é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ cuja distância de certo centro $C(h, k)$ é igual a a (Figura B.16). De acordo com a fórmula da distância, P está sobre o círculo se e somente se

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = a$$

portanto

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2 \qquad (1)$$

A Equação (1) é a **equação-padrão** de um círculo com centro (h, k) e raio a. O círculo de raio $a = 1$ e centro na origem recebe o nome de **círculo unitário**. Sua equação é

$$x^2 + y^2 = 1$$

EXEMPLO 5

(a) A equação-padrão para o círculo de raio 2 centrado em (3, 4) é

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2 = 4$$

(b) O círculo

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 3$$

tem $h = 1$, $k = -5$ e $a = \sqrt{3}$. O centro é o ponto $(h, k) = (1, -5)$ e o raio é $a = \sqrt{3}$.

Se a equação de um círculo não está na forma-padrão, podemos determinar o centro e o raio do círculo convertendo-a para a forma-padrão. A técnica algébrica que nos permite fazer isso é chamada *completar o quadrado*.

EXEMPLO 6 Determinando o centro e o raio de um círculo

Determine o centro e o raio do círculo

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

SOLUÇÃO Convertemos a equação para a forma-padrão completando os quadrados em x e y:

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$	Comece com a equação dada.
$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) = 3$	Agrupe os termos. Passe a constante para o lado direito.
$\left(x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 - 6y + \left(\frac{-6}{2}\right)^2\right) = 3 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{2}\right)^2$	Adicione o quadrado de metade do coeficiente de x a cada lado da equação. Faça o mesmo em relação a y. As expressões entre parênteses do lado esquerdo agora são quadrados perfeitos.
$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 3 + 4 + 9$	Escreva cada termo quadrático como uma expressão linear ao quadrado.
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$	

O centro é $(-2, 3)$ e o raio é $a = 4$.

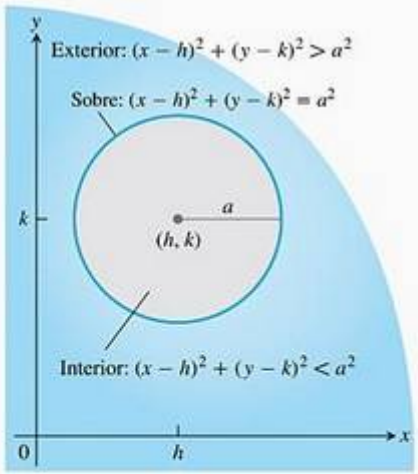


FIGURA B.17 O interior e o exterior do círculo $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$

Os pontos (x, y) que satisfazem a desigualdade

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 < a^2$$

formam a região **interior** do círculo com centro (h, k) e raio a (Figura B.17). O **exterior** do círculo consiste nos pontos (x, y) que satisfazem

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 > a^2$$

Parábolas

A definição e as propriedades geométricas das parábolas gerais são abordadas na Seção 10.1, Volume II. Aqui, vamos nos concentrar nas parábolas que surgem como gráficos de equações da forma $y = ax^2 + bx + c$.

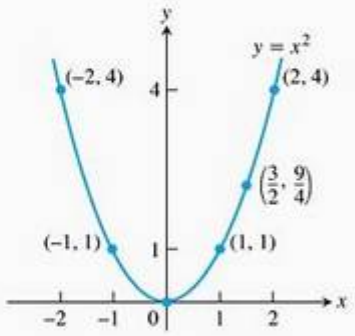


FIGURA B.18 A parábola $y = x^2$ (Exemplo 7).

EXEMPLO 7 A parábola $y = x^2$

Considere a equação $y = x^2$. Alguns dos pontos cujas coordenadas satisfazem essa equação são (0, 0), (1, 1), $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, (−1, 1), (2, 4) e (−2, 4). Esses pontos (e todos os outros que satisfazem a equação) formam uma curva suave denominada parábola (Figura B.18).

O gráfico de uma equação que tenha a forma

$$y = ax^2$$

é uma **parábola** cujo **eixo** (eixo de simetria) é o eixo y. O **vértice** (ponto em que a parábola e o eixo se cruzam) fica na origem. A parábola abre-se para cima se $a > 0$ e para baixo se $a < 0$. Quanto maior o valor de $|a|$, mais estreita a parábola (Figura B.19).

Em geral, o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ é uma versão transladada e reescalada da parábola $y = x^2$. Na Seção 1.3, discutimos com mais detalhes a translação e o reescalamento de gráficos.

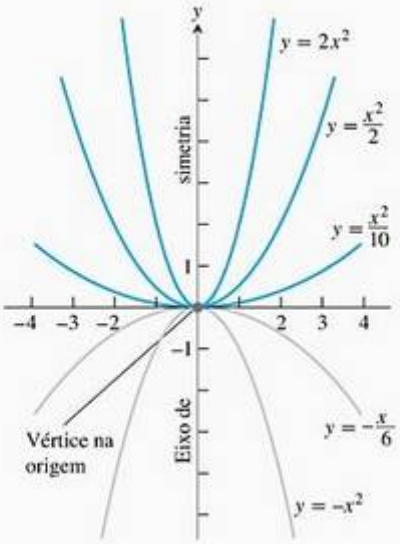


FIGURA B.19 Além de determinar a direção em que a parábola $y = ax^2$ se abre, o número a é um fator de escala. A parábola se alarga conforme a tende a zero e se estreita conforme $|a|$ aumenta.

O gráfico de $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

O gráfico da equação $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, é uma parábola. A parábola se abre para cima se $a > 0$ e para baixo se $a < 0$. O **eixo** é a reta

$$x = -\frac{b}{2a} \tag{2}$$

O **vértice** da parábola é o ponto onde o eixo e a parábola se cruzam. Sua abscissa é $x = -b/2a$; encontramos sua ordenada substituindo $x = -b/2a$ na equação da parábola.

Observe que, se $a = 0$, então temos $y = bx + c$, que é a equação de uma reta. O eixo, dado pela Equação (2), pode ser determinado completando-se o quadrado ou usando-se uma técnica estudada na Seção 4.1.

EXEMPLO 8 Representando graficamente uma parábola

Represente graficamente a equação $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$

SOLUÇÃO Comparando a equação com $y = ax^2 + bx + c$, temos

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 4$$

Como $a < 0$, a parábola abre-se para baixo. De acordo com a Equação (2), o eixo é a reta vertical

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-1/2)} = -1$$

Quando $x = -1$, temos

$$y = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) + 4 = \frac{9}{2}$$

O vértice é (−1, 9/2).

Os interceptos do eixo x estão onde $y = 0$:

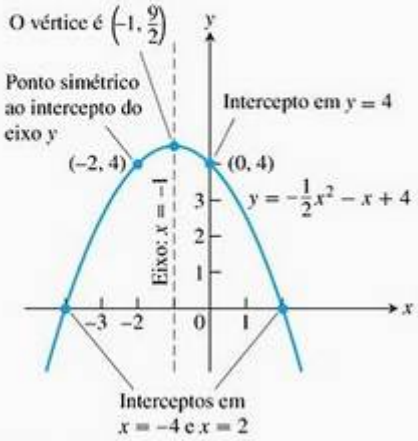


FIGURA B.20 A parábola do Exemplo 8.

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$$
$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$(x - 2)(x + 4) = 0$$
$$x = 2, \qquad x = -4$$

Na Figura B.20, traçamos alguns pontos no gráfico, esboçamos o eixo e usamos a direção de abertura para completar o gráfico.

Exercícios B.2

Incrementos e distância

Nos exercícios 1 e 2, uma partícula se desloca de A até B no plano de coordenadas. Determine os incrementos Δx e Δy nas coordenadas da partícula. Determine também a distância entre A e B.

1. $A(-3, 2)$, $B(-1, -2)$
2. $A(-3,2; -2)$, $B(-8,1; -2)$

Nos exercícios 3 e 4, descreva os gráficos das equações.

3. $x^2 + y^2 = 1$
4. $x^2 + y^2 \leq 3$

Coeficientes angulares, retas e interceptos

Trace no plano de coordenadas os pontos dados nos exercícios 5 e 6; em seguida, encontre o coeficiente angular (caso haja) da reta que eles determinam. Além disso, encontre o coeficiente angular comum (caso haja) das retas perpendiculares à reta AB.

5. $A(-1, 2)$, $B(-2, -1)$
6. $A(2, 3)$, $B(-1, 3)$

Nos exercícios 7 e 8, encontre uma equação para **(a)** a reta vertical e **(b)** a reta horizontal que passa pelo ponto dado.

7. $(-1, 4/3)$
8. $\left(0, -\sqrt{2}\right)$

Nos exercícios 9–15, escreva uma equação para cada reta descrita.

9. Passa por $(-1, 1)$ e tem coeficiente angular -1.
10. Passa por $(3, 4)$ e $(-2, 5)$.
11. Tem coeficiente angular $-5/4$ e coeficiente linear 6.
12. Passa por $(-12, -9)$ e tem coeficiente angular 0.
13. Tem coeficiente linear 4 e intercepto do eixo x igual a -1.
14. Passa por $(5, -1)$ e é paralela à reta $2x + 5y = 15$.
15. Passa por $(4, 10)$ e é perpendicular à reta $6x - 3y = 5$.

Nos exercícios 16 e 17, determine os interceptos dos eixos x e y da reta e use essa informação para representar a reta graficamente.

16. $3x + 4y = 12$
17. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6}$
18. Existe algo de especial na relação entre as retas $Ax + By = C_1$ e $Bx - Ay = C_2$ $(A \neq 0, B \neq 0)$? Justifique sua resposta.

Incrementos e movimento

19. Uma partícula começa em $A(-2, 3)$ e suas coordenadas variam pelos incrementos $\Delta x = 5$, $\Delta y = -6$. Determine sua nova posição.
20. As coordenadas de uma partícula variam por $\Delta x = 5$ e $\Delta y = 6$ quando ela se move de $A(x, y)$ para $B(3, -3)$. Determine x e y.

Círculos

Nos exercícios 21–23, ache uma equação para o círculo com centro $C(h, k)$ e raio a dados. Em seguida, esboce o círculo no plano xy. Inclua o centro do círculo em seu esboço. Além disso, identifique os interceptos dos eixos x e y do círculo, se houver algum, com seus pares coordenados.

21. $C(0, 2), \quad a = 2$ **22.** $C(-1, 5), \quad a = \sqrt{10}$

23. $C\left(-\sqrt{3}, -2\right), \quad a = 2$

Represente graficamente os círculos cujas equações são dadas nos exercícios 24–26. Identifique o centro e os interceptos (se houver) de cada círculo com seus pares coordenados.

24. $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$

25. $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$ **26.** $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$

Parábolas

Represente graficamente as parábolas dos exercícios 27–30. Identifique o vértice, o eixo e os interceptos em cada caso.

27. $y = x^2 - 2x - 3$ **28.** $y = -x^2 + 4x$

29. $y = -x^2 - 6x - 5$ **30.** $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 4$

Desigualdades

Nos exercícios 31–36, descreva as regiões definidas pelas desigualdades e pares de desigualdades.

31. $x^2 + y^2 > 7$ **32.** $(x - 1)^2 + y^2 \leq 4$

33. $x^2 + y^2 > 1, \quad x^2 + y^2 < 4$

34. $x^2 + y^2 + 6y < 0, \quad y > -3$

35. Escreva uma desigualdade que descreva os pontos que estão dentro do círculo com centro (–2, 1) e raio $\sqrt{6}$.

36. Escreva um par de desigualdades que descrevam os pontos que estão dentro ou sobre o círculo com centro (0, 0) e raio $\sqrt{2}$ e sobre ou à direita da reta vertical que passa por (1, 0), ou à direita dela.

Retas, círculos e parábolas que se cruzam

Nos exercícios 37–40, faça o gráfico das duas equações e estime os pontos em que os gráficos se cruzam.

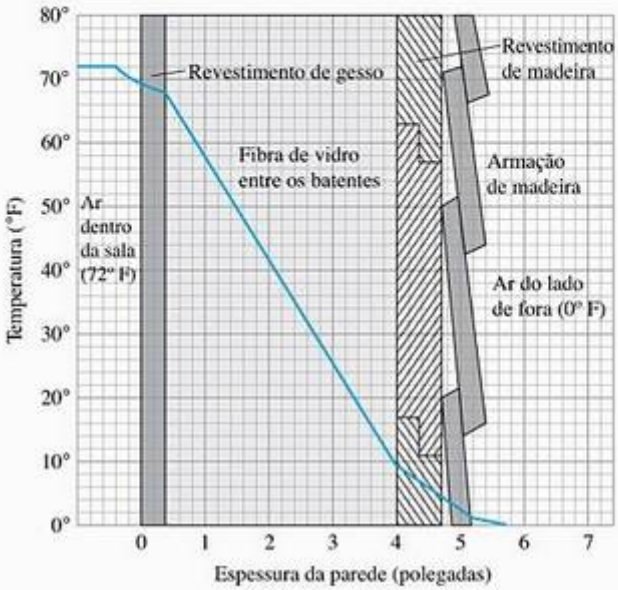
37. $y = 2x, \quad x^2 + y^2 = 1$ **38.** $y - x = 1, \quad y = x^2$

39. $y = -x^2, \quad y = 2x^2 - 1$

40. $x^2 + y^2 = 1, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1$

Aplicações

41. Isolamento Medindo os coeficientes angulares na figura, estime a variação de temperatura, em graus por polegada, para: **(a)** o revestimento de gesso; **(b)** o isolamento de fibra de vidro; **(c)** o revestimento de madeira.

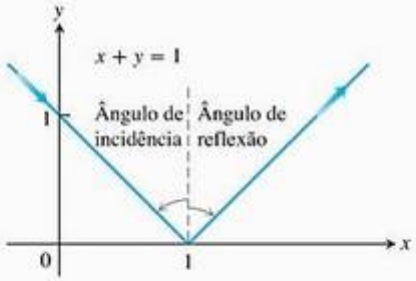


Nos exercícios 41 e 42, a temperatura da parede varia.

42. Isolamento De acordo com a figura do Exercício 41, qual desses materiais é o melhor isolante? E o pior? Explique.

43. Pressão debaixo d'água A pressão p experimentada por um mergulhador debaixo d'água está relacionada com sua profundidade d por meio da fórmula $p = kd + 1$ (k é uma constante). Quando $d = 0$ metro, a pressão é 1 atmosfera. A 100 metros a pressão é 10,94 atmosferas. Determine a pressão a 50 metros.

44. Luz refletida Um raio de luz sai do segundo quadrante, passando ao longo da reta $x + y = 1$, sendo refletido no eixo x. O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão quando medidos em relação à perpendicular ao eixo x. Escreva uma equação para a reta ao longo da qual a luz refletida se propaga.



O caminho do raio de luz no Exercício 44. Os ângulos de incidência e reflexão são medidos a partir da perpendicular.

45. Fahrenheit contra Celsius No plano FC, esboce o gráfico da equação

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

que relaciona as temperaturas expressas em Fahrenheit e Celsius. No mesmo gráfico, trace a reta $C = F$. Há alguma

temperatura que apresente a mesma leitura nos termômetros Fahrenheit e Celsius? Se existe, qual é?

46. **Uma ferrovia com cremalheira** Os engenheiros civis calculam o coeficiente angular do leito das estradas como a razão entre a distância que ela sobe ou desce verticalmente e a distância que ela cobre na horizontal. Eles chamam essa razão **grau** do leito da estrada, em geral expresso como porcentagem. Ao longo da costa, os graus das estradas de ferro comerciais geralmente são menores que 2%. Nas montanhas, podem chegar a 4%. Os graus de rodovias normalmente são menores que 5%.

A parte mais íngreme de uma ferrovia com cremalheira apresenta um grau excepcional de 37,1%. Ao longo dessa parte do percurso, os assentos da parte anterior do vagão estão 14 pés acima daqueles que estão no fundo. Qual é a distância aproximada que separa a primeira e a última fileira do vagão?

Teoria e exemplos

47. Calculando o comprimento dos lados, mostre que o triângulo com vértices nos pontos $A(1, 2)$, $B(5, 5)$ e $C(4, -2)$ é isósceles, e não eqüilátero.

48. Mostre que o triângulo com vértices $A(0, 0)$, $B(1, \sqrt{3})$ e $C(2, 0)$ é eqüilátero.

49. Mostre que os pontos $A(2, -1)$, $B(1, 3)$ e $C(-3, 2)$ são vértices de um quadrado e determine o quarto vértice.

50. Três paralelogramos diferentes têm vértices em $(-1, 1)$, $(2, 0)$ e $(2, 3)$. Esboce-os e encontre as coordenadas do quarto vértice de cada um.

51. Para qual valor de k a reta $2x + ky = 3$ é perpendicular à reta $4x + y = 1$? Para qual valor de k as retas são paralelas?

52. **Ponto médio de um segmento de reta** Mostre que o ponto com coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

é o ponto médio do segmento de reta que une $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$.

B.3 Funções trigonométricas

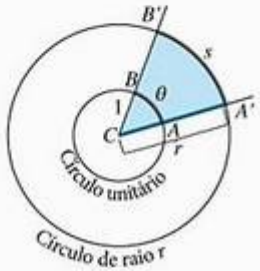


FIGURA B.21 A medida, em radianos, do ângulo ACB é o comprimento θ do arco AB no círculo unitário de centro C. O valor de θ pode ser obtido a partir de qualquer outra circunferência, entretanto sua medida será a razão s/r. Assim sendo, $s = r\theta$ é o comprimento do arco em uma circunferência de raio r quando θ é medido em radianos.

Fórmulas para conversão

1 grau $= \dfrac{\pi}{180}$ ($\approx 0{,}02$) radianos

De graus para radianos: multiplicar por $\dfrac{\pi}{180}$

1 radiano $= \dfrac{\pi}{180}$ (≈ 57) graus

De radianos para graus: multiplicar por $\dfrac{\pi}{180}$

Nesta seção, vamos rever as funções trigonométricas básicas. As funções trigonométricas são importantes devido à periodicidade, ou repetição. Assim, elas podem representar vários processos naturais periódicos.

A unidade radiano

Em navegação e astronomia, os ângulos são medidos em graus. Em cálculo, entretanto, é melhor fazer uso de unidades denominadas *radianos*, já que elas simplificam alguns cálculos.

A medida, em unidade **"radiano"**, do ângulo ACB no centro de um círculo unitário (Figura B.21) equivale ao comprimento do arco que ACB forma no círculo unitário. A Figura B.21 mostra que $s = r\theta$ é o **comprimento do arco** que se forma em um círculo de raio r quando o ângulo subscrito θ é medido em radianos.

Como a circunferência do círculo é igual a 2π e uma volta inteira equivale a 360°, a relação entre radianos e graus é dada por

$$\pi \text{ radianos} = 180^\circ$$

Por exemplo, 45° em radianos equivale a

$$45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{rad}$$

e $\pi/6$ radianos é igual a

$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30^\circ$$

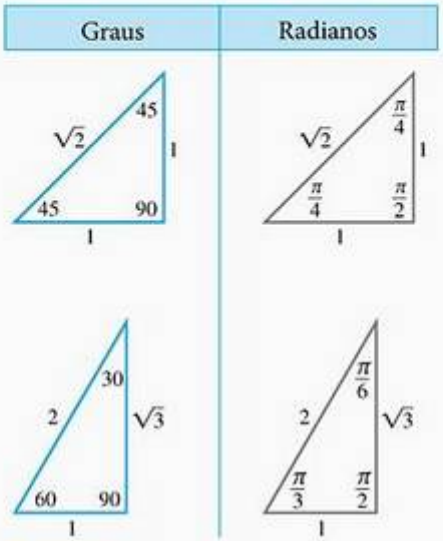


FIGURA B.22 Os ângulos de dois triângulos simples em graus e radianos.

A Figura B.22 mostra os ângulos de dois triângulos comuns em ambas as medidas (graus e radianos).

Um ângulo no plano xy está na **posição-padrão** se o seu vértice está posicinado na origem e sua semi-reta inicial percorre o eixo x positivo (Figura B.23). São atribuídas medidas positivas aos ângulos medidos no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo. Os ângulos medidos no sentido horário recebem medidas negativas.

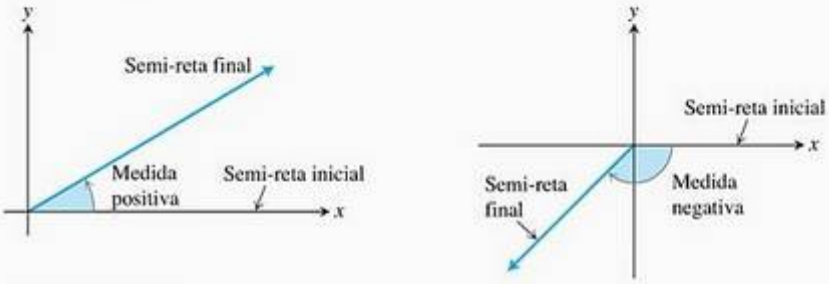


FIGURA B.23 Ângulos na posição-padrão no eixo xy.

Quando utilizamos ângulos para descrever rotações no sentido anti-horário, as medidas podem variar arbitrariamente entre 2π radianos e 360°. Analogamente, ângulos que descrevam rotações no sentido horário podem ter medidas negativas de todos os tamanhos (Figura B.24).

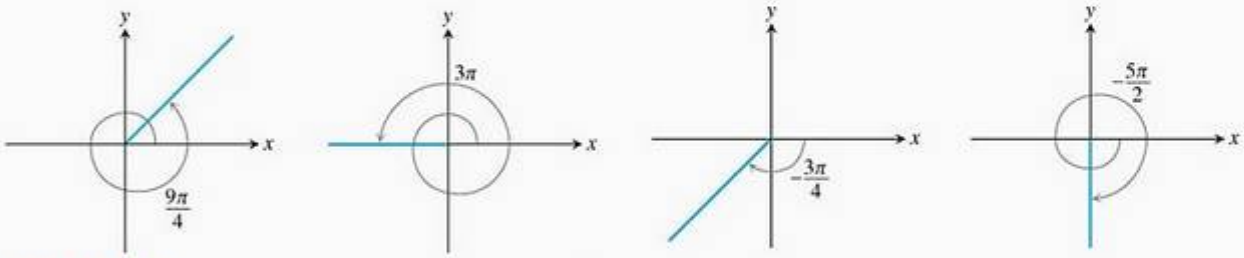
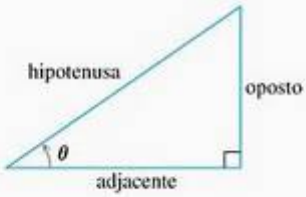


FIGURA B.24 Quando diferentes de zero, as medidas em radianos podem assumir valores positivos e negativos e ultrapassar 2π.

Convenção para ângulos: use radianos

Neste livro, assumimos que todos os ângulos são medidos em radianos; a menos que se diga explicitamente que a medida está sendo expressa em graus ou outra unidade. Quando mencionamos a medida $\pi/3$, estamos nos referindo a $\pi/3$ radianos (que equivalem a 60°), e não a $\pi/3$ graus. Portanto, mantenha a sua calculadora no modo radiano.



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{adj}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{op}}{\text{adj}} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\text{adj}}{\text{op}}$$

FIGURA B.25 Relações trigonométricas do ângulo agudo.

As seis funções trigonométricas básicas

Você provavelmente já está familiarizado com a definição das funções trigonométricas para um ângulo agudo em função dos lados de um triângulo retângulo (Figura B.25). Essa definição passa a valer também para os ângulos obtusos e negativos quando, primeiro, os colocamos na posição-padrão em uma circunferência de raio r. Em seguida, definimos a função trigonométrica segundo as coordenadas do ponto $P(x,y)$ onde a semi-reta final do ângulo cruza a circunferência (Figura B.26).

seno: $\text{sen}\,\theta = \dfrac{y}{r}$ **cossecante:** $\text{cosec}\,\theta = \dfrac{r}{y}$

cosseno: $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ **secante:** $\sec\theta = \dfrac{r}{x}$

tangente: $\text{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x}$ **cotangente:** $\text{cotg}\,\theta = \dfrac{x}{y}$

A ampliação do escopo dessas definições está em conformidade com as definições do triângulo retângulo quando o ângulo é agudo (Figura B.27).

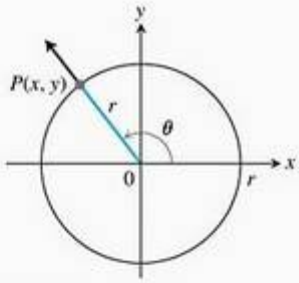


FIGURA B.26 As funções trigonométricas de dado ângulo θ são definidas em termos de x, y e r.

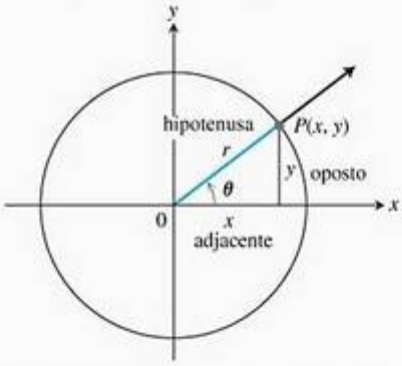


FIGURA B.27 As duas definições para ângulos agudos concordam.

Observe também as seguintes definições sempre que os quocientes estiverem definidos.

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \qquad \text{cotg}\,\theta = \frac{1}{\text{tg}\,\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$$

Conforme você pode ver, $\text{tg}\,\theta$ e $\sec\theta$ não são definidas quando $x = 0$. Isso significa que esses valores também não são definidos quando θ é $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$ etc. Assim sendo, $\text{cotg}\,\theta$ e $\text{cosec}\,\theta$ não são definidas para valores de θ nos quais $y = 0$, ou seja, $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ etc.

Os valores exatos dessas relações trigonométricas para alguns ângulos podem ser lidos a partir dos triângulos da Figura B.22. Por exemplo,

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

A regra CTST (Figura B.28) ajuda a lembrar quando as funções trigonométricas básicas são positivas ou negativas. A partir do triângulo da Figura B.29, por exemplo, vemos que

$$\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \qquad \text{tg}\,\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Utilizando um método semelhante, determinamos os valores de $\text{sen}\,\theta$, $\cos\theta$ e $\text{tg}\,\theta$ demonstrados na Tabela B.2.

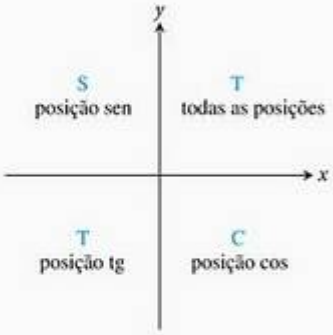


FIGURA B.28 A regra CTST nos diz quais funções trigonométricas são positivas e negativas em cada quadrante.

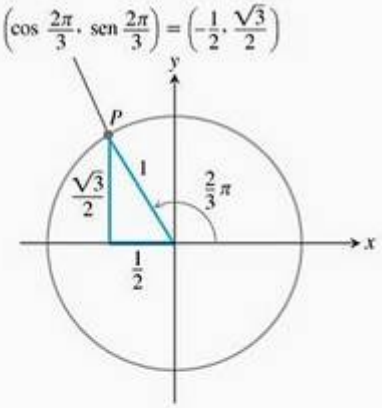


FIGURA B.29 O triângulo para cálculo do seno e do cosseno de $2\pi/3$ radianos. Os comprimentos dos lados vêm da geometria dos triângulos retângulos.

TABELA B.2 Os valores de sen θ, cos θ e tg θ para valores selecionados de θ

Graus	**−180**	**−135**	**−90**	**−45**	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**	**135**	**150**	**180**	**270**	**360**
θ (radianos)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos θ	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg θ	0	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0		0

A maioria das calculadoras e dos computadores fornece automaticamente os valores das funções trigonométricas para ângulos cujas medidas sejam fornecidas em radianos ou graus.

EXEMPLO 1 Determinando os valores das funções trigonométricas

Para tg $\theta = 3/2$ e $0 < \theta < \pi/2$, encontre as outras cinco funções trigonométricas de θ.

SOLUÇÃO A partir de tg $\theta = 3/2$, construímos o triângulo retângulo de altura 3 (oposto) e base 2 (adjacente) representado na Figura B.30. O teorema de Pitágoras nos dá o comprimento da hipotenusa, $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. A partir do triângulo, escrevemos os valores das outras cinco funções trigonométricas:

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}, \quad \operatorname{cotg}\theta = \frac{2}{3}$$

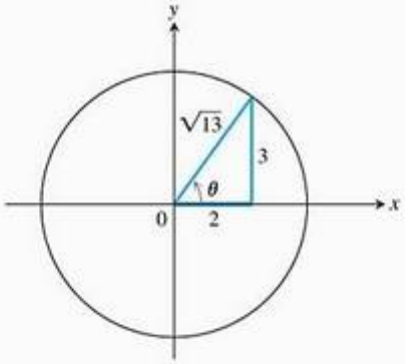


FIGURA B.30 O triângulo para calcular as funções trigonométricas do Exemplo 1.

Periodicidade e gráficos das funções trigonométricas

Quando um ângulo de medida θ e um ângulo de medida $\theta + 2\pi$ estão na posição-padrão, suas semi-retas finais coincidem. Portanto, as funções trigonométricas desses dois ângulos têm os mesmos valores:

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \quad \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \quad \operatorname{tg}(\theta + 2\pi) = \operatorname{tg}\theta$$

$$\sec(\theta + 2\pi) = \sec\theta \quad \operatorname{cosec}(\theta + 2\pi) = \operatorname{cosec}\theta \quad \operatorname{cotg}(\theta + 2\pi) = \operatorname{cotg}\theta$$

Similarmente, $\cos(\theta - 2\pi) = \cos\theta$, $\operatorname{sen}(\theta - 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$ e assim por diante. Descrevemos esse comportamento dizendo que as seis funções trigonométricas básicas são *periódicas*.

Definição Função periódica

Uma função $f(x)$ é **periódica** se existe um número positivo p tal que $f(x + p) = f(x)$ para qualquer valor de x. O menor valor possível de p é o **período** de f.

Quando traçamos gráficos de funções trigonométricas no plano cartesiano, geralmente denotamos a variável independente (radianos) por x em vez de θ (Figura B.31).

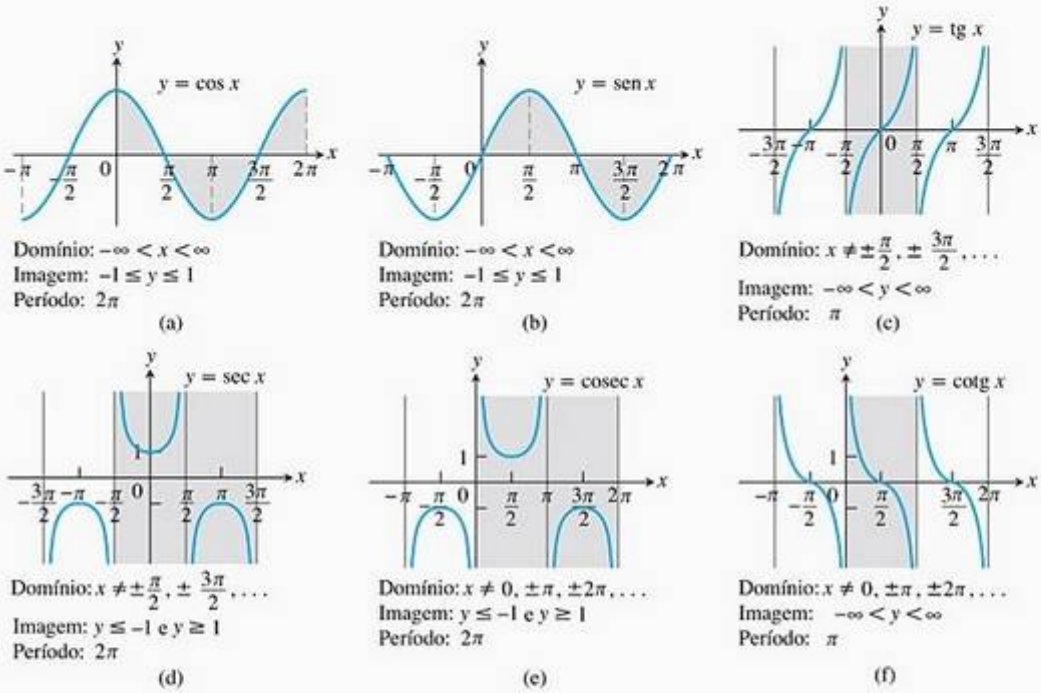


FIGURA B.31 Gráficos das funções (a) cosseno, (b) seno, (c) tangente, (d) secante, (e) cossecante e (f) cotangente utilizando a medida em radianos. O sombreado em cada uma das funções trigonométricas indica a sua periodicidade.

Períodos das funções trigonométricas

Período π:	$\text{tg}\,(x+\pi) = \text{tg}\,x$
	$\text{cotg}\,(x+\pi) = \text{cotg}\,x$
Período 2π:	$\text{sen}\,(x+2\pi) = \text{sen}\,x$
	$\cos\,(x+2\pi) = \cos x$
	$\sec\,(x+2\pi) = \sec x$
	$\text{cosec}\,(x+2\pi) = \text{cosec}\,x$

Par	**Ímpar**
$\cos(-x) = \cos x$	$\text{sen}(-x) = -\text{sen}\,x$
$\sec(-x) = \sec x$	$\text{tg}(-x) = -\text{tg}\,x$
	$\text{cosec}(-x) = -\text{cosec}\,x$
	$\text{cotg}\,(-x) = -\text{cotg}\,x$

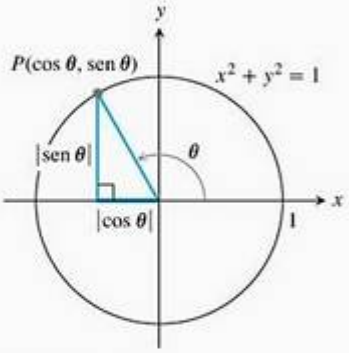


FIGURA B.32 O triângulo de referência para o ângulo θ.

Como podemos ver na Figura B.31, as funções tangente e cotangente têm período $p = \pi$. As outras quatro funções apresentam período 2π. As funções periódicas são importantes porque muitos dos comportamentos estudados em ciência são periódicos. Um teorema do cálculo avançado diz que toda função periódica utilizada na modelagem matemática pode ser escrita como uma combinação algébrica de senos e cossenos. Demonstramos como isso é possível na Seção 11.11, Volume II.

As simetrias nos gráficos da Figura B.31 revelam que as funções cosseno e secante são pares, enquanto as outras quatro funções são ímpares.

Identidades

As coordenadas de qualquer ponto $P(x, y)$ no plano podem ser expressas considerando-se a distância entre o ponto e sua origem e o ângulo que a semireta OP forma com o eixo positivo x (Figura B.27). Como $x/r = \cos\theta$ e $y/r = \text{sen}\,\theta$, temos:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Quando $r = 1$, podemos aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo de referência da Figura B.32 e obter a equação

$$\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1 \tag{1}$$

Essa equação, verdadeira para qualquer valor de θ, é a identidade mais freqüentemente utilizada na trigonometria. Dividindo-se essa identidade por $\cos^2\theta$ e depois por $\text{sen}^2\,\theta$, temos

$$1 + \text{tg}^2\,\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \text{cotg}^2\,\theta = \text{cosec}^2\,\theta$$

As fórmulas a seguir são válidas para quaisquer ângulos A e B (Exercício 32).

Fórmulas para adição

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \text{sen}\, A\, \text{sen}\, B$$

$$\text{sen}\,(A + B) = \text{sen}\, A \cos B - \cos A\, \text{sen}\, B \qquad (2)$$

Existem fórmulas semelhantes para cos $(A - B)$ e sen $(A - B)$, conforme demonstram os exercícios 21 e 22. Todas as identidades trigonométricas apresentadas neste livro foram derivadas das equações (1) e (2). Substituindo, por exemplo, θ por A e B na fórmula para adição, temos

Fórmulas para o ângulo duplo

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta$$

$$\text{sen}\, 2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta \cos\theta \qquad (3)$$

Outras fórmulas podem ser obtidas pela combinação das equações

$$\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1, \qquad \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta = \cos 2\theta$$

Somamos as duas equações para chegar a $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$ e subtraímos a segunda da primeira para obter $2\,\text{sen}^2\,\theta = 1 - \cos 2\theta$. Esse procedimento nos permite chegar às identidades demonstradas a seguir, úteis no cálculo de integrais.

Fórmulas para o ângulo metade

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad (4)$$

$$\text{sen}^2\,\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \qquad (5)$$

Lei dos cossenos

Sendo a, b e c os lados de um triângulo ABC e θ o ângulo oposto a c, temos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \qquad (6)$$

Essa equação é conhecida como a **lei dos cossenos**.

Podemos ver por que essa lei é válida ao introduzirmos os eixos cartesianos com a origem em C e o eixo x positivo ao longo de um dos lados do triângulo, como na Figura B.33. As coordenadas de A passam a ser $(b, 0)$ e as de B, $(a\cos\theta, a\,\text{sen}\,\theta)$. Portanto, o quadrado da distância entre A e B será

$$\begin{aligned} c^2 &= (a\cos\theta - b)^2 + (a\,\text{sen}\,\theta)^2 \\ &= a^2\underbrace{(\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta)}_{1} + b^2 - 2ab\cos\theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta. \end{aligned}$$

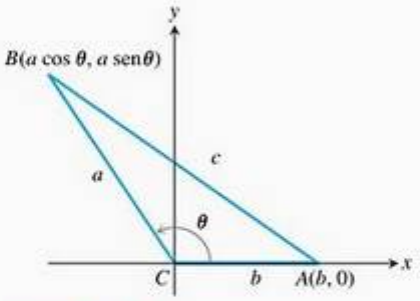


FIGURA B.33 O quadrado da distância entre A e B fornece a lei dos cossenos.

A lei dos cossenos generaliza o teorema de Pitágoras. Se $\theta = \pi/2$, então $\cos\theta = 0$ e $c^2 = a^2 + b^2$.

Exercícios B.3

Radianos, graus e arcos de circunferência

1. Em uma circunferência de raio 10 m, qual o comprimento do arco que subentende um ângulo central de (a) $4\pi/5$ radianos e (b) 110°?

2. Um ângulo central em uma circunferência de raio 8 corresponde a um arco de comprimento 10π. Calcule a medida desse ângulo em radianos e graus.

3. Você deseja fazer um ângulo de 80° marcando o perímetro de uma circunferência de 12 polegadas de diâmetro e traçando retas das extremidades do arco até o centro do diâmetro. Quanto deve medir o arco? Aproxime para o décimo de polegada mais próximo.

4. Se você girar para a frente uma roda de 1 metro de diâmetro por um percurso de 30 centímetros em uma superfície plana, com qual ângulo a roda girará? Responda em radianos (com a precisão de um décimo) e em graus (com a precisão de um grau).

Calculando funções trigonométricas

5. Copie e complete a seguinte tabela com valores de funções. Se a função não for definida para dado ângulo, preencha com "ND". Não use calculadora ou tabelas.

θ	$-\pi$	$-2\pi/3$	0	$\pi/2$	$3\pi/4$
sen θ					
cos θ					
tg θ					
cotg θ					
sec θ					
cosec θ					

Nos exercícios 6–8, um dos valores de sen x, cos x ou tg x é dado. Determine os valores dos outros dois no intervalo dado.

6. $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

7. $\cos x = \frac{1}{3}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

8. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}, \quad x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Esboçando gráficos de funções trigonométricas

Esboce os gráficos das funções dos exercícios 9–13. Qual é o período de cada uma?

9. $\operatorname{sen} 2x$

10. $\cos \pi x$

11. $-\operatorname{sen} \frac{\pi x}{3}$

12. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

13. $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

Esboce os gráficos das funções apresentadas nos exercícios 14–17 no plano ts (eixo t horizontal, eixo s vertical). Qual é o período de cada função? Quais são as simetrias apresentadas pelos gráficos?

14. $s = \operatorname{cotg} 2t$

15. $s = -\operatorname{tg} \pi t$

16. $s = \sec\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

17. $s = \operatorname{cosec}\left(\frac{t}{2}\right)$

18. Esboce o gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \lfloor \operatorname{sen} x \rfloor$ juntos. Quais são o domínio e a imagem de $\lfloor \operatorname{sen} x \rfloor$?

Outras identidades trigonométricas

Utilize as fórmulas de adição para deduzir as identidades dos exercícios 19 e 20.

19. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

20. $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

21. $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$ (O Exercício 32 apresenta uma dedução diferente.)

22. $\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B$

23. O que acontece quando $B = A$ na identidade $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$? O resultado se parece com algo que você já viu?

24. O que acontece quando $B = 2\pi$ nas fórmulas de adição? O resultado se parece com algo que você já viu?

Usando as fórmulas de adição

Nos exercícios 25 e 26, reescreva a expressão em termos de sen x e cos x.

25. $\cos(\pi + x)$

26. $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

27. Deduza $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{12}$ como $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$

28. Calcule $\cos \frac{\pi}{12}$

Usando as fórmulas de ângulo duplo

Nos exercícios 29 e 30, encontre o valor das funções.

29. $\cos^2 \frac{\pi}{8}$

30. $\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{12}$

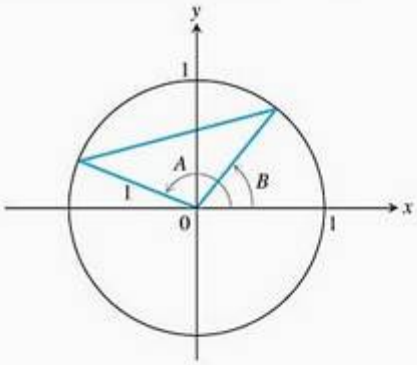
Teoria e exemplos

31. A fórmula para a soma das tangentes A fórmula-padrão para a tangente da soma de dois ângulos é

$$\operatorname{tg}(A + B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$$

Deduza a fórmula.

32. Aplique a lei dos cossenos ao triângulo da figura a seguir para deduzir a fórmula para cos $(A - B)$.

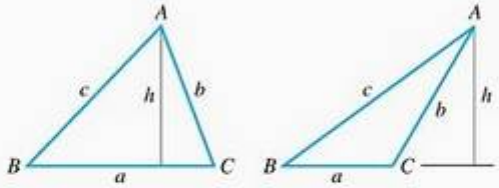


33. Um triângulo tem lados $a = 2$ e $b = 3$ e ângulo $C = 60°$. Determine o comprimento do lado c.

34. A lei dos senos A *lei dos senos* diz que, se a, b e c são os lados opostos aos ângulos A, B e C de um triângulo, então:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

Use as figuras a seguir e a identidade $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen} \theta$, conforme a necessidade, para deduzir a lei.



35. Um triângulo tem lados $a = 2$ e $b = 3$ e ângulo $C = 60°$ (conforme visto no Exercício 33). Utilizando a lei dos senos, encontre o seno do ângulo B.

36. Um triângulo tem lado $c = 2$ e ângulos $A = \pi/4$ e $B = \pi/3$. Determine o comprimento do lado a, oposto ao ângulo A.

37. A aproximação sen $x \approx x$ É bom saber que, quando x é medido em radianos, e para valores pequenos de x, sen $x \approx x$. Na Seção 3.10, veremos por que essa aproximação é verdadeira. O erro de aproximação é menor que 1 em 5.000 se $|x| < 0{,}1$.

T

(a) Com sua ferramenta gráfica ajustada em radianos, trace $y = \operatorname{sen} x$ junto com $y = x$ para visualizá-los perto da origem. O que acontece quando x se aproxima da origem?

(b) Com sua ferramenta gráfica ajustada em graus, trace $y = \operatorname{sen} x$ junto com $y = x$ novamente próximo à origem. Qual(is) a(s) diferença(s) em relação às curvas traçadas no modo radiano?

(c) **Uma verificação rápida do modo radiano** Sua ferramenta gráfica está no modo radiano? Então, calcule sen x para um valor de x próximo à origem, por exemplo $x = 0{,}1$. Se sen $x \approx x$, então a ferramenta está ajustada em radianos; caso contrário, não. Faça o teste.

Respostas selecionadas

CAPÍTULO 1

Seção 1.1

1. D: $(-\infty, \infty)$, R: $[1, \infty)$ **3.** D: $(0, \infty)$, R: $(0, \infty)$
5. D: $[-2, 2]$, R: $[0, 2]$

7. (a) Não uma função de x, pois alguns valores de x têm dois valores de y.

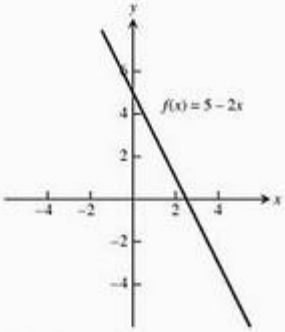
(b) Uma função de x pois, para cada x, existe apenas um y possível.

9. (a) Não. **(b)** Não. **(c)** Não. **(d)** $(0, 1]$

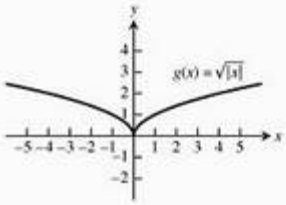
11. $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$, $p = 3x$

13. $x = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$, $A = 2d^2$, $V = \dfrac{d^3}{3\sqrt{3}}$

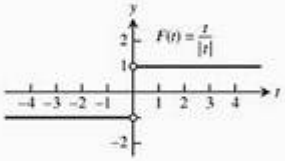
15. $(-\infty, \infty)$



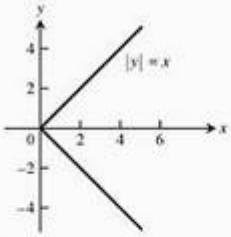
17. $(-\infty, \infty)$



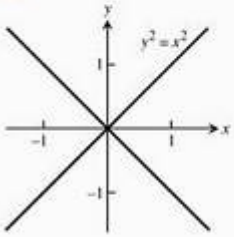
19. $(-\infty, \infty)$



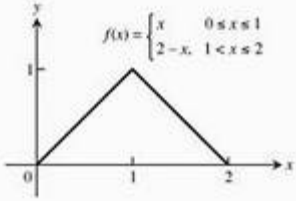
21. (a) Para cada valor positivo de x, existem dois valores de y.



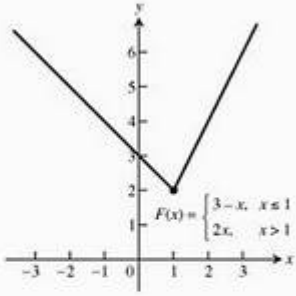
(b) Para cada valor de $x \neq 0$, existem dois valores de y.



23.



25.



27. **(a)** $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ -x + 2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x < 3 \\ 0, & 3 \le x \le 4 \end{cases}$

29. **(a)** $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & 1 < x < 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & -2 \le x \le 0 \\ -2x + 2, & 0 < x \le 1 \\ -1, & 1 < x \le 3 \end{cases}$

31. **(a)** $(-2, 0) \cup (4, \infty)$

33. **(a)** $0 \le x < 1$ **(b)** $-1 < x \le 0$

35. Sim **37.** $V = x(14 - 2x)(22 - 2x)$

39. **(a)** Porque a circunferência do círculo original era 8π e uma parte do comprimento x foi removida.

(b) $r = \dfrac{8\pi - x}{2\pi} = 4 - \dfrac{x}{2\pi}$

(c) $h = \sqrt{16 - r^2} = \dfrac{\sqrt{16\pi x - x^2}}{2\pi}$

(d) $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{(8\pi - x)^2\sqrt{16\pi x - x^2}}{24\pi^2}$

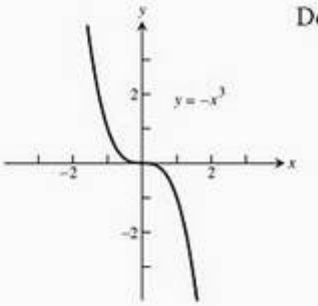
Seção 1.2

1. **(a)** linear, algébrica, polinomial de grau 1; **(b)** de potência, algébrica; **(c)** racional, algébrica; **(d)** exponencial

3. **(a)** racional, algébrica **(b)** algébrica **(c)** trigonométrica **(d)** logarítmica

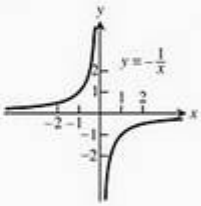
5. **(a)** h **(b)** f **(c)** g

7 Simétrico em torno da origem.



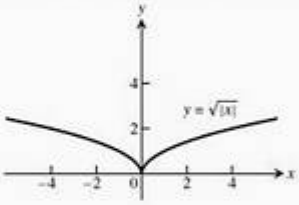
Decr. $-\infty < x < \infty$

9. Simétrico em torno da origem.



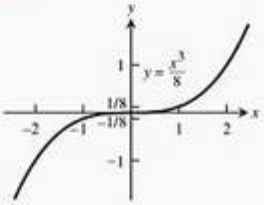
Cres. $-\infty < x < 0$ e $0 < x < \infty$

11. Simétrico em torno do eixo y.



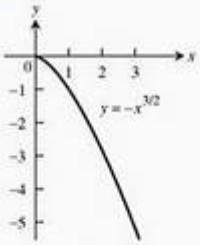
Decr. $-\infty < x \le 0$; cres. $0 \le x < \infty$

13. Simétrico em torno da origem.



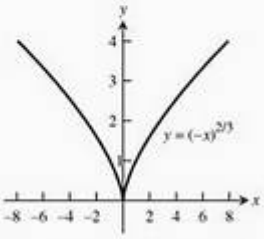
Cres. $-\infty < x < \infty$

15. Sem simetria



Decr. $0 \le x < \infty$

17. Simétrico em torno do eixo y.

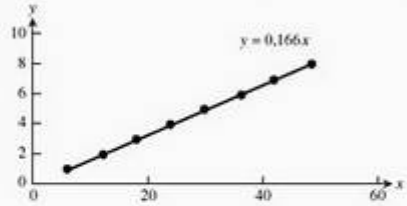


Decr. $-\infty < x \le 0$; cres. $0 \le x < \infty$

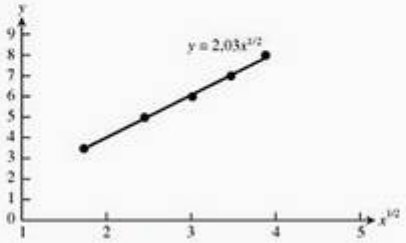
19. Par. **21.** Par. **23.** Ímpar. **25.** Par. **27.** Nem par nem ímpar.

29. Nem par nem ímpar.

31. **(a)** O gráfico corrobora o pressuposto de que y é proporcional a x. A constante de proporcionalidade é estimada a partir do coeficiente angular da reta, que é 0,166.

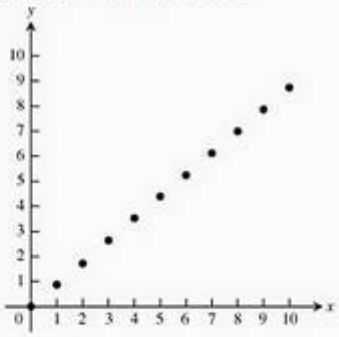


(b) O gráfico corrobora o pressuposto de que y é proporcional a $x^{1/2}$. A constante de proporcionalidade é estimada a partir do coeficiente angular da reta, que é 2,03.



33. **(a)** k L 1,1 **(b)** k L 0,059

35. **(a)**



(b) k L 0,87

(c) Usando $y = 0{,}87x$ com $x = 13$, temos $y = 11{,}31$.

Seção 1.3

1. $D_f: -\infty < x < \infty$, $D_g: x \geq 1$, $R_f: -\infty < y < \infty$, $R_g: y \geq 0$, $D_{f+g} = D_{f*g} = D_g$, $R_{f+g}: y \geq 1$, $R_{f*g}: y \geq 0$

3. $D_f: -\infty < x < \infty$, $D_g: -\infty < x < \infty$, $R_f: y = 2$, $R_g: y \geq 1$, $D_{f/g}: -\infty < x < \infty$, $R_{f/g}: 0 < y \leq 2$, $D_{g/f}: -\infty < x < \infty$, $R_{g/f}: y \geq 1/2$

5. **(a)** 2 **(b)** 22 **(c)** $x^2 + 2$ **(d)** $x^2 + 10x + 22$ **(e)** 5 **(f)** -2 **(g)** $x + 10$ **(h)** $x^4 - 6x^2 + 6$

7. **(a)** $\frac{4}{x^2} - 5$ **(b)** $\frac{4}{x^2} - 5$ **(c)** $\left(\frac{4}{x} - 5\right)^2$ **(d)** $\left(\frac{1}{4x-5}\right)^2$ **(e)** $\frac{1}{4x^2 - 5}$ **(f)** $\frac{1}{(4x-5)^2}$

9. **(a)** $f(g(x))$ **(b)** $j(g(x))$ **(c)** $g(g(x))$ **(d)** $j(j(x))$ **(e)** $g(h(f(x)))$ **(f)** $h(j(f(x)))$

11.

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(a)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-7}$
(b)	$x + 2$	$3x$	$3x + 6$
(c)	x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(d)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	x
(e)	$\frac{1}{x-1}$	$1 + \frac{1}{x}$	x
(f)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x

13. **(a)** $f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}$, $g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

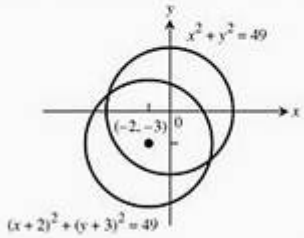
(b) $D_{f*g} = (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$, $D_{g*f} = (-1, \infty)$

(c) $R_{f*g} = [0, 1) \cup (1, \infty)$, $R_{g*f} = (0, \infty)$

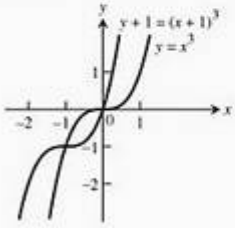
15. **(a)** $y = -(x + 7)^2$ **(b)** $y = -(x - 4)^2$

17. **(a)** Posição 4 **(b)** Posição 1 **(c)** Posição 2 **(d)** Posição 3

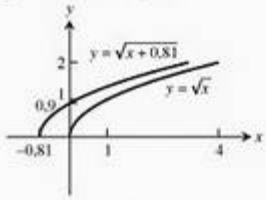
19. $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$



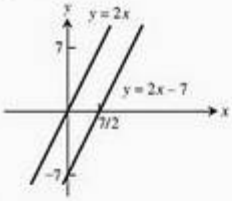
21. $y + 1 = (x + 1)^3$



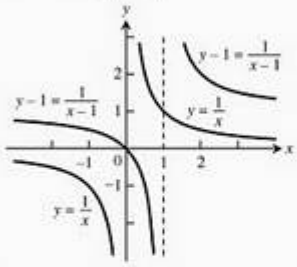
23. $y = \sqrt{x + 0{,}81}$



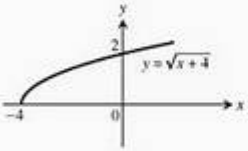
25. $y = 2x$



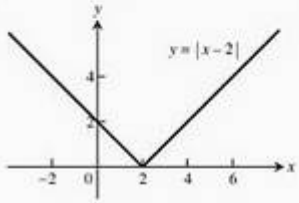
27. $y - 1 = \frac{1}{x - 1}$



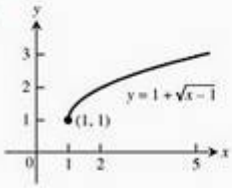
29.



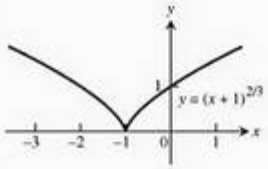
31.



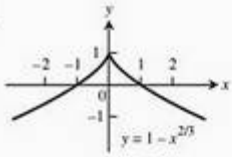
33.



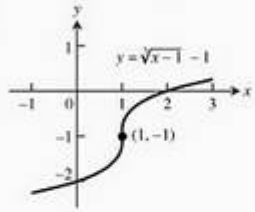
35.



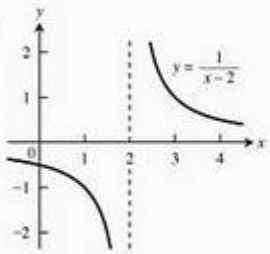
37.



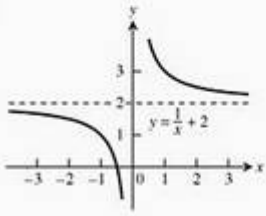
39.



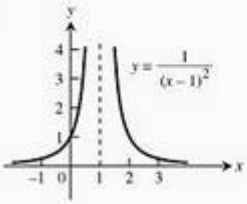
41.



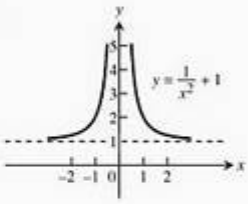
43.



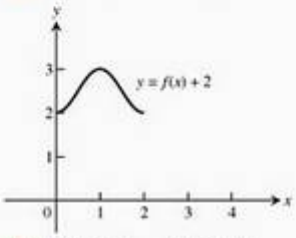
45.



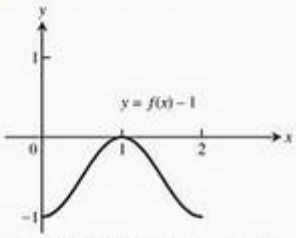
47.



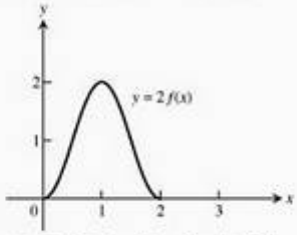
49. **(a)** $D: [0, 2]$, $R: [2, 3]$



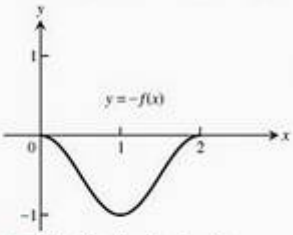
(b) $D: [0, 2]$, $R: [-1, 0]$



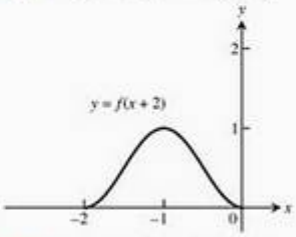
(c) $D: [0, 2]$, $R: [0, 2]$



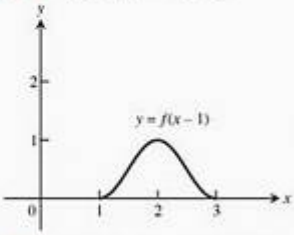
(d) $D: [0, 2]$, $R: [-1, 0]$



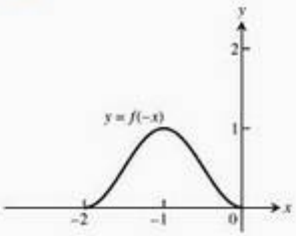
(e) $D: [-2, 0]$, $R: [0, 1]$



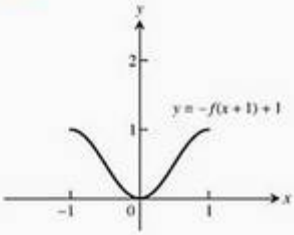
(f) $D: [1, 3]$, $R: [0, 1]$



(g) $D: [-2, 0]$, $R: [0, 1]$



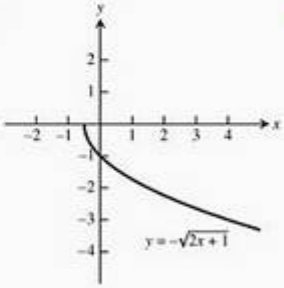
(h) $D: [-1, 1]$, $R: [0, 1]$



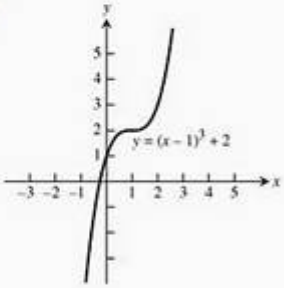
51. $y = 3x^2 - 3$ **53.** $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}$ **55.** $y = \sqrt{4x + 1}$

57. $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ **59.** $y = 1 - 27x^3$

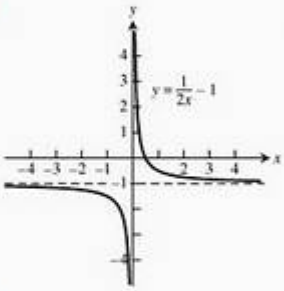
61.



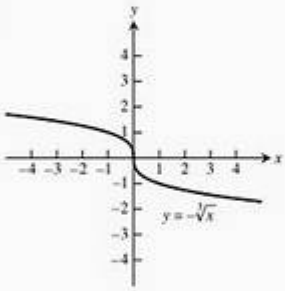
63.



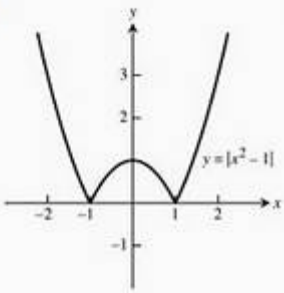
65.



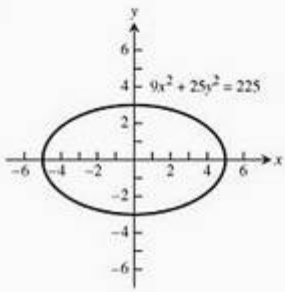
67.



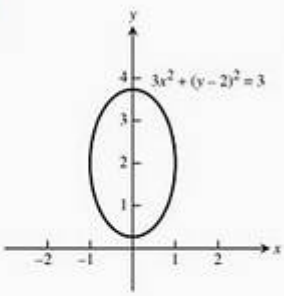
69.



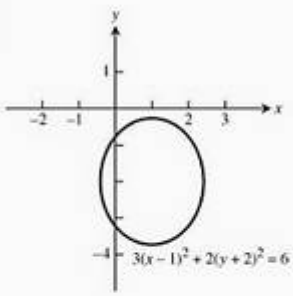
71.



73.

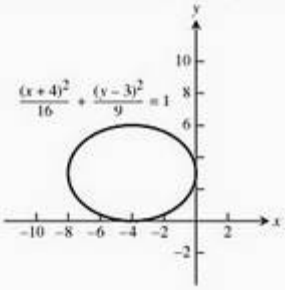


75.



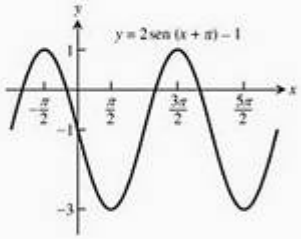
77. $\frac{(x + 4)^2}{16} + \frac{(y - 3)^2}{9} = 1$ Centro: $(-4, 3)$

O eixo maior é o segmento de reta entre $(-8, 3)$ e $(0, 3)$.

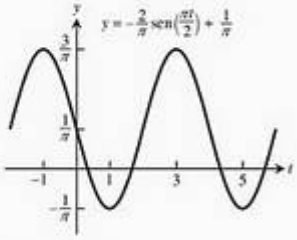


79. **(a)** Ímpar. **(b)** Ímpar. **(c)** Ímpar. **(d)** Par. **(e)** Par. **(f)** Par. **(g)** Par. **(h)** Par. **(i)** Ímpar.

83. $A = 2, B = 2\pi, C = -\pi, D = -1$



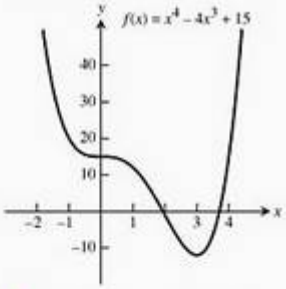
85. $A = -\frac{2}{\pi}, B = 4, C = 0, D = \frac{1}{\pi}$



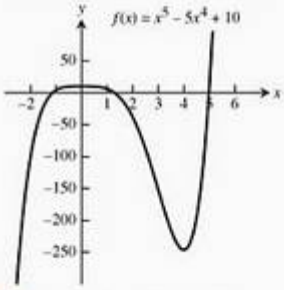
Seção 1.4

1. (d) **3. (d)**

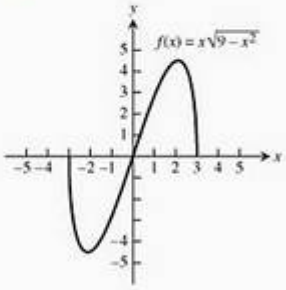
5. [−3, 5] por [−15, 40]



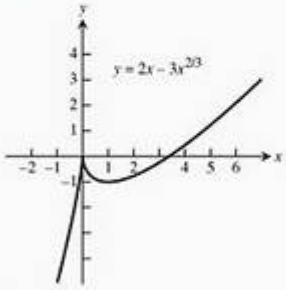
7. [−3, 6] por [−250, 50]



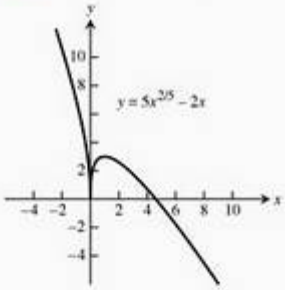
9. [−3, 3] por [−6, 6]



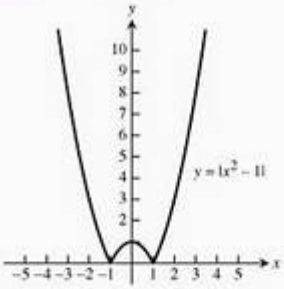
11. [−2, 6] por [−5, 4]



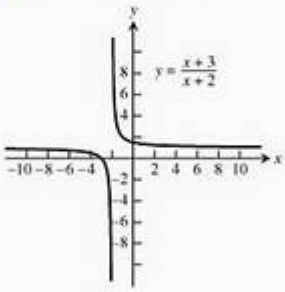
13. [−2, 8] por [−5, 10]



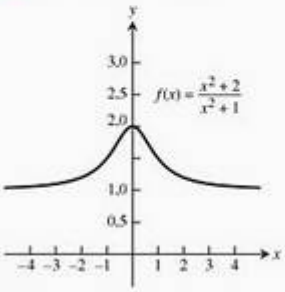
15. [−3, 3] por [0, 10]



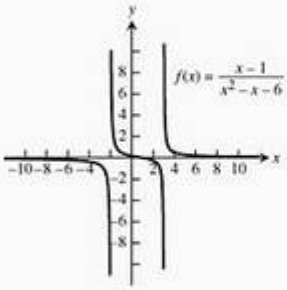
17. [−10, 10] por [−10, 10]



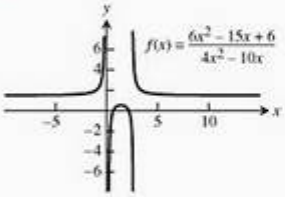
19. [−4, 4] por [0, 3]



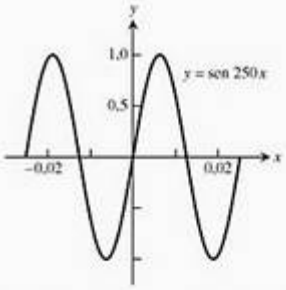
21. [−10, 10] por [−6, 6]



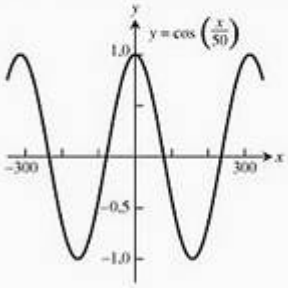
23. [−6, 10] por [−6, 6]



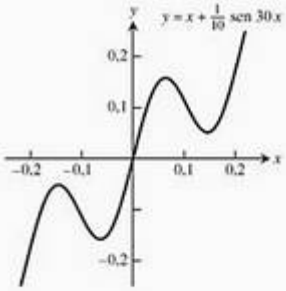
25. $-\frac{\pi}{125}, \frac{\pi}{125}$ por [−1,25, 1,25]



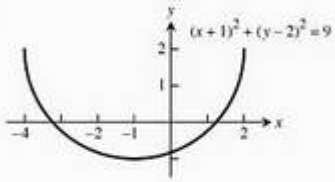
27. [−100π, 100π] por [−1,25, 1,25]



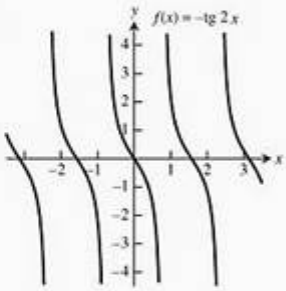
29. $\left[-\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{15}\right]$ por [−0,25, 0,25]



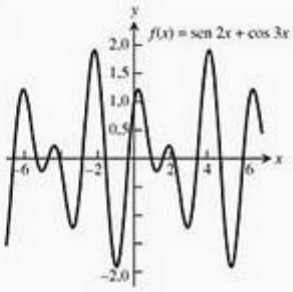
31.



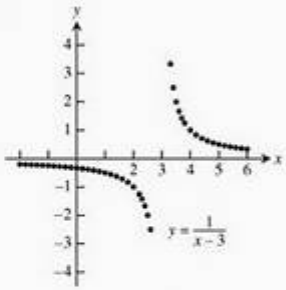
33.



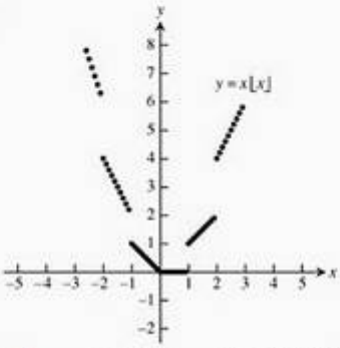
35.



37.



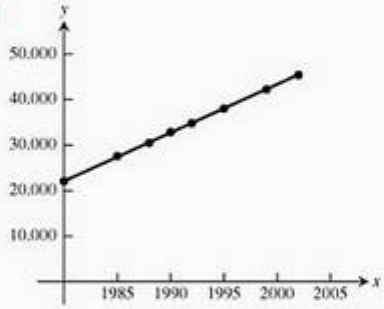
39.



41. (a) $y = 1.059{,}14x - 2.074.972{,}23$

(b) $m = 1.059{,}14$; esta é a quantidade que a remuneração vai crescer a cada ano.

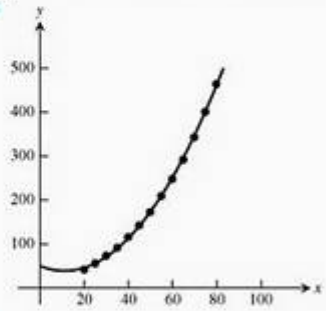
(c)



(d) \$ 53.899,17

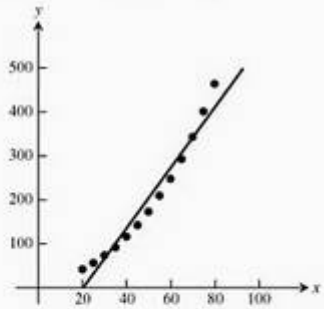
43. (a) $y = 0{,}0866x^2 - 1{,}9701x + 50{,}0594$

(b)



(c) Se a velocidade for 72 mph, a distância de frenagem aproximada será 367,50 pés. Se a velocidade for 85 mph, a distância de frenagem aproximada será 522,67 pés.

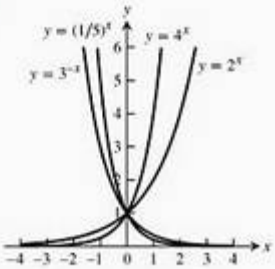
(d) $y = -140{,}4121 + 6{,}889x$



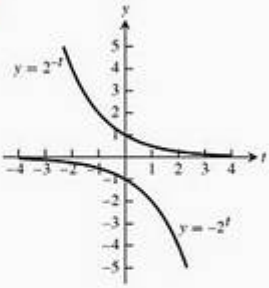
Se a velocidade for 72 mph, a distância de frenagem aproximada será 355,60 pés. Se a velocidade for 85 mph, a distância de frenagem aproximada será 445,15 pés.
A equação de regressão quadrática é a mais adequada.

Seção 1.5

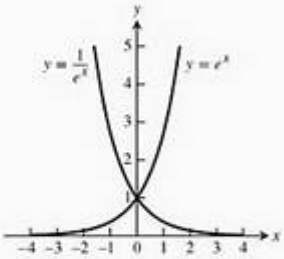
1.



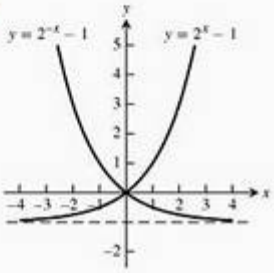
3.



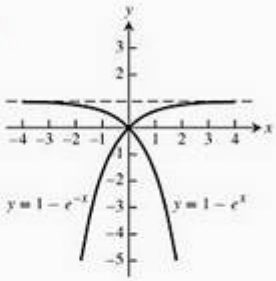
5.



7.



9.



11. $16^{1/4} = 2$ **13.** $4^{1/2} = 2$ **15.** 5 **17.** 14° **19.** 4

21. Domínio: $-\infty < x < \infty$. Imagem: $0 < y < ½$ **23.** Domínio: $-\infty < t < \infty$ Imagem: $1 < y < \infty$

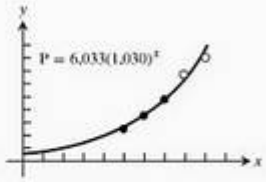
25. $x \approx 2{,}3219$ **27.** $x \approx -0{,}6309$ **29.** Após 19 anos.

31. (a) $A(t) = 6{,}6\left(\frac{1}{2}\right)^{t/14}$ (b) Cerca de 38 dias depois.

33. $x \approx 11{,}433$ anos **35.** $x \approx 11{,}090$ anos

37. $\approx 19{,}108$ anos **39.** $2^{48} \approx 2.815 \times 10^{14}$

41. (a) Equação de regressão: $P(x) = 6{,}033(1{,}030)^x$, onde $x = 0$ representa 1.900.



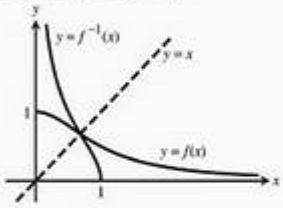
(b) Aproximadamente 6,03 milhões, um número que não está muito próximo da população real.

(c) A taxa de crescimento anual é de aproximadamente 3%.

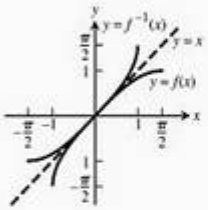
Seção 1.6

1. Injetora. **3.** Não injetora. **5.** Injetora.

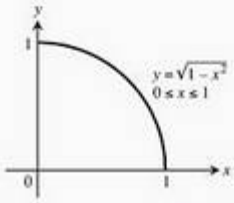
7. D: $(0, 1]$ R: $[0, \infty)$



9. D: $[-1, 1]$ R: $[-\pi/2, \pi/2]$



11. (a) Simétrico em torno da reta $y = x$.



13. $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$ **15.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

17. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

19. $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$; domínio: $-\infty < x < \infty$; imagem: $-\infty < y < \infty$

21. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$; domínio: $-\infty < x < \infty$; imagem: $-\infty < y < \infty$

23. $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; domínio: $x > 0$; imagem: $y > 0$

25. (a) $\ln 3 - 2\ln 2$ (b) $2(\ln 2 - \ln 3)$ (c) $-\ln 2$ (d) $\frac{2}{3}\ln 3$ (e) $\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 2$ (f) $\frac{1}{2}(3\ln 3 - \ln 2)$

27. (a) $\ln 5$ (b) $\ln(x - 3)$ (c) $\ln(t^2)$

29. (a) 7,2 (b) $\frac{1}{x^2}$ (c) $\frac{x}{y}$

31. (a) 1 (b) 1 (c) $-x^2 - y^2$

33. e^{2t+4} **35.** $e^{5t} + 40$ **37.** $y = 2xe^x + 1$

39. (a) $k = \ln 2$ (b) $k = (1/10)\ln 2$ (c) $k = 1.000 \ln a$

41. (a) $t = -10\ln 3$ (b) $t = -\frac{\ln 2}{k}$ (c) $t = \frac{\ln 0.4}{\ln 0.2}$

43. $4(\ln x)^2$

45. (a) 7 (b) $\sqrt{2}$ (c) 75 (d) 2 (e) 0,5 (f) -1

47. (a) $\sqrt{x}$ (b) x^2 (c) $\operatorname{sen} x$ **49.** (a) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ (b) 3 (c) 2

51. $x = 12$ **53.** $x = 3$ ou $x = 2$

55. (a) 1,89279 (b) $-0{,}35621$ (c) 0,94575 (d) $-2{,}80735$ (e) 5,29595 (f) 0,97041 (g) $-1{,}03972$ (h) $-1{,}61181$

59. (a) $-\pi/6$ (b) $\pi/4$ (c) $-\pi/3$ **61.** (a) π (b) $\pi/2$

67. (a) $f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{x}{100 - x}\right)$ (b) $f^{-1}(x) = \log_{1.1}\left(\frac{x}{50 - x}\right)$

69. (a) Quantidade $= 8\left(\frac{1}{2}\right)^{t/12}$ (b) 36 horas

71. $\approx 44{,}081$ anos **73.** $x \approx -0{,}76666$

75. (a) $y = \ln x - 3$ (b) $y = \ln(x - 1)$ (c) $y = 3 + \ln(x + 1)$ (d) $y = \ln(x - 2) - 4$ (e) $y = \ln(-x)$ (f) $y = e^x$

Exercícios práticos

1. $A = \pi r^2, C = 2\pi r, A = \frac{C^2}{4\pi}$ **3.** $x = \operatorname{tg}\theta, y = \operatorname{tg}^2\theta$

5. À origem. **7.** A nenhum destes. **9.** Par. **11.** Par. **13.** Ímpar.

15. Nem par nem ímpar.

17. **(a)** Domínio: todos os reais. **(b)** Imagem: $[-2, \infty)$.

19. **(a)** Domínio: $[-4, 4]$. **(b)** Imagem: $[0, 4]$.

21. **(a)** Domínio: todos os reais. **(b)** Imagem: $[-3, \infty)$.

23. **(a)** Domínio: todos os reais. **(b)** Imagem: $[-3, 1]$.

25. **(a)** Domínio: $(3, \infty)$. **(b)** Imagem: todos os reais.

27. **(a)** Domínio: $[-4, 4]$. **(b)** Imagem: $[0, 2]$.

29. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

31. **(a)** 1 **(b)** $\dfrac{1}{\sqrt{2{,}5}} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$ **(c)** $x, x \neq 0$

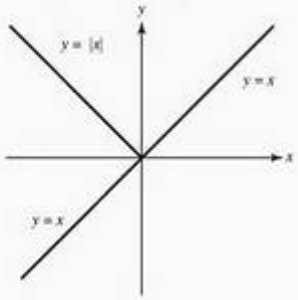
(d) $\dfrac{1}{\sqrt{1/\sqrt{x+2}+2}}$

33. **(a)** $(f \circ g)(x) = -x, x \geq -2, (g \circ f)(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(b) Domínio$(f \circ g)$: $[-2, \infty)$, domínio$(g \circ f)$: $[-2, 2]$

(c) Imagem$(f \circ g)$: $(-\infty, 2]$, imagem$(g \circ f)$: $[0, 2]$

35. Substitua a parte $x < 0$ pela imagem espelhada da parte $x > 0$ e, assim, construa o novo gráfico, simétrico em relação ao eixo y.



37. Não o afeta.

39. Adicione a imagem espalhada da parte $x > 0$ para fazer o novo gráfico, simétrico em relação ao eixo y.

41. Reflita a parte $y < 0$ no eixo x.

43. Reflita a parte $y < 0$ no eixo x.

45. **(a)** Domínio: $-\infty < x < \infty$ **(b)** Domínio: $x > 0$

47. **(a)** Domínio: $-3 \le x \le 3$ **(b)** Domínio: $0 \le x \le 4$

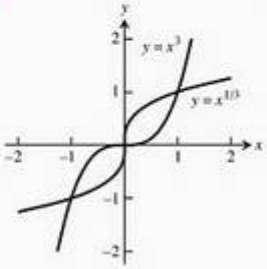
49. $(f \circ g)(x) = \ln(4 - x^2)$ e Domínio: $-2 < x < 2$;
$(g \circ f)(x) = 4 - (\ln x)^2$ e Domínio: $x > 0$;
$(f \circ f)(x) = \ln(\ln x)$ e Domínio: $x > 1$;
$(g \circ g)(x) = -x^4 + 8x^2 - 12$ e Domínio: $-\infty < x < \infty$.

55. **(a)** D: $(-\infty, \infty)$ R: $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ **(b)** D: $[-1, 1]$ R: $[-1, 1]$

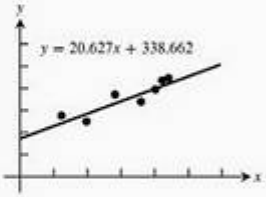
57. **(a)** Não. **(b)** Sim.

59. **(a)** $f(g(x)) = (\sqrt[3]{x})^3 = x, g(f(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x$

(b)



61. **(a)** $y = 20.627x + 338.622$

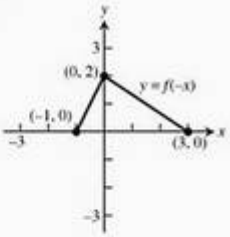


(b) Aproximadamente 957.

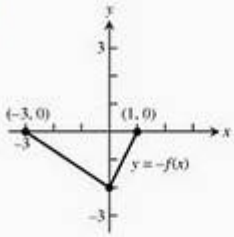
(c) O coeficiente angular é 20,627. Ele representa o aumento anual aproximado no número de títulos de doutor obtidos por norte-americanos de origem hispânica por ano.

Exercícios adicionais

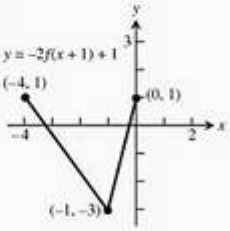
1. **(a)**



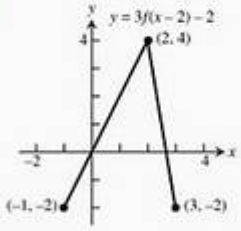
(b)



(c)



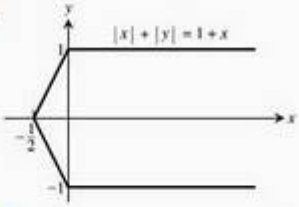
(d)



3. Sim. Por exemplo: $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/x$, ou $f(x) = 2x$ e $g(x) = x/2$, ou $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$.

5. Se $f(x)$ for ímpar, então $g(x) = f(x) - 2$ não será ímpar. Nem $g(x)$ será par, a menos que $f(x) = 0$ para qualquer x. Se f for par, então $g(x) = f(x) - 2$ também será par.

7.



11. **(a)** Não, a menos que a função f seja uma função par ou uma função ímpar. **(b)** Nem sempre. Se f for ímpar, então h será ímpar.

13. Se o gráfico de $f(x)$ passa no teste da reta horizontal, o gráfico de $g(x) = -f(x)$ também passará, já que é o mesmo gráfico refletido em torno do eixo x.

15. **(a)** Domínio: todos os reais. Imagem: se $a > 0$, então (d, ∞); se $a < 0$, então $(-\infty, d)$. **(b)** Domínio: (c, ∞), imagem: todos os reais.

17. **(a)** $y = 100.000 - 10.000x$, $0 \le x \le 10$ **(b)** Após 4,5 anos.

19. Após $\dfrac{\ln(10/3)}{\ln 1{,}08} \approx 15{,}6439$ anos. (Se o banco pagar juros apenas no fim do ano, levará 16 anos.)

21. $x = 2, x = 1$ **23.** $1/2$ **27.** $-4 < m < 0$

CAPÍTULO 2

Seção 2.1

1. **(a)** Não existe. Quando x se aproxima de 1 a partir da direita, $g(x)$ tende a 0. Quando x se aproxima de 1 a partir da esquerda, $g(x)$ tende a 1. Não existe um único número L do qual todos os valores de $g(x)$ tornam-se arbitrariamente próximos quando $x \to 1$.

(b) 1. **(c)** 0.

3. **(a)** Verdadeiro. **(b)** Verdadeiro. **(c)** Falso **(d)** Falso. **(e)** Falso. **(f)** Verdadeiro.

5. Quando x se aproxima de 0 a partir da esquerda, $x/|x|$ tende a -1. Quando x se aproxima de 0 a partir da direita, $x/|x|$ tende a 1. Não existe um único número L do qual todos os valores da função tornam-se arbitrariamente próximos quando $x \to 0$.

7. Não se pode dizer nada. 9. Não; não; não.

11. **(a)** $f(x) = (x^2 - 9)/(x + 3)$

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0001	-3.00001	-3.000001
$f(x)$	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001

x	-2.9	-2.99	-2.999	-2.9999	-2.99999	-2.999999
$f(x)$	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999

(c) $\lim_{x \to -3} f(x) = -6$

13. **(a)** $G(x) = (x + 6)/(x^2 + 4x - 12)$

x	$-5{,}9$	$-5{,}99$	$-5{,}999$	$-5{,}9999$
$G(x)$	$-0{,}126582$	$-0{,}1251564$	$-0{,}1250156$	$-0{,}1250015$

$-5{,}99999$	$-5{,}999999$
$-0{,}1250001$	$-0{,}1250000$

x	$-6{,}1$	$-6{,}01$	$-6{,}001$	$-6{,}0001$
$G(x)$	$-0{,}123456$	$-0{,}124843$	$-0{,}124984$	$-0{,}124998$

$-6{,}00001$	$-6{,}000001$
$-0{,}124999$	$-0{,}124999$

(c) $\lim_{x \to -6} G(x) = -1/8 = -0{,}125$

15. **(a)** $f(x) = (x^2 - 1)/(|x| - 1)$

x	$-1{,}1$	$-1{,}01$	$-1{,}001$	$-1{,}0001$	$-1{,}00001$	$-1{,}000001$
$f(x)$	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001	2,000001

x	$-0{,}9$	$-0{,}99$	$-0{,}999$	$-0{,}9999$	$-0{,}99999$	$-0{,}999999$
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	1,9999	1,99999	1,999999

(c) $\lim_{x \to -1} f(x) = 2$

17. **(a)** $g(\theta) = (\operatorname{sen}\theta)/\theta$

θ	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$g(\theta)$	0,998334	0,999983	0,999999	0,999999	0,999999	0,999999

θ	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$	$-0{,}00001$	$-0{,}000001$
$g(\theta)$	0,998334	0,999983	0,999999	0,999999	0,999999	0,999999

$\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = 1$

19. **(a)** $f(x) = x^{1/(1-x)}$

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	0,99999	0,999999
$f(x)$	0,348678	0,366032	0,367695	0,367861	0,367877	0,367879

x	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001	1,000001
$f(x)$	0,385543	0,369711	0,368063	0,367897	0,367881	0,367878

$\lim_{x \to 1} f(x) \approx 0{,}36788$

35. Os gráficos podem se alterar durante a impressão, portanto suas estimativas podem não coincidir totalmente com estas.

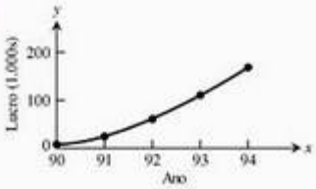
(a)

PQ_1	PQ_2	PQ_3	PQ_4
43	46	49	50

As unidades aproximadas são m/s.

(b) ≈ 50 m/s ou 180 km/h.

37. **(a)**



(b) ≈ \$ 56.000/ano.

(c) ≈ \$ 42.000/ano.

39. **(a)** 0,414213, 0,449489, $(\sqrt{1 + h} - 1)/h$ **(b)** $g(x) = \sqrt{x}$

$1 + h$	1,1	1,01	1.001	1,0001
$\sqrt{1 + h}$	1,04880	1,004987	1,0004998	1,0000499
$(\sqrt{1 + h} - 1)/h$	0,4880	0,4987	0,4998	0,499

1,00001	1,000001
1,000005	1,0000005
0,5	0,5

(c) 0,5 **(d)** 0,5

Seção 2.2

1. -9 **3.** 4 **5.** -8 **7.** 5/8 **9.** 5/2 **11.** 27 **13.** 16
15. 3/2 **17.** 3/2 **19.** 1/10 **21.** -7 **23.** 3/2 **25.** $-1/2$
27. 4/3 **29.** 1/6 **31.** 4 **33.** 1/2 **35.** 3/2

37. (a) Regra do quociente.
(b) Regras da potenciação e da diferença.
(c) Regras da multiplicação por constante e da soma.

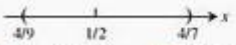
39. (a) -10 (b) -20 (c) -1 (d) 5/7
41. (a) 4 (b) -21 (c) -12 (d) $-7/3$
43. 2 **45.** 3 **47.** $1/(2\sqrt{7})$ **49.** $\sqrt{5}$
51. (a) O limite é 1. **53.** $c = 0, 1, -1$; o limite é 0 em $c = 0$ e 1 em $c = 1, -1$. **55.** 7 **57.** (a) 5 (b) 5

Seção 2.3

1. $\delta = 2$

3. $\delta = 1/2$

5. $\delta = 1/18$



7. $\delta = 0{,}1$ **9.** $\delta = 7/16$ **11.** $\delta = \sqrt{5} - 2$ **13.** $\delta = 0{,}36$
15. $(3{,}99, 4{,}01)$, $\delta = 0{,}01$ **17.** $(-0{,}19, 0{,}21)$, $\delta = 0{,}19$
19. $(3, 15)$, $\delta = 5$ **21.** $(10/3, 5)$, $\delta = 2/3$
23. $(-\sqrt{4{,}5}, -\sqrt{3{,}5})$, $\delta = \sqrt{4{,}5} - 2 \approx 0{,}12$
25. $(\sqrt{15}, \sqrt{17})$, $\delta = \sqrt{17} - 4 \approx 0{,}12$
27. $\left(2 - \frac{0{,}03}{m}, 2 + \frac{0{,}03}{m}\right)$, $\delta = \frac{0{,}03}{m}$
29. $\left(\frac{1}{2} - \frac{c}{m}, \frac{c}{m} + \frac{1}{2}\right)$, $\delta = \frac{c}{m}$ **31.** $L = -3$, $\delta = 0{,}01$
33. $L = 4$, $\delta = 0{,}05$ **35.** $L = 4$, $\delta = 0{,}75$

55. [3,384, 3,387]. Por segurança, a extremidade esquerda foi arredondada para cima, e a direita, para baixo.

59. O limite não existe quando x tende a 3.

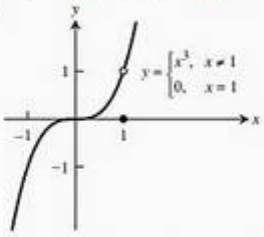
Seção 2.4

1. (a) Verdadeiro. (b) Verdadeiro. (c) Falso. (d) Verdadeiro. (e) Verdadeiro. (f) Verdadeiro. (g) Falso. (h) Falso. (i) Falso. (j) Falso. (k) Verdadeiro. (l) Falso.

3. (a) 2, 1 (b) Não, $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ (c) 3, 3 (d) Sim, 3

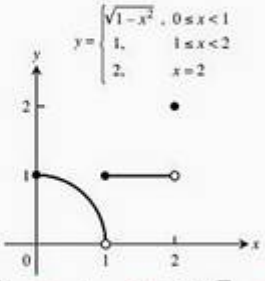
5. (a) Não (b) Sim, 0 (c) Não

7. (a)



(b) 1, 1 (c) Sim, 1

9. (a) $D: 0 \leq x \leq 2$, $R: 0 < y \leq 1$ e $y = 2$.
(b) $(0, 1) \cup (1, 2)$ (c) $x = 2$ (d) $x = 0$



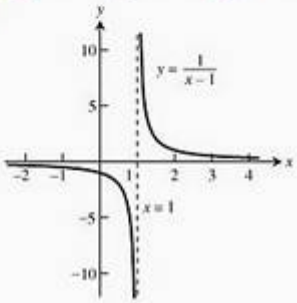
11. $\sqrt{3}$ **13.** 1 **15.** $2/\sqrt{5}$ **17.** (a) 1 (b) -1
19. (a) 1 (b) 2/3 **21.** 1 **23.** 3/4 **25.** 2 **27.** 1/2
29. 2 **31.** 1 **33.** 1/2 **35.** 3/8 **37.** (a) -3 (b) -3
39. (a) 1/2 (b) 1/2 **41.** (a) $-5/3$ (b) $-5/3$ **43.** 0
45. -1 **47.** 0 **49.** -1 **51.** (a) 2/5 (b) 2/5
53. (a) 0 (b) 0 **55.** (a) 7 (b) 7 **57.** (a) 0 (b) 0
59. (a) $-2/3$ (b) $-2/3$ **61.** 0 **63.** 1 **65.** ∞ **73.** 1
77. $\delta = \epsilon^2$, $\lim_{x\to 5^+} \sqrt{x-5} = 0$

81. (a) 400. (b) 399. (c) O limite não existe.

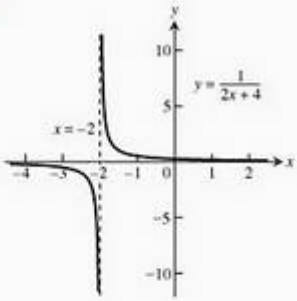
83. 1 **85.** 3/2 **87.** 3

Seção 2.5

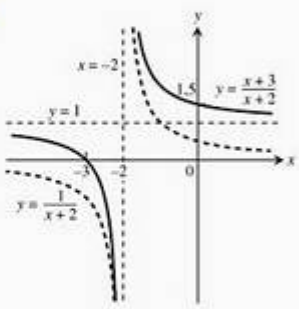
1. ∞ **3.** $-\infty$ **5.** $-\infty$ **7.** ∞ **9.** (a) ∞ (b) $-\infty$
11. ∞ **13.** ∞ **15.** $-\infty$
17. (a) ∞ (b) $-\infty$ (c) $-\infty$ (d) ∞
19. (a) $-\infty$ (b) ∞ (c) 0 (d) 3/2
21. (a) $-\infty$ (b) 1/4 (c) 1/4 (d) 1/4 (e) Será $-\infty$.
23. (a) $-\infty$ (b) ∞
25. (a) ∞ (b) ∞ (c) ∞ (d) ∞
27.



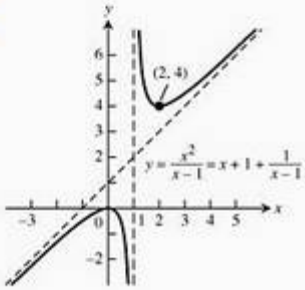
29.



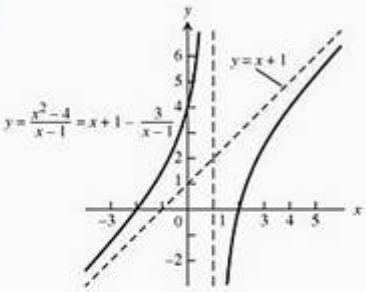
31.



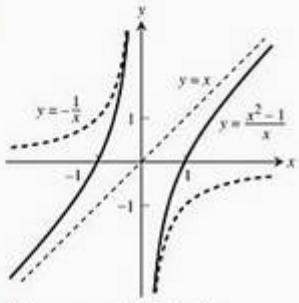
33.



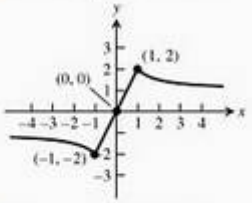
35.



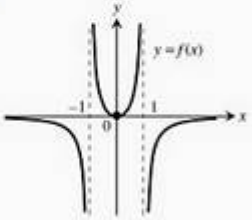
37.



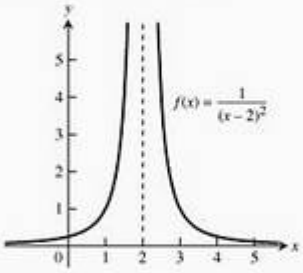
39. Eis uma possibilidade.



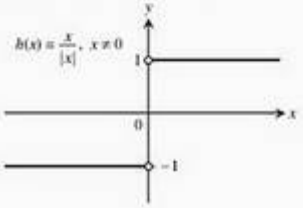
41. Eis uma possibilidade.



43. Eis uma possibilidade.



45. Eis uma possibilidade.

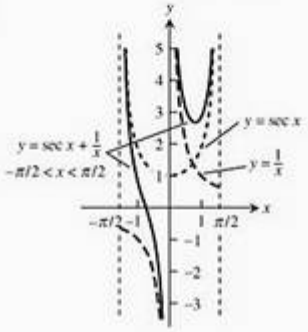


51. **(a)** Para qualquer número real positivo B, existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que, para qualquer x, $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > B$

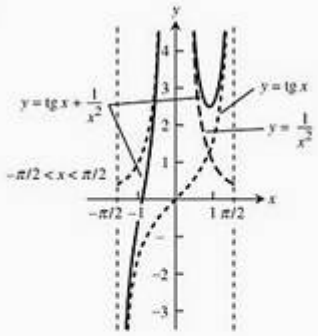
(b) Para qualquer número real negativo $-B$, existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que, para qualquer x, $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < -B$

(c) Para qualquer número real negativo $-B$, existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que, para qualquer x, $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < -B$

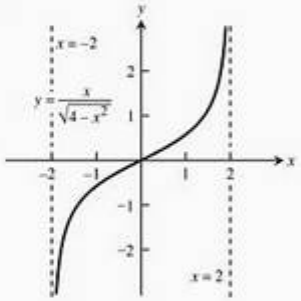
57.



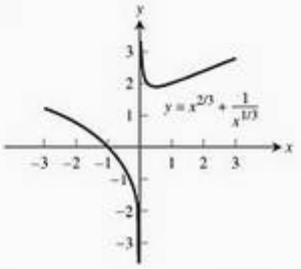
59.



61.



63.

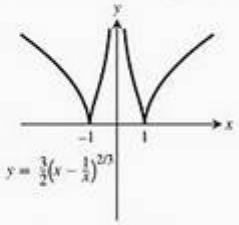


65. Em ∞: ∞, em $-\infty$: 0. **67.** Em ∞: 0, em $-\infty$: 0.

69. **(a)** $y \to \infty$ (veja o gráfico a seguir)

(b) $y \to \infty$ (veja o gráfico a seguir)

(c) Postos cuspidais em $x = \pm 1$ (veja o gráfico a seguir)



71. **(a)** e^x **(b)** $-2x$ **73.** **(a)** x **(b)** x
75. **(a)** $2x^2$ **(b)** $2x^2$

Seção 2.6

1. Não; descontínua em $x = 2$; não definida em $x = 2$.

3. Contínua. **5.** **(a)** Sim. **(b)** Sim. **(c)** Sim. **(d)** Sim.

7. **(a)** Não. **(b)** Não. **9.** 0. **11.** 1, não removível; 0, removível.

13. Qualquer x, exceto $x = 2$. **15.** Qualquer x, exceto $x = 3$, $x = 1$.
17. Qualquer x. **19.** Qualquer x, exceto $x = 0$.

21. Qualquer x, exceto $x = n\pi/2$, sendo n qualquer inteiro.
23. Qualquer x, exceto $n\pi/2$, sendo n um inteiro ímpar.
25. Qualquer x, $\geq -3/2$. **27.** Qualquer x.

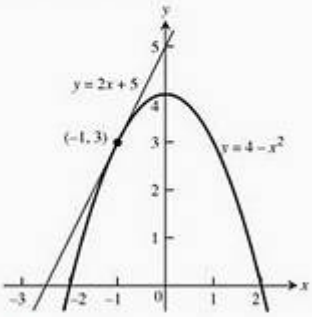
29. 0; contínua em $x = \pi$. **31.** 1; contínua em $y = 1$.

33. 1; contínua em $x = 0$ **35.** $g(3) = 6$ **37.** $f(1) = 3/2$
39. $a = 4\ 3$ **63.** $x \approx 1{,}8794, -1{,}5321, -0{,}3473$
65. $x \approx 1{,}7549$ **67.** $x \approx 3{,}5156$ **69.** $x \approx 0{,}7391$

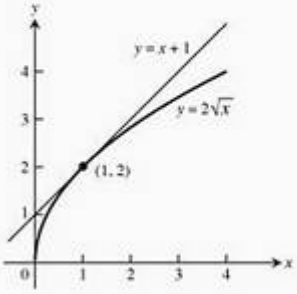
Seção 2.7

1. P_1: $m_1 = 1$, P_2: $m_2 = 5$ **3.** P_1: $m_1 = 5/2$, P_2: $m_2 = -1/2$

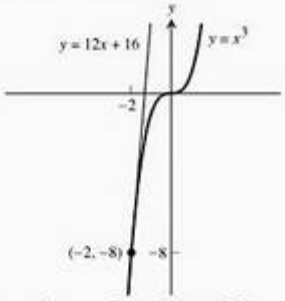
5. $y = 2x + 5$



7. $y = x + 1$



9. $y = 12x + 16$



11. $m = 4, y - 5 = 4(x - 2)$
13. $m = -2, y - 3 = -2(x - 3)$
15. $m = 12, y - 8 = 12(t - 2)$
17. $m = \frac{1}{4}, y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$

19. $m = -10$ **21.** $m = -1/4$ **23.** $(-2, -5)$
25. $y = -(x + 1), y = -(x - 3)$ **27.** 19,6 m/s

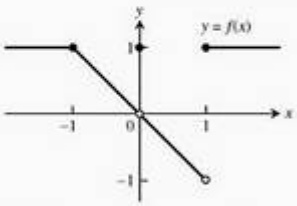
29. 6π. **31.** Sim. **33.** Sim. **35.** **(a)** Em nenhum ponto.
37. **(a)** Em $x = 0$. **39.** **(a)** Em nenhum ponto. **41.** **(a)** Em $x = 1$.
43. **(a)** Em $x = 0$.

Exercícios práticos

1. Em $x = -1$: $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = 1$, logo $\lim_{x \to -1} f(x) = 1 = f(-1)$; contínua em $x = -1$.

Em $x = 0$: $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$, logo $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. No entanto $f(0) \neq 0$, logo f é descontínua em $x = 0$. Podemos remover a descontinuidade redefinindo $f(0)$ para ser 0.

Em $x = 1$: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$, logo $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe. A função é descontínua em $x = 1$, e a descontinuidade não é removível.



3. **(a)** -21 **(b)** 49 **(c)** 0 **(d)** 1 **(e)** 1 **(f)** 7 **(g)** -7

(h) $-\frac{1}{7}$ 5. 4

7. (a) $(-\infty, +\infty)$. (b) $[0, \infty)$. (c) $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. (d) $(0, \infty)$.

9. (a) Não existe. (b) 0.

11. $\frac{1}{2}$ 13. $2x$ 15. $-\frac{1}{4}$ 17. $\frac{2}{\pi}$ 19. 1 21. $-\infty$

23. 0 25. 2 27. 0 29. $\frac{2}{5}$ 31. 0 33. $-\infty$ 35. 0

37. 1 39. 1 41. $-\frac{\pi}{2}$

43. Não em ambos os casos, pois $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existe, e $\lim_{x\to 1} f(x)$ também não.

49. 1.324717957

Exercícios adicionais

3. 0; o limite à esquerda foi necessário porque a função é indefinida para $v > c$.

5. $65 < t < 75$; dentro de 5°F.

13. (a) B (b) A (c) A (d) A

21. (a) $\lim_{a\to 0} r_+(a) = 0{,}5$, $\lim_{a\to -1^+} r_+(a) = 1$

(b) $\lim_{a\to 0} r_-(a)$ não existe, $\lim_{a\to -1^+} r_-(a) = 1$

25. 0 27. 1 29. 4

CAPÍTULO 3

Seção 3.1

1. $-2x, 6, 0, -2$ 3. $-\frac{2}{t^3}, 2, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

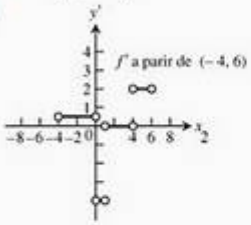
5. $\frac{3}{2\sqrt{3\theta}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}$ 7. $6x^2$ 9. $\frac{1}{(2t+1)^2}$

11. $\frac{-1}{2(q+1)\sqrt{q+1}}$ 13. $1 - \frac{9}{x^2}, 0$ 15. $3t^2 - 2t, 5$

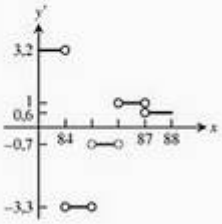
17. $\frac{-4}{(x-2)\sqrt{x-2}}$, $y - 4 = -\frac{1}{2}(x-6)$ 19. 6

21. 1/8 23. $\frac{-1}{(x+2)^2}$ 25. $\frac{-1}{(x-1)^2}$ 27. b 29. d

31. (a) $x = 0, 1, 4$ (b)



33.



35. Uma vez que $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$, enquanto $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$, $f(x)$ não é derivável em $x = 0$.

37. Uma vez que $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2$, enquanto, $f(x)$ não é derivável em $x = 1$.

39. (a) $-3 \le x \le 2$ (b) Nenhum (c) Nenhum

41. (a) $-3 \le x < 0, 0 < x \le 3$ (b) Nenhum (c) $x = 0$

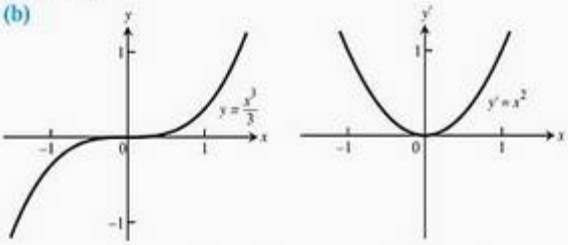
43. (a) $-1 \le x < 0, 0 < x \le 2$ (b) $x = 0$ (c) Nenhum

45. (a) $y' = -2x$ (c) $x < 0, x = 0, x > 0$

(d) $-\infty < x < 0, 0 < x < \infty$

47. (a) $y' = x^2$

(b)



(c) $x \ne 0, x = 0$, nenhum (d) $-\infty < x < \infty$, nennhum

49. $y' = 3x^2$ nunca é negativa.

51. Sim, $y + 16 = -(x - 3)$ é tangente em $(3, -16)$.

53. Não, a função $y = \lfloor x \rfloor$ não satisfaz a propriedade do valor intermediário das derivadas.

55. Sim, $(-f)'(x) = -(f'(x))$.

57. Para $g(t) = mt$ e $h(t) = t$, $\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{h(t)} = m$, que não necessariamente é igual a zero.

Seção 3.2

1. $\frac{dy}{dx} = -2x, \frac{d^2y}{dx^2} = -2$

3. $\frac{ds}{dt} = 15t^2 - 15t^4, \frac{d^2s}{dt^2} = 30t - 60t^3$

5. $\frac{dy}{dx} = 4x^2 - 1 + 2e^x, \frac{d^2y}{dx^2} = 8x + 2e^x$

7. $\frac{dw}{dz} = -\frac{6}{z^3} + \frac{1}{z^2}, \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{18}{z^4} - \frac{2}{z^3}$

9. $\frac{dy}{dx} = 12x - 10 + 10x^{-3}, \frac{d^2y}{dx^2} = 12 - 30x^{-4}$

11. $\frac{dr}{ds} = \frac{-2}{3s^3} + \frac{5}{2s^2}, \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{2}{s^4} - \frac{5}{s^3}$

13. $y' = -5x^4 + 12x^2 - 2x - 3$

15. $y' = 3x^2 + 10x + 2 - \frac{1}{x^2}$ 17. $y' = \frac{-19}{(3x-2)^2}$

19. $g'(x) = \frac{x^2 + x + 4}{(x + 0{,}5)^2}$ 21. $\frac{dv}{dt} = \frac{t^2 - 2t - 1}{(1 + t^2)^2}$

23. $\frac{dy}{dx} = -2e^{-x}$ 25. $v' = -\frac{1}{x^2} + 2x^{-3/2}$

27. $\frac{dy}{dx} = 3x^2e^x + x^3e^x$

29. $y' = 2x^3 - 3x - 1, y'' = 6x^2 - 3, y''' = 12x, y^{(4)} = 12$, $y^{(n)} = 0$ para $n \ge 5$

31. $y' = 2x - 7x^{-2}, y'' = 2 + 14x^{-3}$

33. $\frac{dr}{d\theta} = 3\theta^{-4}, \frac{d^2r}{d\theta^2} = -12\theta^{-5}$

35. $\frac{dw}{dz} = 6ze^z + 3z^2e^z, \frac{d^2w}{dz^2} = 6e^z + 12ze^z + 3z^2e^z$

37. $\frac{dp}{dq} = \frac{1}{6}q + \frac{1}{6}q^{-3} + q^{-5}, \frac{d^2p}{dq^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}q^{-4} - 5q^{-6}$

39. (a) 13 (b) −7 (c) 7/25 (d) 20

41. (a) $y = -\frac{x}{8} + \frac{5}{4}$ (b) $m = -4$ em (0, 1)
(c) $y = 8x - 15, y = 8x + 17$

43. $y = 4x, y = 2$ 45. $a = 1, b = 1, c = 0$

47. (a) $y = 2x + 2$, (c) (2, 6)

49. $P'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1$

51. A regra do produto é, portanto, a regra da multiplicação pela constante, logo essa última é um caso especial da regra do produto.

53. (a) $\frac{d}{dx}(uvw) = uvw' + uv'w + u'vw$
(b) $\frac{d}{dx}(u_1u_2u_3u_4) = u_1u_2u_3u_4' + u_1u_2u_3'u_4 + u_1u_2'u_3u_4 + u_1'u_2u_3u_4$
(c) $\frac{d}{dx}(u_1\cdots u_n) = u_1u_2\cdots u_{n-1}u_n' + u_1u_2\cdots u_{n-2}u_{n-1}'u_n + \cdots + u_1'u_2\cdots u_n$

55. $\frac{dP}{dV} = -\frac{nRT}{(V-nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3}$

Seção 3.3

1. (a) −2 m, −1 m/s; (b) 3 m/s, 1 m/s; 2 m/s², 2 m/s²; (c) muda de direção em $t = 3/2$ s.

3. (a) −9 m, −3 m/s; (b) 3 m/s, 12 m/s; 6 m/s², −12 m/s²; (c) não muda de direção.

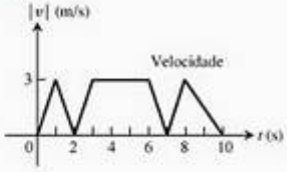
5. (a) −20 m, −5 m/s; (b) 45 m/s, (1/5) m/s; 140 m/s², (4/25) m/s²; (c) não muda de direção.

7. (a) $a(1) = -6$ m/s², $a(3) = 6$ m/s²
(b) $v(2) = 3$ m/s (c) 6 m

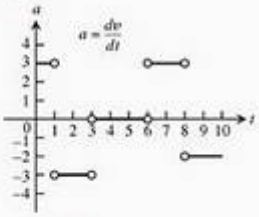
9. Marte: ≈7,5 s, Júpiter: ≈1,2 s 11. $g_s = 0{,}75$ m/s²

13. (a) $v = -32t, |v| = 32t$ pés/s, $a = -32$ pés/s²
(b) $t \approx 3{,}3$ s (c) $v \approx -107{,}0$ pés/s

15. (a) $t = 2, t = 7$ (b) $3 \le t \le 6$
(c)



(d)



17. (a) 190 pés/s (b) 2 s (c) 8 s, 0 pés/s (d) 10,8 s, 90 pés/s
(e) 2,8 s.
(f) a maior aceleração acontece 2 segundos após o lançamento.
(g) aceleração constante entre 2 e 10,8 s, −32 pés/s².

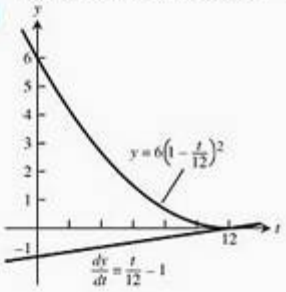
19. (a) $\frac{4}{7}$ s, 280 cm/s (b) 560 cm/s, 980 cm/ ²
(c) 29,75 flashes/s

21. C = posição, A = velocidade, B = aceleração.

23. (a) \$ 110/máquina; (b) \$ 80; (c) \$ 79,90.

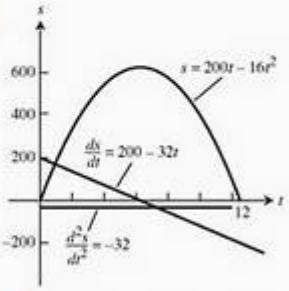
25. (a) $b'(0) = 10^4$ bactérias/h; (b) $b'(5) = 0$ bactéria/h; (c) $b'(10) = -10^4$ bactérias/h.

27. (a) $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{12} - 1$.
(b) O maior valor de $\frac{dy}{dt}$ é 0 m/h (mais lentamente) quando $t = 12$ e o menor valor de $\frac{dy}{dt}$ é −1 m/h (mais rapidamente) quando $t = 0$.
(c)



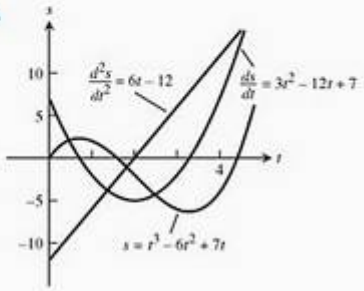
29. $t = 25$ s $D = \frac{6.250}{9}\pi$

31.



(a) $v = 0$ quando $t = 6{,}25$ s.
(b) $v > 0$ quando $0 \le t < 6{,}25 \Rightarrow$ o corpo se move para cima; $v < 0$ quando $6{,}25 < t \le 12{,}5 \Rightarrow$ o corpo se move para baixo.
(c) O corpo muda de direção em $t = 6{,}25$ s.
(d) O corpo acelera em (6,25, 12, 5] e freia em [0, 6,25).
(e) O corpo se desloca mais rapidamente nas extremidades $t = 0$ e $t = 12{,}5$, quando está se deslocando a 200 pés/s. E se desloca mais lentamente em $t = 6{,}25$, quando a velocidade é 0.
(f) Quando $t = 6{,}25$, o corpo está $s = 625$ m a partir da origem, ou seja, na posição mais afastada dela.

33.



(a) $v = 0$ quando $t = \dfrac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ s.

(b) $v < 0$ quando $\dfrac{6-\sqrt{15}}{3} < t < \dfrac{6+\sqrt{15}}{3} \Rightarrow$ o corpo se move para a esquerda; $v > 0$ quando $0 \le t < \dfrac{6-\sqrt{15}}{3}$ ou $\dfrac{6+\sqrt{15}}{3} < t \le 4 \Rightarrow$ o corpo se move para a direita.

(c) O corpo muda de direção em $t = \dfrac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ s.

(d) O corpo acelera em $\left(\dfrac{6-\sqrt{15}}{3}, 2\right) \cup \left(\dfrac{6+\sqrt{15}}{3}, 4\right]$ e freia em $\left[0, \dfrac{6-\sqrt{15}}{3}\right) \cup \left(2, \dfrac{6+\sqrt{15}}{3}\right)$.

(e) O corpo se desloca mais rapidamente em $t = 0$ e $t = 4$, quando está se deslocando 7 unidades/s, e mais lentamente em $t = \dfrac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ s.

(f) Quando $t = \dfrac{6+\sqrt{15}}{3}$, o corpo está na posição $s \approx -6{,}303$ unidades, a mais distante da origem.

35. **(a)** Ele leva 135 s. **(b)** Velocidade média $= \dfrac{\Delta F}{\Delta t} = \dfrac{5-0}{73-0} = \dfrac{5}{73} \approx 0{,}068$ furlongs/s. **(c)** Usando um quociente de diferença centrado, temos que a velocidade do cavalo é de aproximadamente $\dfrac{\Delta F}{\Delta t} = \dfrac{4-2}{59-33} = \dfrac{2}{26} = \dfrac{1}{13} \approx 0{,}077$ furlongs/s (Exercício 53 da Seção 3.4). **(d)** O cavalo corre mais rápido durante o último furlong (entre a nona e a décima marcas de furlong). Esse furlong leva apenas 11 s para ser percorrido, o menor tempo para um furlong. **(e)** O cavalo acelera mais durante o primeiro furlong (entre as marcas 0 e 1).

Seção 3.4

1. $-10 - 3\,\text{sen}\,x$ **3.** $-\text{cosec}\,x\,\text{cotg}\,x - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ **5.** 0

7. $\dfrac{-\text{cosec}^2 x}{(1 + \text{cotg}\,x)^2}$ **9.** $4\,\text{tg}\,x\sec x - \text{cosec}^2 x$ **11.** $x^2 \cos x$

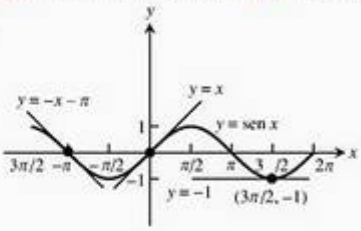
13. $\sec^2 t + e^{-t}$ **15.** $\dfrac{-2\,\text{cosec}\,t\,\text{cotg}\,t}{(1 - \text{cosec}\,t)^2}$ **17.** $-\theta(\theta\cos\theta + 2\,\text{sen}\,\theta)$

19. $\sec\theta\,\text{cosec}\,\theta\,(\text{tg}\,\theta - \text{cotg}\,\theta) = \sec^2\theta - \text{cosec}^2\theta$

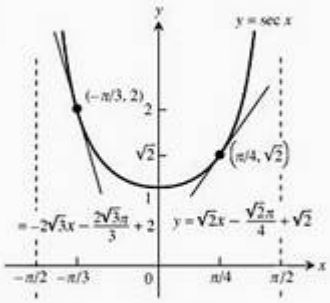
21. $\sec^2 q$ **23.** $\sec^2 q$

25. **(a)** $2\,\text{cosec}^3 x - \text{cosec}\,x$ **(b)** $2\sec^3 x - \sec x$

27.

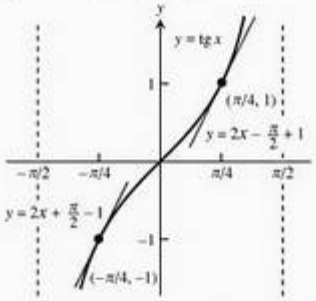


29.



31. Sim, em $x = \pi$. **33.** Não.

35. $\left(-\dfrac{\pi}{4}, -1\right); \left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$



37. **(a)** $y = -x + \pi/2 + 2$ **(b)** $y = 4 - \sqrt{3}$

39. 0 **41.** -1 **43.** 0

45. $-\sqrt{2}$ m/s, $\sqrt{2}$ m/s, $\sqrt{2}$ m/s², $\sqrt{2}$ m/s³

47. $c = 9$ **49.** $\text{sen}\,x$

Seção 3.5

1. $12x^3$ **3.** $3\cos(3x + 1)$ **5.** $-\text{sen}(\text{sen}\,x)\cos x$

7. $10\sec^2(10x - 5)$

9. Com $u = (2x + 1)$, $y = u^5$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = 5u^4 \cdot 2 = 10(2x + 1)^4$

11. Com $u = (1 - (x/7))$, $y = u^{-7}$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = -7u^{-8} \cdot \left(-\dfrac{1}{7}\right) = \left(1 - \dfrac{x}{7}\right)^{-8}$

13. Com $u = ((x^2/8) + x - (1/x))$, $y = u^4$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = 4u^3 \cdot \left(\dfrac{x}{4} + 1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 4\left(\dfrac{x^2}{8} + x - \dfrac{1}{x}\right)^3\left(\dfrac{x}{4} + 1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

15. Com $u = \text{tg}\,x$, $y = \sec u$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = (\sec u\,\text{tg}\,u)(\sec^2 x) = \sec(\text{tg}\,x)\,\text{tg}(\text{tg}\,x)\sec^2 x$

17. Com $u = \text{sen}\,x$, $y = u^3$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = 3u^2\cos x = 3\,\text{sen}^2 x\,(\cos x)$

19. $y = e^u$, $u = -5x$, $\dfrac{dy}{dx} = -5e^{-5x}$

21. $y = e^u$, $u = 5 - 7x$, $\dfrac{dy}{dx} = -7e^{(5-7x)}$

23. $-\dfrac{1}{2\sqrt{3 - t}}$ **25.** $\dfrac{4}{\pi}(\cos 3t - \text{sen}\,5t)$ **27.** $\dfrac{\text{cosec}\,\theta}{\text{cotg}\,\theta + \text{cosec}\,\theta}$

29. $2x\,\text{sen}^4 x + 4x^2\,\text{sen}^3 x\cos x + \cos^{-2} x + 2x\cos^{-3} x\,\text{sen}\,x$

31. $(3x-2)^6 - \dfrac{1}{x^3\left(4-\dfrac{1}{2x^2}\right)^2}$ **33.** $\dfrac{(4x+3)^3(4x+7)}{(x+1)^4}$

35. $(1-x)e^{-x} + 3e^{3x}$ **37.** $\left(\dfrac{5}{2}x^2 - 3x + 3\right)e^{5x/2}$

39. $\sqrt{x}\sec^2(2\sqrt{x}) + \operatorname{tg}(2\sqrt{x})$ **41.** $\dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{(1+\cos\theta)^2}$

43. $\dfrac{dr}{d\theta} = -2\operatorname{sen}(\theta^2)\operatorname{sen}2\theta + 2\theta\cos(2\theta)\cos(\theta^2)$

45. $\dfrac{dq}{dt} = \left(\dfrac{t+2}{2(t+1)^{3/2}}\right)\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{t+1}}\right)$ **47.** $2\theta e^{-\theta^2}\operatorname{sen}(e^{-\theta^2})$

49. $2\pi\operatorname{sen}(\pi t - 2)\cos(\pi t - 2)$ **51.** $\dfrac{8\operatorname{sen}(2t)}{(1+\cos 2t)^5}$

53. $\dfrac{dy}{dt} = -2\pi\operatorname{sen}(\pi t - 1)\cdot\cos(\pi t - 1)\cdot e^{\cos^2(\pi t-1)}$

55. $-2\cos(\cos(2t-5))(\operatorname{sen}(2t-5))$

57. $\left(1+\operatorname{tg}^4\left(\dfrac{t}{12}\right)\right)^2\left(\operatorname{tg}^3\left(\dfrac{t}{12}\right)\sec^2\left(\dfrac{t}{12}\right)\right)$

59. $-\dfrac{t\operatorname{sen}(t^2)}{\sqrt{1+\cos(t^2)}}$ **61.** $\dfrac{6}{x^3}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$

63. $2\operatorname{cosec}^2(3x-1)\operatorname{cotg}(3x-1)$ **65.** $y'' = 2(2x^2+1)^2e^x$

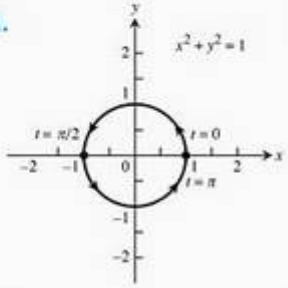
67. $5/2$ **69.** $-\pi/4$ **71.** 0

73. (a) $2/3$ (b) $2\pi + 5$ (c) $15 - 8\pi$ (d) $37/6$ (e) -1 (f) $\sqrt{2}/24$ (g) $5/32$ (h) $-5/(3\sqrt{17})$

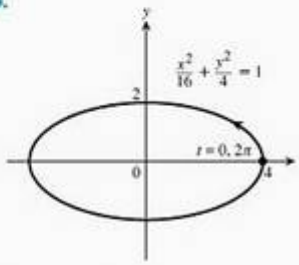
75. 5

77. (a) 1 (b) 1 **79.** (a) $y = \pi x + 2 - \pi$ (b) $\pi/2$

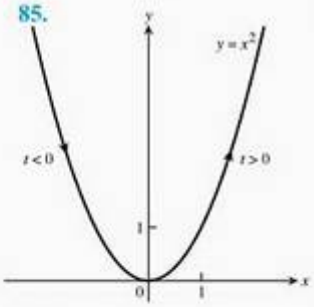
81.



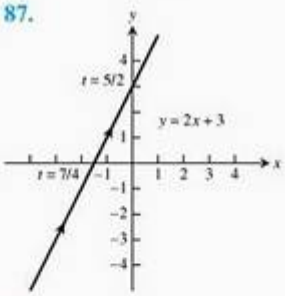
83.



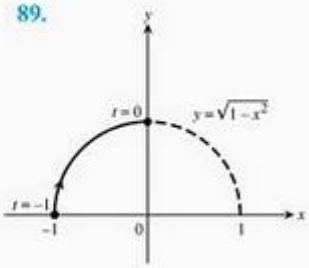
85.



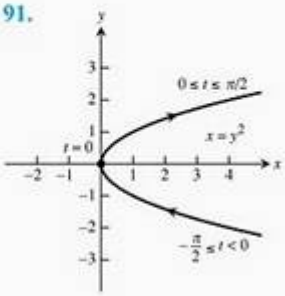
87.



89.



91.



93. (a) $x = a\cos t, y = -a\operatorname{sen} t, 0 \le t \le 2\pi$
(b) $x = a\cos t, y = a\operatorname{sen} t, 0 \le t \le 2\pi$
(c) $x = a\cos t, y = -a\operatorname{sen} t, 0 \le t \le 4\pi$
(d) $x = a\cos t, y = a\operatorname{sen} t, 0 \le t \le 4\pi$

95. Possível resposta: $x = -1 + 5t, y = -3 + 4t, 0 \le t \le 1$

97. Possível resposta: $x = t^2 + 1, y = t, t \le 0$

99. Possível resposta: $x = 2 - 3t, y = 3 - 4t, t \ge 0$

101. $y = -x + 2\sqrt{2}, \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi/4} = -\sqrt{2}$

103. $y = x + \dfrac{1}{4}, \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1/4} = -2$

105. $y = x - 4, \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=-1} = \dfrac{1}{2}$ **107.** $y = 2, \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi/2} = -1$

109. A duplicação da freqüência multiplica a velocidade, a aceleração e o torque por 2, 4 e 8, respectivamente.

111. $v(6) = \dfrac{2}{5}\,\text{m/s}, \quad a(6) = -\dfrac{4}{125}\,\text{m/s}^2$

121. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), y = 2x$ at $t = 0, y = -2x$ at $t = \pi$

Seção 3.6

1. $\dfrac{9}{4}x^{5/4}$ **3.** $\dfrac{2^{1/3}}{3x^{2/3}}$ **5.** $\dfrac{7}{2(x+6)^{1/2}}$ **7.** $-(2x+5)^{-3/2}$

9. $\dfrac{2x^2+1}{(x^2+1)^{1/2}}$ **11.** $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{2}{7}t^{-5/7}$

13. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{4}{3}(2t+5)^{-5/3}\cos[(2t+5)^{-2/3}]$

15. $f'(x) = \dfrac{-1}{4\sqrt{x(1-\sqrt{x})}}$

17. $h'(\theta) = -\dfrac{2}{3}(\operatorname{sen}2\theta)(1+\cos 2\theta)^{-2/3}$ **19.** $\dfrac{-2xy - y^2}{x^2 + 2xy}$

21. $\dfrac{1-2y}{2x+2y-1}$ **23.** $\dfrac{-2x^3 + 3x^2y - xy^2 + x}{x^2y - x^3 + y}$

25. $\dfrac{1}{y(x+1)^2}$ **27.** $\cos^2 y$ **29.** $\dfrac{2e^{2x} - \cos(x+3y)}{3\cos(x+3y)}$

31. $\dfrac{-y^2}{y\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{y}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{y}\right) + xy}$ **33.** $-\dfrac{\sqrt{r}}{\sqrt{\theta}}$ **35.** $\dfrac{-r}{\theta}$

37. $y' = -\dfrac{x}{y}, \; y'' = \dfrac{-y^2 - x^2}{y^3}$

39. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xe^{x^2} + 1}{y}, \; \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{(2x^2y^2 + y^2 - 2x)e^{x^2} - x^2e^{2x^2} - 1}{y^3}$

41. $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1}, \; y'' = \dfrac{1}{2(\sqrt{y}+1)^3}$

43. -2 **45.** $(-2, 1): m = -1, (-2, -1): m = 1$

47. (a) $y = \dfrac{7}{4}x - \dfrac{1}{2}$, (b) $y = -\dfrac{4}{7}x + \dfrac{29}{7}$

49. (a) $y = 3x + 6$, (b) $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}$

51. (a) $y = \dfrac{6}{7}x + \dfrac{6}{7}$, (b) $y = -\dfrac{7}{6}x - \dfrac{7}{6}$

53. (a) $y = -\dfrac{\pi}{2}x + \pi$, (b) $y = \dfrac{2}{\pi}x - \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{\pi}{2}$

53. (a) $y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$, (b) $y = \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$

57. Pontos: $(-\sqrt{7}, 0)$ e $(\sqrt{7}, 0)$, coeficiente angular: -2

59. $m = -1$ at $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $m = \sqrt{3}$ at $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$

61. $(-3, 2): m = -\frac{27}{8}$; $(-3, -2): m = \frac{27}{8}$; $(3, 2): m = \frac{27}{8}$; $(3, -2): m = -\frac{27}{8}$ **63.** 0 **65.** -6

67. (a) Falso. (b) Verdadeiro. (c) Verdadeiro. (d) Verdadeiro.

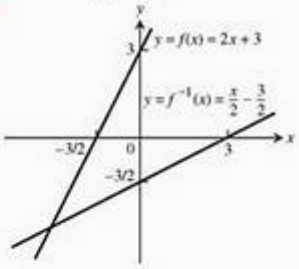
69. $(3, -1)$

73. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3 + 2xy}{x^2 + 3xy^2}$, $\frac{dx}{dy} = -\frac{x^2 + 3xy^2}{y^3 + 2xy}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$

Seção 3.7

1. (a) $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

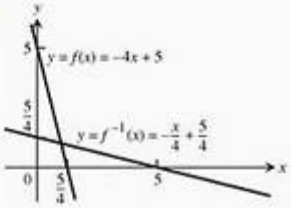
(b)



(c) 2, 1/2

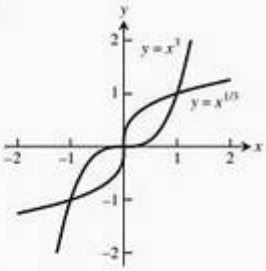
3. (a) $f^{-1}(x) = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}$

(b)



(c) $-4, -1/4$

5. (b)



(c) Coeficiente angular de f em (1, 1): 3; coeficiente angular de g em (1, 1): 1/3; coeficiente angular de f em (−1, −1): 3; coeficiente angular de g em (−1, −1): 1/3.

(d) $y = 0$ é tangente a $y = x^3$ em $x = 0$; $x = 0$ é tangente a $y = \sqrt[3]{x}$ em $x = 0$.

7. 1/9 **9.** 3 **11.** $1/x$ **13.** $2/t$ **15.** $-1/x$ **17.** $\frac{1}{\theta + 1}$

19. $3/x$ **21.** $2(\ln t) + (\ln t)^2$ **23.** $x^3 \ln x$ **25.** $\frac{1 - \ln t}{t^2}$

27. $\frac{1}{x(1 + \ln x)^2}$ **29.** $\frac{1}{x \ln x}$ **31.** $2\cos(\ln \theta)$

33. $-\frac{3x + 2}{2x(x + 1)}$ **35.** $\frac{2}{t(1 - \ln t)^2}$ **37.** $\frac{\operatorname{tg}(\ln \theta)}{\theta}$

39. $\frac{10x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2(1 - x)}$

41. $\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{x(x + 1)}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1}\right) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x(x + 1)}}$

43. $\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{t}{t + 1}}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + 1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{t}(t + 1)^{3/2}}$

45. $\sqrt{\theta + 3}(\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{1}{2(\theta + 3)} + \operatorname{cotg}\theta\right)\Big]$

47. $t(t + 1)(t + 2)\left[\frac{1}{t} + \frac{1}{t + 1} + \frac{1}{t + 2}\right. = 3t^2 + 6t + 2$

49. $\frac{\theta + 5}{\theta \cos\theta}\left[\frac{1}{\theta + 5} - \frac{1}{\theta} + \operatorname{tg}\theta\right]$

51. $\frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{(x + 1)^{2/3}}\left[\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{2}{3(x + 1)}\right]$

53. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x - 2)}{x^2 + 1}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 2} - \frac{2x}{x^2 + 1}\right)$ **55.** $-2\operatorname{tg}\theta$

57. $\frac{1 - t}{t}$ **59.** $1/(1 + e^{\theta})$ **61.** $e^{\cos t}(1 - t\operatorname{sen} t)$

63. $\frac{ye^y \cos x}{1 - ye^y \operatorname{sen} x}$ **65.** $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - xy\ln y}{x^2 - xy\ln x}$ **67.** $2^x \ln 2$

69. $\left(\frac{\ln 5}{2\sqrt{s}}\right)5^{\sqrt{s}}$ **71.** $\pi x^{(\pi - 1)}$ **73.** $\frac{1}{\theta \ln 2}$ **75.** $\frac{3}{x \ln 4}$

77. $\frac{2(\ln r)}{r(\ln 2)(\ln 4)}$ **79.** $\frac{-2}{(x + 1)(x - 1)}$

81. $\operatorname{sen}(\log_7 \theta) + \frac{1}{\ln 7}\cos(\log_7 \theta)$ **83.** $\frac{1}{\ln 5}$

85. $\frac{1}{t}(\log_2 3)3^{\log_2 t}$ **87.** $\frac{1}{t}$ **89.** $(x + 1)^x\left(\frac{x}{x + 1} + \ln(x + 1)\right)$

91. $(\sqrt{t})^t\left(\frac{\ln t}{2} + \frac{1}{2}\right)$ **93.** $(\operatorname{sen} x)^x(\ln \operatorname{sen} x + x \operatorname{cotg} x)$

95. $(x^{\ln x})\left(\frac{\ln x^2}{x}\right)$

Seção 3.8

1. (a) $\pi/4$ (b) $-\pi/3$ (c) $\pi/6$
3. (a) $-\pi/6$ (b) $\pi/4$ (c) $-\pi/3$
5. (a) $\pi/3$ (b) $3\pi/4$ (c) $\pi/6$
7. (a) $3\pi/4$ (b) $\pi/6$ (c) $2\pi/3$
9. (a) $\pi/4$ (b) $-\pi/3$ (c) $\pi/6$
11. (a) $3\pi/4$ (b) $\pi/6$ (c) $2\pi/3$

13. $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\sec\alpha = \frac{13}{12}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{13}{5}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{12}{5}$

15. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{1}{2}$

17. $1/\sqrt{2}$ **19.** $-1/\sqrt{3}$ **21.** $\frac{4 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ **23.** 1 **25.** $-\sqrt{2}$

27. $\pi/6$ **29.** $\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2}$ **31.** $\sqrt{9y^2 - 1}$ **33.** $\sqrt{1 - x^2}$

35. $\frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1}$ **37.** $\frac{\sqrt{9 - 4y^2}}{3}$ **39.** $\frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x}$ **41.** $\pi/2$

43. $\pi/2$ 45. $\pi/2$ 47. 0 49. $\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$ 51. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}$

53. $\dfrac{1}{|2s+1|\sqrt{s^2+s}}$ 55. $\dfrac{-2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2}}$

57. $\dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$ 59. $\dfrac{-1}{2\sqrt{t}\,(1+t)}$ 61. $\dfrac{1}{(\operatorname{tg}^{-1}x)(1+x^2)}$

63. $\dfrac{-e^t}{|e^t|\sqrt{(e^t)^2-1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{e^{2t}-1}}$ 65. $\dfrac{-2s^n}{\sqrt{1-s^2}}$ 67. 0

69. $\operatorname{sen}^{-1}x$

71. (a) $y = \dfrac{\pi}{2}$ (b) $y = -\dfrac{\pi}{2}$ (c) Não há nenhuma

73. (a) $y = \dfrac{\pi}{2}$ (b) $y = \dfrac{\pi}{2}$ (c) Não há nenhuma

81. (a) Definida; existe um ângulo cuja tangente é 2.
(b) Não definida; não existe um ângulo cujo cosseno seja 2.

83. (a) Não definida; nenhum ângulo tem secante 0.
(b) Não definida; nenhum ângulo tem seno $\sqrt{2}$.

93. (a) Domínio: todos os números reais, exceto aqueles que tenham a forma $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, onde k seja um inteiro; imagem: $-\pi/2 < y < \pi/2$.
(b) Domínio: $-\infty < x < \infty$; imagem: $-\infty < y < \infty$.

95. (a) Domínio: $-\infty < x < \infty$; imagem: $0 \le y \le \pi$.
(b) Domínio: $-1 \le x \le 1$; imagem: $-1 \le y \le 1$.

97. Os gráficos são idênticos.

Seção 3.9

1. $\dfrac{dA}{dt} = 2\pi r\dfrac{dr}{dt}$

3. (a) $\dfrac{dV}{dt} = \pi r^2\dfrac{dh}{dt}$ (b) $\dfrac{dV}{dt} = 2\pi hr\dfrac{dr}{dt}$
(c) $\dfrac{dV}{dt} = \pi r^2\dfrac{dh}{dt} + 2\pi hr\dfrac{dr}{dt}$

5. (a) 1 volt/s (b) $-\dfrac{1}{3}$ amp/s
(c) $\dfrac{dR}{dt} = \dfrac{1}{I}\left(\dfrac{dV}{dt} - \dfrac{V}{I}\dfrac{dI}{dt}\right)$ (d) 3/2 ohms/s, R está aumentando.

7. (a) $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{dx}{dt}$
(b) $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{dy}{dt}$
(c) $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dt}$

9. (a) $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}ab\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}$
(b) $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}ab\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{1}{2}b\operatorname{sen}\theta\dfrac{da}{dt}$
(c) $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}ab\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{1}{2}b\operatorname{sen}\theta\dfrac{da}{dt} + \dfrac{1}{2}a\operatorname{sen}\theta\dfrac{db}{dt}$

11. (a) 14 cm²/s, aumentando (b) 0 cm/s, constante
(c) −14/13 cm/s, diminuindo

13. (a) −12 pés/s (b) −59,5 pés²/s (c) −1 rad/s

15. 20 pés/s

17. (a) $\dfrac{dh}{dt} = 11{,}19$ cm/min (b) $\dfrac{dr}{dt} = 14{,}92$ cm/min

19. (a) $\dfrac{1}{24\pi}$ m/min (b) $r = \sqrt{26y - y^2}$ m
(c) $\dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{5}{288\pi}$ m/min

21. 1 pés/min, 40π pés²/min 23. 11 pés/s 25. Vai aumentar em 466/1,681 L/min. 27. 1 rad/s 29. −5 m/s

31. −1.500 pés/s 33. $\dfrac{5}{72\pi}$ pol/min, $\dfrac{10}{3}$ pol²/min

35. 7,1 pol/min

37. (a) $-32/\sqrt{13} \approx -8.875$ pés/s,
(b) $d\theta_1/dt = -8/65$ rad/s, $d\theta_2/dt = 8/65$ rad/s
(c) $d\theta_1/dt = -1/6$ rad/s, $d\theta_2/dt = 1/6$ rad/s

Seção 3.10

1. $L(x) = 10x - 13$ 3. $L(x) = 2$ 5. $L(x) = x - \pi$ 7. $2x$

9. -5 11. $\dfrac{1}{12}x + \dfrac{4}{3}$ 13. $1 - x$

15. $f(0) = 1$. Além disso, $f'(x) = k(1+x)^{k-1}$, portanto $f'(0) = k$. Isso significa que a linearização em $x = 0$ é $L(x) = 1 + kx$.

17. (a) 1,01 (b) 1,003

19. $\left(3x^2 - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}\right)dx$ 21. $\dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}dx$ 23. $\dfrac{1-y}{3\sqrt{y}+x}dx$

25. $\dfrac{5}{2\sqrt{x}}\cos(5\sqrt{x})\,dx$ 27. $(4x^2)\sec^2\left(\dfrac{x^3}{3}\right)dx$

29. $\dfrac{3}{\sqrt{x}}(\operatorname{cosec}(1-2\sqrt{x})\operatorname{cotg}(1-2\sqrt{x}))\,dx$

31. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}dx$ 33. $\dfrac{2x}{1+x^2}dx$ 35. $\dfrac{2xe^{x^2}}{1+e^{2x^2}}dx$

37. $\dfrac{-1}{\sqrt{e^{-2x}-1}}dx$ 39. (a) 0,41 (b) 0,4 (c) 0,01

41. (a) 0,231 (b) 0,2 (c) 0,031

43. (a) −1/3 (b) −2/5 (c) 1/15

45. $dV = 4\pi r_0^2\,dr$ 47. $dS = 12x_0\,dx$ 49. $dV = 2\pi r_0 h\,dr$

51. (a) $0{,}08\pi$ m² (b) 2% 53. $dV \approx 565{,}5$ pol³

55. $\dfrac{1}{3}$% 57. 0,05%

59. A razão é igual a 37,87, portanto uma variação na aceleração da gravidade na superfície da Lua tem cerca de 38 vezes o efeito que uma variação da mesma magnitude teria na Terra.

61. 3% 63. 3% 67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{1+0}}{1+\left(\dfrac{0}{2}\right)} = \dfrac{1}{1} = 1$

71. (a) $L(x) = 1 + (\ln 2)x \approx 0{,}69x + 1$ 75. $0{,}07c$

Exercícios práticos

1. $5x^4 - 0{,}25x + 0{,}25$ 3. $3x(x-2)$

5. $2(x+1)(2x^2+4x+1)$

7. $3(\theta^2 + \sec\theta + 1)^2(2\theta + \sec\theta\operatorname{tg}\theta)$

9. $\dfrac{1}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^2}$ 11. $2\sec^2 x\operatorname{tg} x$

13. $8\cos^3(1-2t)\,\text{sen}(1-2t)$ **15.** $5(\sec t)(\sec t + \text{tg}\, t)^5$

17. $\dfrac{\theta\cos\theta + \text{sen}\,\theta}{\sqrt{2\theta\,\text{sen}\,\theta}}$ **19.** $\dfrac{\cos\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}}$

21. $x\,\text{cosec}\left(\dfrac{2}{x}\right) + \text{cosec}\left(\dfrac{2}{x}\right)\text{cotg}\left(\dfrac{2}{x}\right)$

23. $\dfrac{1}{2}x^{1/2}\sec(2x)^2\left[16\,\text{tg}(2x)^2 - x^{-2}\right]$

25. $-10x\,\text{cosec}^2(x^2)$ **27.** $8x^3\,\text{sen}(2x^2)\cos(2x^2) + 2x\,\text{sen}^2(2x^2)$

29. $\dfrac{-(t+1)}{8t^3}$ **31.** $\dfrac{1-x}{(x+1)^3}$ **33.** $\dfrac{-1}{2x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1/2}}$

35. $\dfrac{-2\,\text{sen}\,\theta}{(\cos\theta - 1)^2}$ **37.** $3\sqrt{2x+1}$ **39.** $-9\left[\dfrac{5x + \cos 2x}{(5x^2 + \text{sen}\,2x)^{5/2}}\right]$

41. $-2e^{-x/5}$ **43.** xe^{4x} **45.** $\dfrac{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{\text{sen}^2\,\theta} = 2\,\text{cotg}\,\theta$

47. $\dfrac{2}{(\ln 2)x}$ **49.** $-8^{-t}(\ln 8)$ **51.** $18x^{2,6}$

53. $(x+2)^{x+2}(\ln(x+2)+1)$ **55.** $-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

57. $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x}$ **59.** $\text{tg}^{-1}(t) + \dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{1}{2t}$

61. $\dfrac{1-z}{\sqrt{z^2-1}} + \sec^{-1}z$ **63.** -1 **65.** $-\dfrac{y+2}{x+3}$

67. $\dfrac{-3x^2 - 4y + 2}{4x - 4y^{1/3}}$ **69.** $-\dfrac{y}{x}$ **71.** $\dfrac{1}{2y(x+1)^2}$ **73.** $-1/2$

75. y/x **77.** $\dfrac{2e^{-\text{tg}^{-1}x}}{1+x^2}$ **79.** $\dfrac{dp}{dq} = \dfrac{6q - 4p}{3p^2 + 4q}$

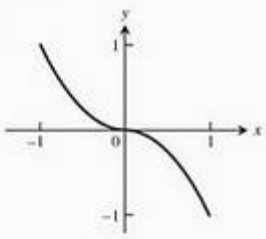
81. $\dfrac{dr}{ds} = (2r-1)(\text{tg}\,2s)$

83. **(a)** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2xy^3 - 2x^4}{y^5}$ **(b)** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2xy^2 - 1}{x^4y^3}$

85. **(a)** 7 **(b)** -2 **(c)** 5/12 **(d)** 1/4 **(e)** 12 **(f)** 9/2 **(g)** 3/4

87. 0 **89.** $\dfrac{3\sqrt{2e}^{\sqrt{3/2}}}{4}\cos(e^{\sqrt{3/2}})$ **91.** $-\dfrac{1}{2}$ **93.** $\dfrac{-2}{(2t+1)^2}$

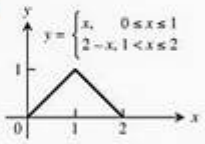
95. **(a)**



$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0 \\ -x^2, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

(b) Sim. **(c)** Sim.

97. **(a)**

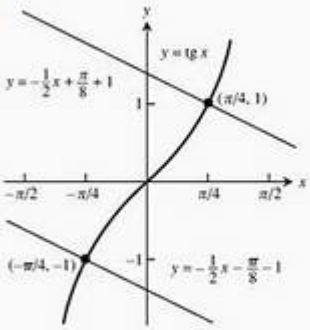


(b) Sim **(c)** Não

99. $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$ e $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$ **101.** $(-1, 27)$ e $(2, 0)$

03. **(a)** $(-2, 16), (3, 11)$ **(b)** $(0, 20), (1, 7)$

105.



107. $\dfrac{1}{4}$ **109.** 4

111. Tangente: $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{4}$, normal: $y = 4x - 2$

113. Tangente: $y = 2x - 4$, normal: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$

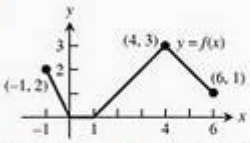
115. Tangente: $y = -\dfrac{5}{4}x + 6$, normal: $y = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{11}{5}$

117. $(1, 1)$: $m = -\dfrac{1}{2}$; $(1, -1)$: m não definido.

119. $y = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}$

121. B = gráfico de f, A = gráfico de f'

123.



125. **(a)** 0, 0 **(b)** 1.700 coelhos, ≈1.400 coelhos.

127. -1 **129.** 1/2 **131.** 4 **133.** 1

137. $\dfrac{2(x^2+1)}{\sqrt{\cos 2x}}\left[\dfrac{2x}{x^2+1} + \text{tg}\,2x\right]$

139. $5\left[\dfrac{(t+1)(t-1)}{(t-2)(t+3)}\right]^5\left[\dfrac{1}{t+1} + \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t-2} - \dfrac{1}{t+3}\right]$

141. $\dfrac{1}{\sqrt{\theta}}(\text{sen}\,\theta)^{\sqrt{\theta}}\left(\dfrac{\ln\sqrt{\text{sen}\,\theta}}{2} + \theta\,\text{cotg}\,\theta\right)$

143. **(a)** $\dfrac{dS}{dt} = (4\pi r + 2\pi h)\dfrac{dr}{dt}$ **(b)** $\dfrac{dr}{dt} = 2\pi r\dfrac{dh}{dt}$

(c) $\dfrac{dS}{dt} = (4\pi r + 2\pi h)\dfrac{dr}{dt} + 2\pi r$

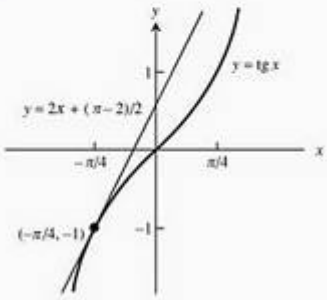
(d) $\dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{r}{2r+h}\dfrac{dh}{dt}$

145. $-40\ \text{m}^2/\text{s}$ **147.** 0,02 ohm/s **149.** 22 m/s

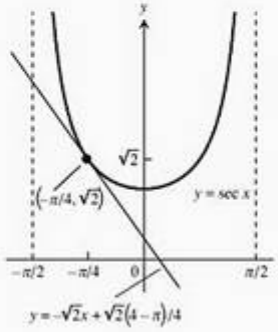
151. **(a)** $r = \dfrac{2}{5}h$ **(b)** $-\dfrac{125}{144\pi}$ pés/min

153. **(a)** $\dfrac{3}{5}$ km/s ou 600 m/s **(b)** $\dfrac{18}{\pi}$ rpm

155. **(a)** $L(x) = 2x + \dfrac{\pi - 2}{2}$



(b) $L(x) = -\sqrt{2}x + \dfrac{\sqrt{2}(4-\pi)}{4}$



157. $L(x) = 1{,}5x + 0{,}5$ **159.** $dS = \dfrac{\pi r h_0}{\sqrt{r^2 + h_0^2}}\, dh$

161. (a) 4% **(b)** 8% **(c)** 12%

Exercícios adicionais

1. (a) $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$; $2\cos 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\theta) + \cos\theta(2\cos\theta)$; $2\cos 2\theta = -2\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos^2\theta$; $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

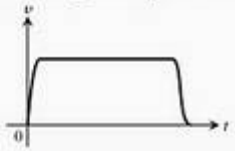
(b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$; $-2\operatorname{sen} 2\theta = 2\cos\theta(-\operatorname{sen}\theta) - 2\operatorname{sen}\theta(\cos\theta)$; $\operatorname{sen} 2\theta = \cos\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta$; $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

3. (a) $a = 1, b = 0, c = -\dfrac{1}{2}$ **(b)** $b = \cos a, c = \operatorname{sen} a$

5. $h = -4, k = \dfrac{9}{2}, a = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

7. (a) $0{,}09y$ **(b)** Aumentando a 1% ao ano.

9. As respostas podem variar. Eis uma possibilidade.



11. (a) 2 s, 64 pés/s. **(b)** 12,31 s, 393,85 pés.

15. (a) $m = -\dfrac{b}{\pi}$ **(b)** $m = -1, b = \pi$

17. (a) $a = \dfrac{3}{4}, b = \dfrac{9}{4}$ **19.** f ímpar $\Rightarrow f'$ é par.

23. h' é definida, mas não contínua em $x = 0$; k' é definida e contínua em $x = 0$.

27. (a) 0,8156 pés. **(b)** 0,00613 s. **(c)** Ele atrasa cerca de 8,83 min/dia.

CAPÍTULO 4

Seção 4.1

1. Mínimo absoluto em $x = c_2$; máximo absoluto em $x = b$.

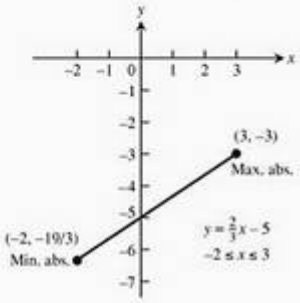
3. Máximo absoluto em $x = c$; não há mínimo absoluto.

5. Mínimo absoluto em $x = a$; máximo absoluto em $x = c$.

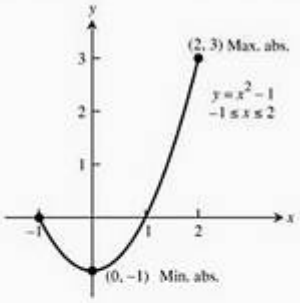
7. Mínimo local em $(-1, 0)$; máximo local em $(1, 0)$.

9. Máximo em $(0, 5)$. **11. (c)** **13. (d)**

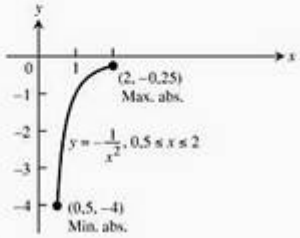
15. Máximo absoluto: -3; mínimo absoluto: $-19/3$



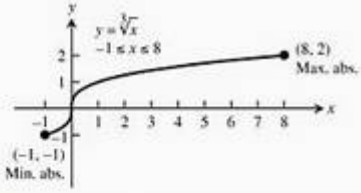
17. Máximo absoluto: 3; mínimo absoluto: -1



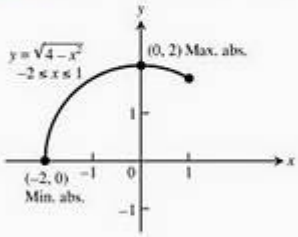
19. Máximo absoluto: $-0{,}25$; mínimo absoluto: -4



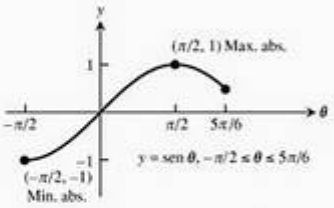
21. Máximo absoluto: 2; mínimo absoluto: -1



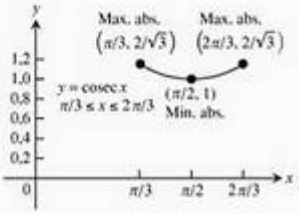
23. Máximo absoluto: 2; mínimo absoluto: 0



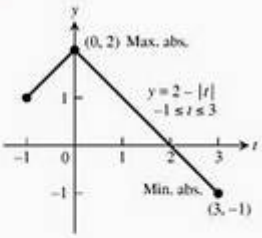
25. Máximo absoluto: 1; mínimo absoluto: -1



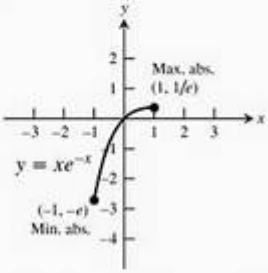
27. Máximo absoluto: $2/\sqrt{3}$; mínimo absoluto: 1



29. Máximo absoluto: 2; mínimo absoluto: −1



31. Máximo absoluto: $1/e$; mínimo absoluto: $-e$



33. Máximo absoluto em $\left(4, \frac{1}{4} + \ln 4\right)$; mínimo absoluto em $(1, 1)$.

35. Crescente em $(0, 8)$, decrescente em $(-1, 0)$; máximo absoluto: 16 em $x = 8$; mínimo absoluto: 0 em $x = 0$.

37. Crescente em $(-32, 1)$; máximo absoluto: 1 em $\theta = 1$; mínimo absoluto: -8 em $\theta = -32$.

39. O valor mínimo é 1 em $x = 2$.

41. Máximo local em $(-2, 17)$; mínimo local em $\left(\frac{4}{3}, \frac{41}{27}\right)$.

43. O valor mínimo é 0 em $x = -1$ e $x = 1$.

45. Existe um mínimo local em $(0, 1)$.

47. O valor máximo é $\frac{1}{2}$ em $x = 1$; o valor mínimo é $-\frac{1}{2}$ em $x = -1$.

49. O valor mínimo é 2 em $(0, 2)$.

51. O valor mínimo é $\frac{-1}{e}$ em $\left(\frac{1}{e}, \frac{-1}{e}\right)$.

53. O valor máximo é $\frac{\pi}{2}$ em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

O valor mínimo é 0 em $(\pm 1, 0)$.

55.

Ponto crítico	Derivada	Extremo	Valor
$x = -\frac{4}{5}$	0	Máx local	$\frac{12}{25}10^{1/3} = 1{,}034$
$x = 0$	Indefinida	Máx local	0

57.

Ponto crítico	Derivada	Extremo	Valor
$x = -2$	Indefinida	Máx. local	0
$x = -\sqrt{2}$	0	Mínimo	-2
$x = \sqrt{2}$	0	Máximo	2
$x = 2$	Indefinida	Mín. local	0

59.

Ponto crítico	Derivada	Extremo	Valor
$x = 1$	Indefinida	Mínimo	2

61.

Ponto crítico	Derivada	Extremo	Valor
$x = -1$	0	Máximo	5
$x = 1$	Indefinida	Mín. local	1
$x = 3$	0	Máximo	5

63. (a) Não.

(b) A derivada é definida e diferente de zero para $x \neq 2$. Além disso, $f(2) = 0$ e $f(x) > 0$ para qualquer $x \neq 2$.

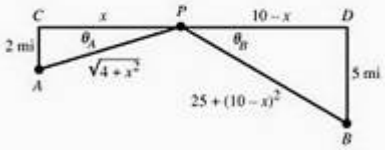
(c) Não, pois $(-\infty, \infty)$ não é um intervalo fechado.

(d) As respostas são iguais às dos itens **(a)** e **(b)**, com a no lugar do 2.

65. (a) $C(x) = 0{,}3\sqrt{16 + x^2} + 0{,}2(9 - x)$ milhões de dólares, onde $0 \leq x \leq 9$ mi. Para minimizar os custos da construção, a tubulação precisa ligar o atracadouro até o ponto B, que deve estar a 3,58 mi de distância do ponto A, e do ponto B em diante a tubulação deve seguir por terra até a refinaria.

(b) Em teoria, o custo da tubulação subaquática por milha p teria de ser infinito para justificar que a tubulação fosse diretamente do atracadouro até o ponto A (isto é, para que x_c fosse zero). Para todos os valores de $p > 0{,}218864$, existe sempre um x_c em $(0, 9)$ que proporciona um valor mínimo para C. Comprovamos isso observando a seguinte fórmula: $C \rightarrow (x_c) = \frac{16p}{(16 + x_c^2)^{3/2}}$, que é sempre positiva para $p > 0$.

67. O comprimento da tubulação é $L(x) = \sqrt{4 + x^2} + \sqrt{25 + (10 - x)^2}$ para $0 \leq x \leq 10$, $x = \frac{20}{7} \approx 2{,}857$ mi ao longo da costa, da a Cidade A até a Cidade B.



69. **(a)** O valor máximo é 144 em $x = 2$.

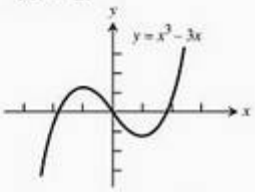
(b) O maior volume da caixa é 144 unidades cúbicas, e ele ocorre quando $x = 2$.

71. A maior área possível é $A\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{25}{4}\ \text{cm}^2$.

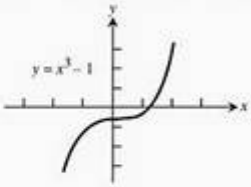
73. $\frac{v_0^2}{2g} + s_0$ **75.** Sim. **77.** g assume um máximo local em $-c$.

79. **(a)** $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ é uma função quadrática, logo pode ter 0, 1 ou 2 zeros, que seriam os pontos críticos de f. Exemplos:

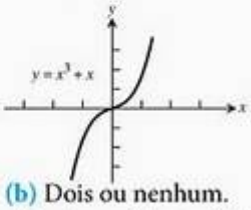
A função $f(x) = x^3 - 3x$ tem dois pontos críticos em $x = -1$ e $x = 1$.



A função $f(x) = x^3 - 1$ tem um ponto crítico em $x = 0$.



A função $f(x) = x^3 + x$ não tem nenhum ponto crítico.



(b) Dois ou nenhum.

81. O valor máximo é 11 em $x = 5$; o valor mínimo é 5 no intervalo $[-3, 2]$; máximo local em $(-5, 9)$.

83. O valor máximo é 5 no intervalo $[3, \infty)$; o valor mínimo é -5 no intervalo $[-\infty, -2]$.

Seção 4.2

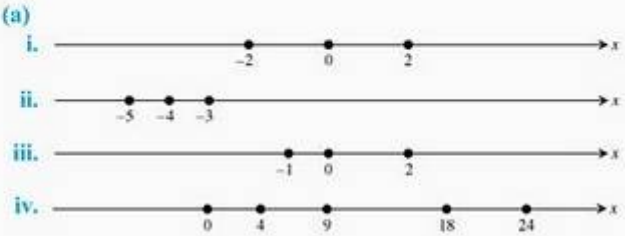
1. 1/2

3. $c = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} \approx \pm 0{,}771$

5. Não satisfaz; f não é derivável no ponto interior ao domínio $x = 0$.

7. Satisfaz.

11. **(a)**



23. Sim.

25. **(a)** 4 **(b)** 3 **(c)** 3

27. **(a)** $\frac{x^2}{2} + C$ **(b)** $\frac{x^3}{3} + C$ **(c)** $\frac{x^4}{4} + C$

29. **(a)** $y = -\ln|x| + C$ **(b)** $y = x - \ln|x| + C$ **(c)** $y = 5x + \ln|x| + C$

31. **(a)** $-\frac{1}{2}\cos 2t + C$ **(b)** $2\,\text{sen}\,\frac{t}{2} + C$

(c) $-\frac{1}{2}\cos 2t + 2\,\text{sen}\,\frac{t}{2} + C$

33. $f(x) = x^2 - x$ **35.** $f(x) = 1 + \frac{e^{2x}}{2}$

37. $s = 4{,}9t^2 + 5t + 10$ **39.** $s = \frac{1 - \cos(\pi t)}{\pi}$

41. $s = e^t + 19t + 4$ **43.** $s = \text{sen}(2t) - 3$

45. Se $T(t)$ é a temperatura do termômetro no instante t, então $T(0) = -19$ °C e $T(14) = 100$ °C. De acordo com o teorema do valor médio, existe um $0 < t_0 < 14$ tal que $\frac{T(14) - T(0)}{14 - 0} = 8{,}5$ °C/s $= T'(t_0)$, taxa à qual a temperatura estava variando em $t = t_0$, medida pela subida do filamento de mercúrio no termômetro.

47. Porque sua velocidade era de aproximadamente 7,667 nós, e, de acordo com o teorema do valor médio, o trirreme assumiu essa velocidade pelo menos uma vez durante o percurso.

51. A conclusão do teorema do valor médio implica que

$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = -\frac{1}{c^2} \Rightarrow c^2\left(\frac{a - b}{ab}\right) = a - b \Rightarrow c = \sqrt{ab}.$$

55. De acordo com o teorema do valor médio, $f(x)$ deve ser zero pelo menos uma vez entre a e b. Suponha, agora, que $f(x)$ seja zero duas vezes entre a e b. Desse modo, de acordo com o teorema do valor médio, $f'(x)$ teria de ser zero pelo menos uma vez entre os dois zeros de $f(x)$, mas isso não pode ser verdade, pois sabemos que $f'(x) \neq 0$ nesse intervalo.

61. $1{,}09999 \leq f(0{,}1) \leq 1{,}1$

Seção 4.3

1. **(a)** 0, 1

(b) crescente em $(-\infty, 0)$ e $(1, \infty)$, decrescente em $(0, 1)$

(c) máximo local em $x = 0$, mínimo local em $x = 1$.

3. **(a)** $-2, 1$

(b) crescente em $(-2, 1)$ e $(1, \infty)$, decrescente em $(-\infty, -2)$;

(c) não há máximo local; mínimo local em $x = -2$.

5. **(a)** Ponto crítico em $x = 1$;

(b) crescente em $[1, \infty)$ e $(1, \infty)$, decrescente em $(-\infty, 1]$;

(c) mínimo local (e absoluto) em $x = 1$.

7. **(a)** $-2, 0$

(b) crescente em $(-\infty, -2)$ e $(0, \infty)$, decrescente em $(-2, 0)$;

(c) máximo local em $x = -2$, mínimo local em $x = 0$.

9. (a) Crescente em $(-\infty, -1{,}5)$, decrescente em $(-1{,}5, \infty)$;

(b) máximo local: 5,25 em $t = -1{,}5$;

(c) máximo absoluto: 5,25 em $t = -1{,}5$.

11. (a) Decrescente em $(-\infty, 0)$, crescente em $(0, 4/3)$, decrescente em $(4/3, \infty)$;

(b) mínimo local em $x = 0$ $(0, 0)$, máximo local em $x = 4/3$ $(4/3, 32/27)$;

(c) não há extremos absolutos.

13. (a) Decrescente em $(-\infty, 0)$, crescente em $(0, 1/2)$, decrescente em $(1/2, \infty)$;

(b) mínimo local em $\theta = 0$ $(0, 0)$, máximo local em $\theta = 1/2$ $(1/2, 1/4)$;

(c) não há extremos absolutos.

15. (a) Crescente em $(-\infty, \infty)$ e nunca decrescente;

(b) não há extremos locais;

(c) não há extremos absolutos.

17. (a) Crescente em $(-2, 0)$ e $(2, \infty)$, decrescente em $(-\infty, -2)$ e $(0, 2)$;

(b) máximo local: 16 em $x = 0$, mínimo local: 0 em $x = \pm 2$;

(c) não há máximo absoluto; mínimo absoluto: 0 em $x = \pm 2$.

19. (a) Crescente em $(-\infty, -1)$, decrescente em $(-1, 0)$, crescente em $(0, 1)$, decrescente em $(1, \infty)$;

(b) máximo local em $x = \pm 1$ $(1, 0{,}5)$, $(-1, 0{,}5)$, mínimo local em $x = 0$ $(0, 0)$;

(c) máximo absoluto: ½ em $x = \pm 1$; não há mínimo absoluto.

21. (a) Decrescente em $(-2\sqrt{2}, -2)$, crescente em $(-2, 2)$, decrescente em $(2, 2\sqrt{2})$;

(b) mínimos locais: $g(-2) = -4$, $g(2\sqrt{2}) = 0$;
máximos locais: $g(-2\sqrt{2}) = 0$, $g(2) = 4$.

(c) máximo absoluto: 4 em $x = 2$;
mínimo absoluto: -4 em $x = -2$.

23. (a) Crescente em $(-\infty, 1)$, decrescente quando $1 < x < 2$, decrescente quando $2 < x < 3$, descontínua em $x = 2$, crescente em $(3, \infty)$;

(b) mínimo local em $x = 3$ $(3, 6)$,
máximo local em $x = 1$ $(1, 2)$;

(c) não há extremos absolutos.

25. (a) Crescente em $(-2, 0)$ e $(0, \infty)$, decrescente em $(-\infty, -2)$;

(b) mínimo local: $-6\sqrt[3]{2}$ em $x = -2$;

(c) não há máximo absoluto; mínimo absoluto: $-6\sqrt[3]{2}$ em $x = -2$.

27. (a) Crescente em $(-\infty, -2/\sqrt{7})$ e $(2/\sqrt{7}, \infty)$, decrescente em $(-2/\sqrt{7}, 0)$ e $(0, 2/\sqrt{7})$;

(b) máximo local: $24\sqrt[3]{2}/7^{7/6} \approx 3{,}12$ em $x = -2/\sqrt{7}$;
mínimo local: $-24\sqrt[3]{2}/7^{7/6} \approx -3{,}12$ em $x = -2/\sqrt{7}$;

(c) não há extremos absolutos.

29. (a) Crescente em $\left(\frac{1}{3}\ln 1/2, \infty\right)$, decrescente em $\left(-\infty, \frac{1}{3}\ln 1/2\right)$;

(b) mínimo local: $\frac{3}{2^{2/3}}$ em $x = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$;

(c) mínimo absoluto: $\frac{3}{2^{2/3}}$ em $x = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

31. (a) Crescente em $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$, decrescente em $(0, 1/e)$;

(b) mínimo local: $\frac{-1}{e}$ em $x = \frac{1}{e}$;

(c) mínimo absoluto: $\frac{-1}{e}$ em $x = \frac{1}{e}$.

33. Máximo local: 1 em $x = 1$; mínimo local: 0 em $x = 2$;

(b) máximo absoluto: 1 em $x = 1$; não há mínimo absoluto.

35. Máximo local: 1 em $x = 1$; mínimo local: 0 em $x = 2$;

(b) não há máximo absoluto; mínimo absoluto: 0 em $x = 2$.

37. Máximos locais: -9 em $t = -3$ e 16 em $t = 2$; mínimo local: -16 em $t = -2$;

(b) máximo absoluto: 16 em $t = 2$; não há mínimo absoluto.

39. Mínimo local: 0 em $x = 0$;

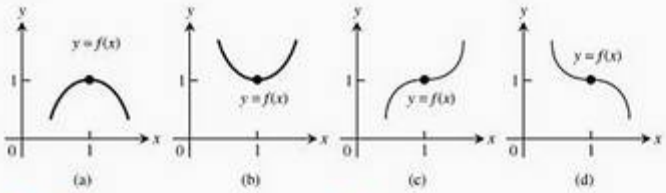
(b) não há máximo absoluto; mínimo absoluto: 0 em $x = 0$.

41. Mínimo local: $(\pi/3) - \sqrt{3}$ em $x = 2\pi/3$; máximo local: 0 em $x = 0$; máximo local: π em $x = 2\pi$.

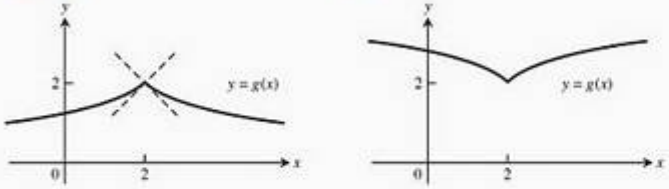
43. (a) Mínimo local: 0 em $x = \pi/4$.

45. Máximo local: 3 em $\theta = 0$; mínimo local: -3 em $\theta = 2\pi$.

47.



49. (a) **(b)**



51. (a) Máx. = 0 em $x = 0$, mín. = $-\ln 2$ em $x = \pi/3$;

(b) Máx. = 1 em $x = 1$, mín. = $\cos(\ln 2)$ em $x = \frac{1}{2}$ e $x = 2$.

53. Máximo: 1 em $x = 0$, mínimo: $2 - 2\ln 2$ em $x = \ln 2$.

55. O máx. abs. de $1/(2e)$ é assumido em $x = 1/\sqrt{e}$. **57.** Subindo.

61. Crescente, portanto injetora; $df^{-1}/dx = \frac{1}{9}x^{-2/3}$.

63. Decrescente, portanto injetora; $df^{-1}/dx = -\frac{1}{3}x^{-2/3}$.

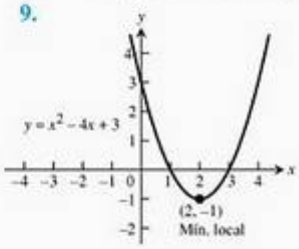
Seção 4.4

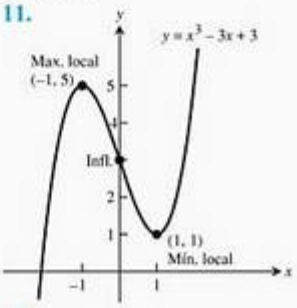
1. Máximo local: 3/2 em $x = -1$, mínimo local: -3 em $x = 2$, ponto de inflexão em $(1/2, -3/4)$, subindo em $(-\infty, -1)$ e $(2, \infty)$, caindo em $(-1, 2)$, côncava para cima em $(1/2, \infty)$, côncava para baixo em $(-\infty, ½)$.

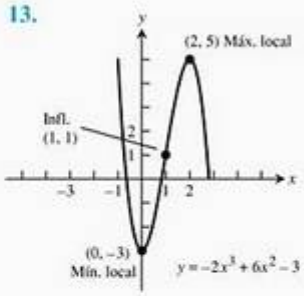
3. Máximo local: 3/4 em $x = 0$, mínimo local: 0 em $x = \pm 1$, pontos de inflexão em $\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4}\right)$ e $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4}\right)$, subindo em $(-1, 0)$ e $(1, \infty)$, caindo em $(-\infty, -1)$ e $(0, 1)$, côncava para cima em $(-\infty, -\sqrt{3})$ e $(\sqrt{3}, \infty)$, côncava para baixo em $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

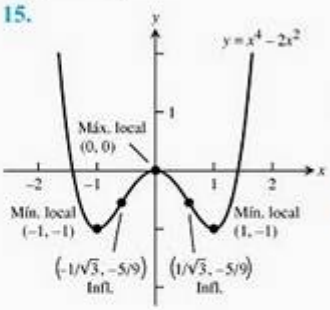
5. Máximos locais: $-2\pi/3 + \sqrt{3}/2$ em $x = -2\pi/3$; $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ em $x = \frac{\pi}{3}$; mínimos locais: $-\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ em $x = -\frac{\pi}{3}$; $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$ em $x = \frac{2\pi}{3}$, pontos de inflexão em $(-\pi/2, -\pi/2)$, $(0, 0)$ e $(\pi/2, \pi/2)$, subindo em $(-\pi/3, \pi/3)$, caindo em $(-2\pi/3, -\pi/3)$, e $(\pi/3, 2\pi/3)$, côncava para cima em $(-\pi/2, 0)$ e $(\pi/2, 2\pi/3)$, côncava para baixo em $(-2\pi/3, -\pi/2)$ e $(0, \pi/2)$.

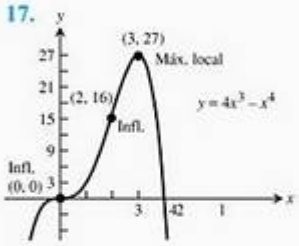
7. Máximos locais: 1 em $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$; 0 em $x = -2\pi$ e $x = 2\pi$; mínimos locais: -1 em $x = -\frac{3\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$, 0 em $x = 0$, pontos de inflexão em $(-\pi, 0)$ e $(\pi, 0)$, subindo em $(-3\pi/2, -\pi/2)$, $(0, \pi/2)$ e $(3\pi/2, 2\pi)$, caindo em $(-2\pi, -3\pi/2)$, $(-\pi/2, 0)$ e $(\pi/2, 3\pi/2)$, côncava para cima em $(-2\pi, -\pi)$ e $(\pi, 2\pi)$, côncava para baixo em $(-\pi, 0)$ e $(0, \pi)$.

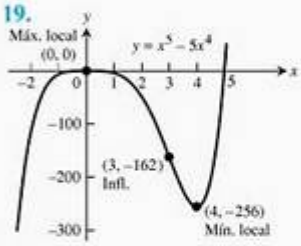
9.


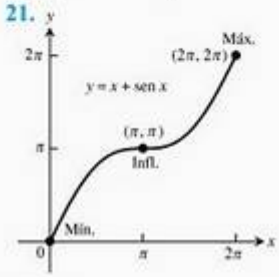
11.


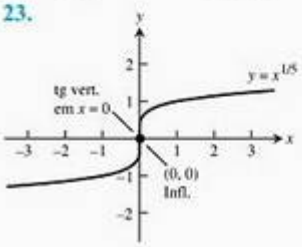
13.


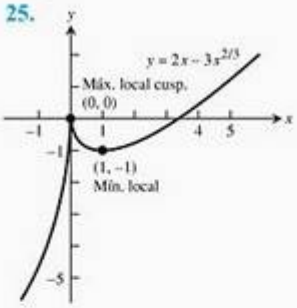
15.


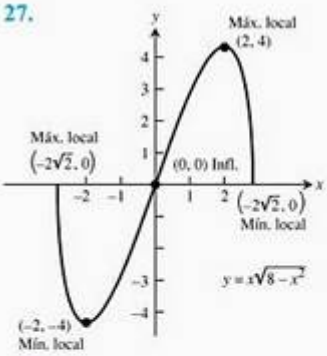
17.


19.


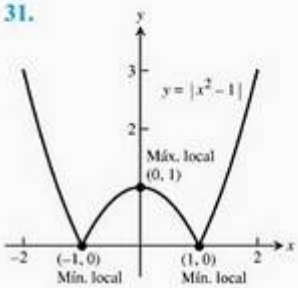
21.


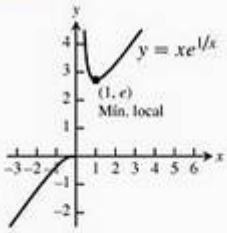
23.


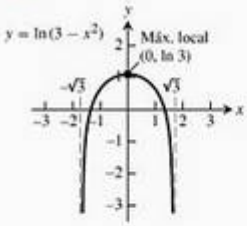
25.


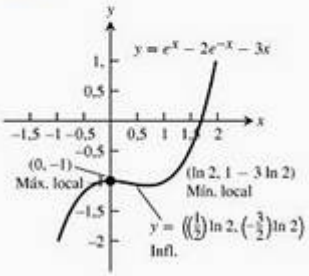
27.


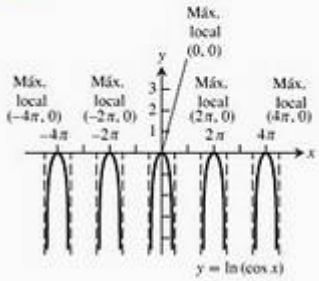
29.

31.


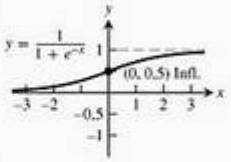
33.


35.


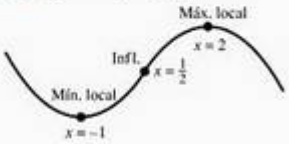
37.


39.


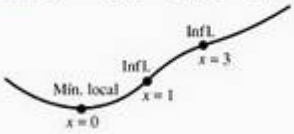
41.



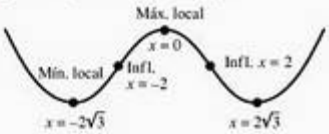
43. $y'' = 1 - 2x$



45. $y'' = 3(x - 3)(x - 1)$

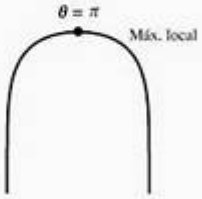


47. $y'' = 3(x - 2)(x + 2)$

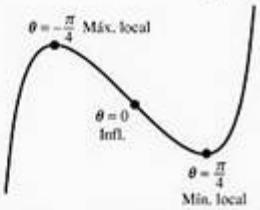


49. $y'' = 2\sec^2 x \operatorname{tg} x$

51. $y'' = -\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}, 0 < \theta < 2\pi$

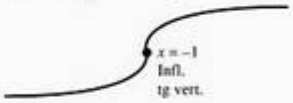


53. $y'' = 2\operatorname{tg}\theta\sec^2\theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

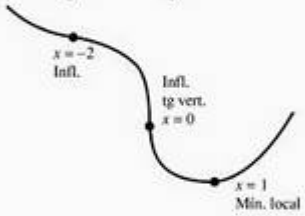


55. $y'' = -\operatorname{sen} t, 0 \le t \le 2\pi$

57. $y'' = -\frac{2}{3}(x + 1)^{-5/3}$

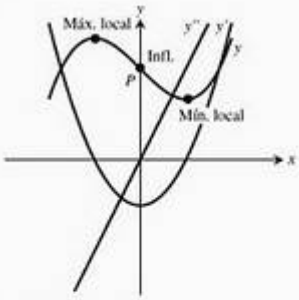


59. $y'' = \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{2}{3}x^{-5/3}$

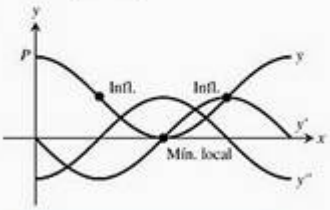


61. $y'' = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$

63.



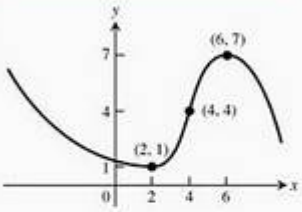
65.



67.

Ponto	y'	y''
P	$-$	$+$
Q	$+$	0
R	$+$	$-$
S	0	$-$
T	$-$	$-$

69.

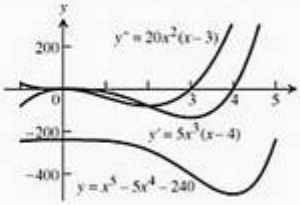


73. ≈ 60 milhares de unidades. **75.** Mínimo local em $x = 2$, pontos de inflexão em $x = 1$ e $x = 5/3$. **79.** $b = -3$.

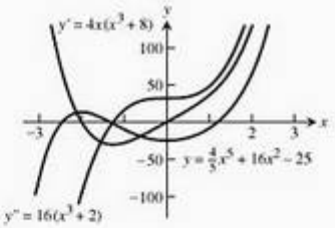
81. (a) $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$;

(b) côncava para cima se $a > 0$, côncava para baixo se $a < 0$.

85. As raízes de $y' = 0$ e $y'' \to = 0$ incluem os extremos e os pontos de inflexão, respectivamente. Inflexão em $x = 3$, máximo local em $x = 0$ e mínimo local em $x = 4$.



87. As raízes de $y' = 0$ e $y \to = 0$ incluem os extremos e os pontos de inflexão, respectivamente. Inflexão em $x = -\sqrt[3]{2}$, máximo local em $x = -2$ e mínimo local em $x = 0$.



91. (b) $f'(x) = 3x^2 + k$; $-12k$; positivo se $k < 0$, negativo se $k > 0$, 0 se $k = 0$; f' tem duas raízes se $k < 0$, uma raiz se $k = 0$, nenhuma raiz se $k > 0$; ou seja, o sinal de k controla o número de extremos locais.

93. (b) Trata-se de um ponto cuspidal, uma vez que $\lim_{x \to 0^-} y' = \infty$ e $\lim_{x \to 0^+} y' = -\infty$.

95. Sim, a curva de y' cruza o ponto zero perto de -3, logo y tem uma tangente horizontal perto de -3.

Seção 4.5

1. 16 pol; 4 pol por 4 pol.

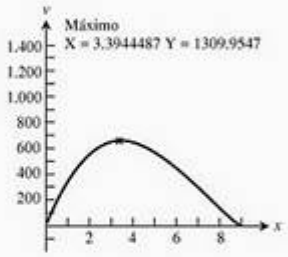
3. (a) $(x, 1 - x)$ **(b)** $A(x) = 2x(1 - x)$
(c) $\frac{1}{2}$ unidades quadradas, 1 por $\frac{1}{2}$

5. $\frac{14}{3} \times \frac{35}{3} \times \frac{5}{3}$ pol, $\frac{2.450}{27}$ pol^3 **7.** 80.000 m^2; 400 m por 200 m

9. (a) As dimensões ótimas do tanque são 10 pés nas bordas da base e 5 pés de altura.
(b) Minimizar a área de superfície do tanque minimiza seu peso para uma dada espessura da parede. A espessura das paredes de aço poderia ser determinada por outras considerações, como requisitos estruturais.

11. 9×18 pol. **13.** $\frac{\pi}{2}$ **15.** $h : r = 8 : \pi$

17. (a) $V(x) = 2x(24 - 2x)(18 - 2x)$

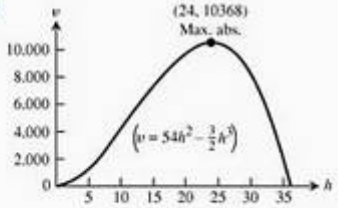


(b) Domínio: (0, 9)
(c) Volume máximo ≈ 1.309,95 pol^3 quando $x \approx 3{,}39$ pol.
(d) $V'(x) = 24x^2 - 336x + 864$, logo o ponto crítico fica em $x = 7 - \sqrt{13}$, o que confirma o resultado da parte.

19. $\approx 2.418{,}40$ cm^3

21. (a) h = 24, w = 18

(b)



23. Se r é o raio do hemisfério, h é a altura do cilindro, e V é o volume, então $r = \left(\frac{3V}{8\pi}\right)^{1/3}$ e $h = \left(\frac{3V}{\pi}\right)^{1/3}$.

25. (b) $x = \frac{51}{8}$ **(c)** $L \approx 11$ pol.

27. Raio = $\sqrt{2}$ m, altura = 1 m, volume $\frac{2\pi}{3}$ m^3.

31. (a) $v(0) = 96$ pés/s.
(b) 256 pés em $t = 3$ s.
(c) Velocidade quando $s = 0$ é $v(7) = -128$ pés/s.

33. $\approx 46{,}87$ pés **35. (a)** $6 \times 6\sqrt{3}$ pol.

37. (a) $10\pi \approx 31{,}42$ cm/s; quando $t = 0{,}5$ s; 1,5 s; 2,5 s; 3,5 s; $s = 0$, a aceleração é 0.
(b) 10 cm da posição de repouso; a velocidade é 0.

39. $20\left(5 - \sqrt{17}\right)$ m.

41. $x = \frac{a}{2}$, $v = \frac{ka^2}{4}$ **43.** $\frac{c}{2} + 50$

45. (a) $\sqrt{\frac{2km}{h}}$ **(b)** $\sqrt{\frac{2km}{h}}$

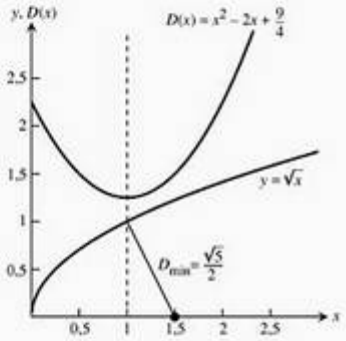
49. (a) O fabricante de armários deve encomendar px unidades de matéria-prima para ter estoque suficiente até a entrega seguinte.
(b) Custo médio por dia $= \frac{\left(d + \frac{ps}{2}x^2\right)}{x} = \frac{d}{x} + \frac{ps}{2}x$; $x^* = \sqrt{\frac{2d}{ps}}$; $px^* = \sqrt{\frac{2pd}{s}}$ proporciona um mínimo.
(d) A interseção da hipérbole com a reta ocorre quando $\frac{d}{x} = \frac{ps}{2}x$. Para $x > 0$, $x_{\text{interseção}} = \sqrt{\frac{2d}{ps}} = x^*$. O custo mé-

dio por dia é minimizado quando o custo médio diário de entrega é igual ao custo médio diário de estocagem.

51. $M = \frac{C}{2}$ **57. (a)** $y = -1$

59. (a) A menor distância é $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(b) A menor distância vai do ponto $(3/2, 0)$ ao ponto $(1, 1)$ no gráfico de $y = \sqrt{x}$, e ocorre no valor $x = 1$, quando $D(x)$, a distância ao quadrado, apresenta seu valor mínimo.



61. (a) $V(x) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2\pi a - x}{2\pi}\right)^2\sqrt{a^2 - \left(\frac{2\pi a - x}{2\pi}\right)^2}$

(b) Quando $a = 4$: $r = \frac{4\sqrt{6}}{3}$, $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; quando $a = 5$: $r = \frac{5\sqrt{6}}{3}$, $h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$; quando $a = 6$: $r = 2\sqrt{6}$, $h = 2\sqrt{3}$; quando $a = 8$: $r = \frac{8\sqrt{6}}{3}$, $h = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

(c) Como $r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ e $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, a relação é $\frac{r}{h} = \sqrt{2}$.

Seção 4.6

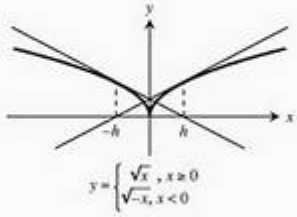
1. 1/4 **3.** 5/7 **5.** 1/2 **7.** 1/4 **9.** −23/7 **11.** 5>7 **13.** 0 **15.** −16 **17.** −2 **19.** 1/4 **21.** 2 **23.** 3 **25.** −1 **27.** ln 3 **29.** $\frac{1}{\ln 2}$ **31.** ln 2 **33.** 1 **35.** 1/2 **37.** ln 2 **39.** cos a **41.** −1/2 **43.** −1 **45.** 1 **47.** $1/e$ **49.** 1 **51.** $1/e$ **53.** $e^{1/2}$ **55.** 1 **57.** 3 **59.** 1

61. (b) está correto. **63. (d)** está errado. **63.** $c = \frac{27}{10}$ **67.** −1

Seção 4.7

1. $x_2 = -\frac{5}{3}, \frac{13}{21}$ **3.** $x_2 = -\frac{51}{31}, \frac{5.763}{4.945}$

7. x_1 e todas as aproximações seguintes serão iguais a x_0.



11. Os pontos de interseção de $y = x^3$ e $y = 3x + 1$ ou $y = x^3 - 3x$ e $y = 1$ têm os mesmos valores de x que as raízes do item **(i)** ou as soluções do item **(iv)**.

15. 1, 165561185

17. (a) Duas **(b)** 0,35003501505249 e −1,0261731615301

19. ±1,3065629648764, ±0,5411961001462 **21.** 0, 0,53485

23. A raiz é 1,17951.

25. (a) Para $x_0 = -2$ ou $x_0 = -0{,}8$, $x_i \to -1$ quando i aumenta.

(b) Para $x_0 = -0{,}5$ ou $x_0 = 0{,}25$, $x_i \to 0$ quando i aumenta.

(c) Para $x_0 = 0{,}8$ ou $x_0 = 2$, $x_i \to 1$ quando i aumenta.

(d) Para $x_0 = -\sqrt{21}/7$ ou $x_0 = \sqrt{21}/7$, o método de Newton não converge. Os valores de x_i alternam entre $-\sqrt{21}/7$ e $\sqrt{21}/7$ quando i aumenta.

27. As respostas vão variar conforme a velocidade da calculadora.

29. 2,45, 0,000245.

Seção 4.8

1. (a) x^2 **(b)** $\frac{x^3}{3}$ **(c)** $\frac{x^3}{3} - x^2 + x$

3. (a) x^{-3} **(b)** $-\frac{1}{3}x^{-3}$ **(c)** $-\frac{1}{3}x^{-3} + x^2 + 3x$

5. (a) $-\frac{1}{x}$ **(b)** $-\frac{5}{x}$ **(c)** $2x + \frac{5}{x}$

7. (a) $\sqrt{x^3}$ **(b)** $\sqrt{x}$ **(c)** $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}$

9. (a) $x^{2/3}$ **(b)** $x^{1/3}$ **(c)** $x^{-1/3}$

11. (a) $\ln x$ **(b)** $7 \ln x$ **(c)** $x - 5 \ln x$

13. (a) $\cos(\pi x)$ **(b)** $-3 \cos x$ **(c)** $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + \cos(3x)$

15. (a) $\operatorname{tg} x$ **(b)** $2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right)$ **(c)** $-\frac{2}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2}\right)$

17. (a) $-\operatorname{cosec} x$ **(b)** $\frac{1}{5}\operatorname{cosec}(5x)$ **(c)** $2 \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

19. (a) $\frac{1}{3}e^{3x}$ **(b)** $-e^{-x}$ **(c)** $2e^{x/2}$

21. (a) $\frac{1}{\ln 3}3^x$ **(b)** $\frac{-1}{\ln 2}2^{-x}$ **(c)** $\frac{1}{\ln(5/3)}\left(\frac{5}{3}\right)^x$

23. (a) $2 \operatorname{sen}^{-1} x$ **(b)** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1} x$ **(c)** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1} 2x$

25. $\frac{x^2}{2} + x + C$ **27.** $t^3 + \frac{t^2}{4} + C$ **29.** $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$

31. $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$ **33.** $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$

35. $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$ **37.** $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + C$

39. $x^2 + \frac{2}{x} + C$ **41.** $2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$ **43.** $-2 \operatorname{sen} t + C$

45. $-21 \cos\frac{\theta}{3} + C$ **47.** $3 \operatorname{cotg} x + C$ **49.** $-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\theta + C$

51. $\frac{1}{3}e^{3x} - 5e^{-x} + C$ **53.** $-e^{-x} + \frac{4^x}{\ln 4} + C$

55. $4 \sec x - 2 \operatorname{tg} x + C$ **57.** $-\frac{1}{2}\cos 2x + \operatorname{cotg} x + C$

59. $\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4t}{8} + C$ **61.** $\ln|x| - 5\operatorname{tg}^{-1} x + C$

63. $\frac{3x^{(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt{3}+1} + C$ **65.** $\operatorname{tg}\theta + C$ **67.** $-\operatorname{cotg} x - x + C$

69. $-\cos\theta + \theta + C$

83. **(a)** Errado: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\operatorname{sen} x + C\right) = \frac{2x}{2}\operatorname{sen} x + \frac{x^2}{2}\cos x = x\operatorname{sen} x + \frac{x^2}{2}\cos x$

(b) Errado: $\frac{d}{dx}(-x\cos x + C) = -\cos x + x\operatorname{sen} x$

(c) Certa: $\frac{d}{dx}(-x\cos x + \operatorname{sen} x + C) = -\cos x + x\operatorname{sen} x + \cos x = x\operatorname{sen} x$

85. **(a)** Errado: $\frac{d}{dx}\left(\frac{(2x+1)^3}{3} + C\right) = \frac{3(2x+1)^2(2)}{3} = 2(2x+1)^2$

(b) Errado: $\frac{d}{dx}((2x+1)^3 + C) = 3(2x+1)^2(2) = 6(2x+1)^2$

(c) Certa: $\frac{d}{dx}((2x+1)^3 + C) = 6(2x+1)^2$

87. (b) **89.** $y = x^2 - 7x + 10$ **91.** $y = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

93. $y = 9x^{1/3} + 4$ **95.** $s = t + \operatorname{sen} t + 4$

97. $r = \cos(\pi\theta) - 1$ **99.** $v = \frac{1}{2}\sec t + \frac{1}{2}$

101. $v = 3\sec^{-1} t - \pi$ **103.** $y = x^2 - x^3 + 4x + 1$

105. $r = \frac{1}{t} + 2t - 2$ **107.** $y = x^3 - 4x^2 + 5$

109. $y = -\operatorname{sen} t + \cos t + t^3 - 1$ **111.** $y = 2x^{3/2} - 50$

113. $y = x - x^{4/3} + \frac{1}{2}$ **115.** $y = -\operatorname{sen} x - \cos x - 2$

117. **(a)** **(i)** 33,2 unidades; **(ii)** 33, 2 unidades; **(iii)** 33,2 unidades. **(b)** É verdade.

119. $t = 88/k$, $k = 16$

121. **(a)** $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2}$ **(b)** $s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

125. **(a)** $-\sqrt{x} + C$ **(b)** $x + C$ **(c)** $\sqrt{x} + C$ **(d)** $-x + C$ **(e)** $x - \sqrt{x} + C$ **(f)** $-x - \sqrt{x} + C$

Exercícios práticos

1. Não.

3. Nenhum mínimo; máximo absoluto; $f(1) = 16$; pontos críticos: $x = 1$ e $11/3$.

5. Mínimo absoluto: $g(0) = 1$; nenhum máximo absoluto; ponto crítico $x = 0$.

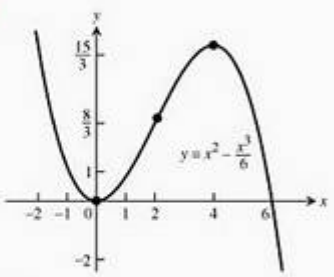
7. Mínimo absoluto: $2 - 2\ln 2$ em $x = 2$; máximo absoluto 1 em $x = 1$.

9. Sim, exceto em $x = 0$. **11.** Não. **15.** **(b)** uma.

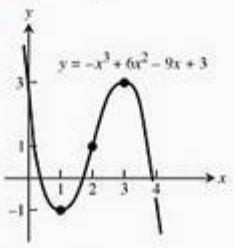
17. **(b)** 0,8555 99677 2 **23.** Valor mínimo global de $\frac{1}{2}$ em $x = 2$.

25. **(a)** $t = 0, 6, 12$ **(b)** $t = 3, 9$ **(c)** $6 < t < 12$ **(d)** $0 < t < 6$, $12 < t < 14$

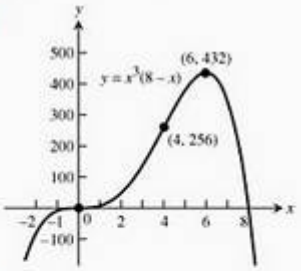
27.



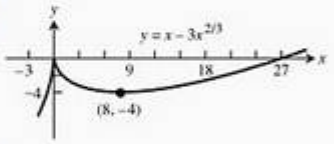
29.



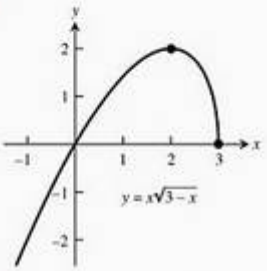
31.



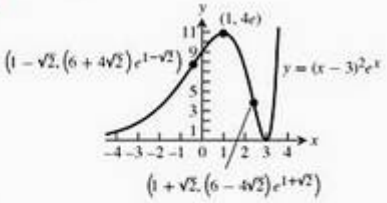
33.



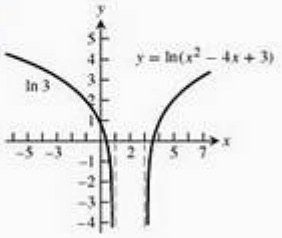
35.



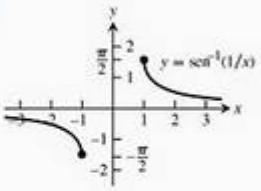
37.



39.

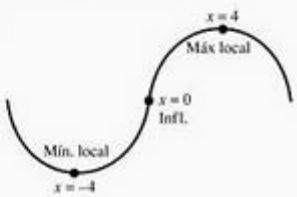


41.



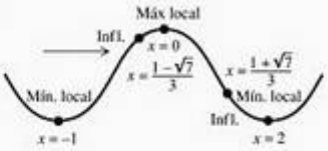
43. **(a)** Máximo local em $x = 4$, mínimo local em $x = -4$, ponto de inflexão em $x = 0$.

(b)



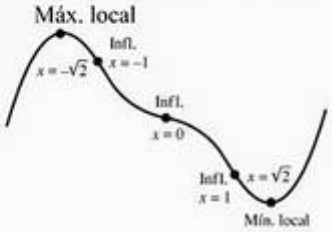
45. **(a)** Máximo local em $x = 0$, mínimos locais em $x = -1$ e $x = 2$, pontos de inflexão em $x = (1 \pm \sqrt{7})/3$.

(b)

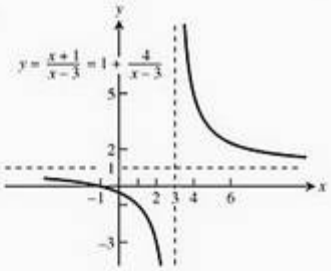


47. **(a)** Máximo local em $x = -\sqrt{2}$, mínimo local em $x = \sqrt{2}$, pontos de inflexão em $x = \pm 1$ e 0.

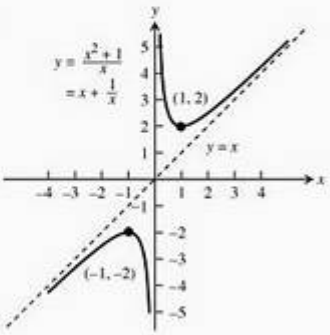
(b)



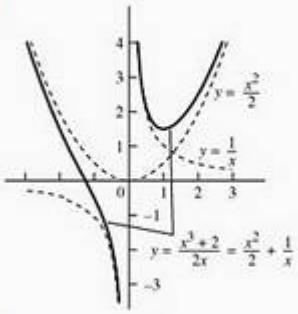
53.



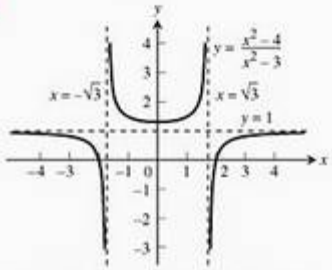
55.



57.



59.



61. 5 **63.** 0 **65.** 1 **67.** 3/7 **69.** 0 **71.** 1
73. ln 10 **75.** ln 2 **77.** 5 **79.** $-\infty$ **81.** 1 **83.** e^{bk}
85. **(a)** 0, 36 **(b)** 18, 18 **87.** 54 unidades quadradas.

89. altura = 2, raio = $\sqrt{2}$

91. $x = 5 - \sqrt{5}$ centenas ≈ 276 pneus;
$y = 2(5 - \sqrt{5})$ centenas ≈ 553 pneus.

93. Dimensões: a base tem 6 pol por 12 pol, altura = 2 pol; volume máximo = 144 pol^3.

95. $x_5 = 2{,}1958\,23345$ **97.** $\frac{x^4}{4} + \frac{5}{2}x^2 - 7x + C$

99. $2t^{3/2} - \frac{4}{t} + C$ **101.** $-\frac{1}{r+5} + C$ **103.** $(\theta^2 + 1)^{3/2} + C$

105. $\frac{1}{3}(1 + x^4)^{3/4} + C$ **107.** $10 \operatorname{tg} \frac{s}{10} + C$

109. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cosec} \sqrt{2}\,\theta + C$ **111.** $\frac{1}{2}x - \operatorname{sen} \frac{x}{2} + C$

113. $3 \ln x - \frac{x^2}{2} + C$ **115.** $\frac{1}{2}e^t + e^{-t} + C$

117. $\frac{\theta^{2-\pi}}{2-\pi} + C$ **119.** $\frac{3}{2} \sec^{-1}|x| + C$

121. $y = x - \frac{1}{x} - 1$ **123.** $r = 4t^{5/2} + 4t^{3/2} - 8t$

125. Sim, $\operatorname{sen}^{-1}(x)$ e $-\cos^{-1}(x)$ diferem pela constante $\pi/2$.

127. $1/\sqrt{2}$ unidade de largura por $1/\sqrt{e}$ de altura, $A = 1/\sqrt{2e} \approx$ 0,43 unidade^2.

129. Máximo absoluto = 0 em $x = e/2$, mínimo absoluto = −0,5 em $x = 0{,}5$.

131. $x = \pm 1$ são os pontos críticos; $y = 1$ é uma assíntota horizontal em ambas as direções; o valor mínimo absoluto da função é $e^{-\sqrt{2}/2}$ em $x = -1$, e o valor máximo absoluto é $e^{\sqrt{2}/2}$ em $x = 1$.

133. **(a)** Máximo absoluto de $2/e$ em $x = e^2$, ponto de inflexão $(e^{8/3}, (8/3)e^{-4/3})$, côncavo para cima em $(-e^{8/3}, \infty)$, côncavo para baixo em $(0, e^{8/3})$.

(b) Máximo absoluto de 1 em $x = 0$, pontos de inflexão $(\pm 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$, côncavo para cima em $(-\infty, -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}, \infty)$, côncavo para baixo em $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

(c) Máximo absoluto de 1 em $x = 0$, ponto de inflexão $(1, 2/e)$, côncavo para cima em $(1, \infty)$, côncavo para baixo em $(-\infty, 1)$.

Exercícios adicionais

1. A função é constante no intervalo.
3. Os pontos extremos não estarão no fim de um intervalo aberto.
5. (a) Um mínimo local em $x = -1$, pontos de inflexão em $x = 0$ e $x = 2$. (b) Um máximo local em $x = 0$ e mínimos locais em $x = -1$ e $x = 2$, pontos de inflexão em $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$.
9. Não. 11. $a = 1, b = 0, c = 1$ 13. Sim.
15. Faça o furo em $y = h/2$.
17. $r = \dfrac{RH}{2(H - R)}$ para $H > 2R$, $r = R$ se $H \leq 2R$
19. (a) $\frac{10}{3}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 0 (e) $-\frac{1}{2}$ (f) 1 (g) $\frac{1}{2}$ (h) 3
21. (a) $\dfrac{c - b}{2e}$ (b) $\dfrac{c + b}{2}$ (c) $\dfrac{b^2 - 2bc + c^2 + 4ae}{4e}$
(d) $\dfrac{c + b + t}{2}$ 23. $m_0 = 1 - \dfrac{1}{q}, m_1 = \dfrac{1}{q}$ 25. $s = ce^{kt}$
27. (a) $k = -38{,}72$ (b) 25 pés
29. Sim, $y = x + C$ 31. $v_0 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} b^{3/4}$

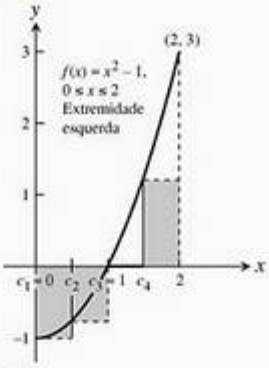
CAPÍTULO 5

Seção 5.1

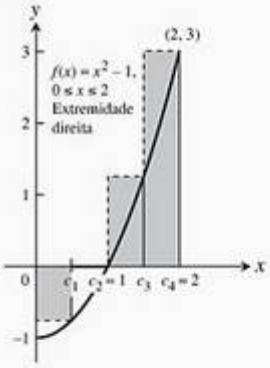
1. (a) 0,125 (b) 0,21875 (c) 0,625 (d) 0,46875
3. (a) 1,066667 (b) 1,283333 (c) 2,666667 (d) 2,083333
5. 0,3125, 0,328125 7. 1.5, 1,574603
9. (a) 87 pol. (b) 87 pol. 11. (a) 3.490 pol. (b) 3.840 pol.
13. (a) 74,65 pés/s (b) 45,28 pés/s (c) 146,59 pol.
15. $\dfrac{31}{16}$ 17. 1
19. (a) Máxima = 758 galões, mínima = 543 galões
(b) Máxima = 2.363 galões, mínima = 1.693 galões
(c) $\approx 31,4$ h; $\approx 32,4$ h
21. (a) 2
(b) $2\sqrt{2} \approx 2{,}828$
(c) $8 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{8}\right) \approx 3{,}061$
(d) Todas as áreas são menores que a área do círculo, π. Como n aumenta, a área do polígono tende a π.

Seção 5.2

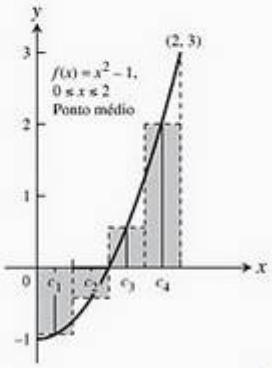
1. $\dfrac{6(1)}{1 + 1} + \dfrac{6(2)}{2 + 1} = 7$
3. $\cos(1)\pi + \cos(2)\pi + \cos(3)\pi + \cos(4)\pi = 0$
5. $\operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3} - 2}{2}$
7. Todas elas. 9. b 11. $\sum_{k=1}^{6} k$ 13. $\sum_{k=1}^{4} \dfrac{1}{2^k}$
15. $\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} \dfrac{1}{k}$
17. (a) -15 (b) 1 (c) 1 (d) -11 (e) 16
19. (a) 55 (b) 385 (c) 3.025
21. -56 23. -73 25. 240 27. 3.376
29. (a)



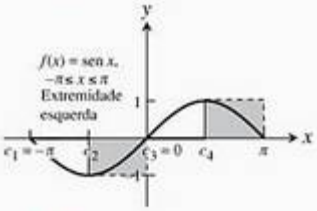
(b)



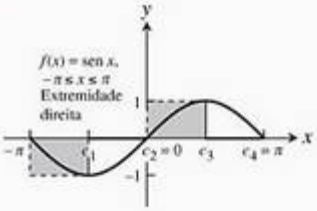
(c)



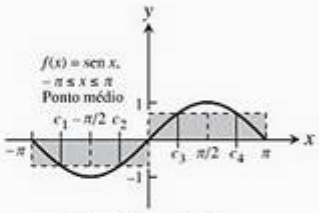
31. (a)



(b)



(c)



33. 1,2 35. $\dfrac{2}{3} + \dfrac{3n - 1}{6n^2}, \dfrac{2}{3}$ 37. $12 + \dfrac{27n + 9}{2n^2}, 12$
39. $\dfrac{5}{6} + \dfrac{6n + 1}{6n^2}, \dfrac{5}{6}$

Seção 5.3

1. $\int_0^2 x^2\,dx$ 3. $\int_{-7}^5 (x^2 - 3x)\,dx$ 5. $\int_2^3 \frac{1}{1-x}\,dx$
7. $\int_{-\pi/4}^0 \sec x\,dx$
9. (a) 0 (b) -8 (c) -12 (d) 10 (e) -2 (f) 16
11. (a) 5 (b) $5\sqrt{3}$ (c) -5 (d) -5
13. (a) 4 (b) -4
15. Área = 21 unidades quadradas.
17. Área = $9\pi/2$ unidades quadradas. 19. Área = 2,5 unidades quadradas.
21. Área = 3 unidades quadradas. 23. $b^2/4$ 25. $b^2 - a^2$ 27. 1/2
29. $3\pi^2/2$ 31. 7/3 33. 1/24 35. $3a^2/2$ 37. $b/3$
39. -14 41. 10 43. -2 45. $-7/4$ 47. 7 49. 0
51. Usando n subintervalos de comprimento $\Delta x = b/n$ e valores da extremidade direita:
Área $= \int_a^b 3x^2\,dx = b^3$
53. Usando n subintervalos de comprimento $\Delta x = b/n$ e valores da extremidade direita:
Área $= \int_a^b 2x\,dx = b^2$
55. $M(f) = 0$ 57. $M(f) = -2$ 59. $M(f) = 1$
61. (a) $M(g) = -1/2$ (b) $M(g) = 1$ (c) $M(g) = 1/4$
63. $a = 0$ e $b = 1$ maximiza a integral.
65. Limite superior = 1, limite inferior = 1/2.
67. Por exemplo, $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx \le \int_0^1 dx = 1$
69. $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b 0\,dx = 0$ 71. Limite superior = 1/2

Seção 5.4

1. 6 3. 8 5. 1 7. 5/2 9. 2 11. $2\sqrt{3}$ 13. 0
15. $-\pi/4$ 17. $\frac{2\pi^3}{3}$ 19. $-8/3$ 21. $-3/4$
23. $\sqrt{2} - \sqrt[4]{8} + 1$ 25. 16 27. 7/3 29. π
31. $\frac{1}{\pi}(4^\pi - 2^\pi)$ 33. $\frac{1}{2}(e - 1)$ 35. $(\cos\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$
37. $4t^5$ 39. $3x^2 e^{-x^3}$ 41. $\sqrt{1 + x^2}$ 43. $-\frac{1}{2}x^{-1/2}\operatorname{sen} x$
45. 1 47. $2xe^{(1/2)x^2}$ 49. 1 51. 28/3 53. 1/2
55. 51/4 57. π 59. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$
61. d, desde $y' = \frac{1}{x}$ e $y(\pi) = \int_\pi^\pi \frac{1}{t}\,dt - 3 = -3$
63. b, desde $y' = \sec x$ e $y(0) = \int_0^0 \sec t\,dt + 4 = 4$
65. $y = \int_2^x \sec t\,dt + 3$ 67. $s = \int_{t_0}^t f(x)\,dx + s_0$
69. $\frac{2}{3}bh$ 71. \$9,00
73. (a) $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_0^t f(x)\,dx = f(t) \Rightarrow v(5) = f(5) = 2$ m/s
(b) $a = df/dt$ é negativo porque o coeficiente angular da tangente a $t = 5$ é negativo.
(c) $s = \int_0^3 f(x)\,dx = \frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}$ m, uma vez que a integral é a área do triângulo formado por $y = f(x)$, o eixo x e $x = 3$.
(d) $t = 6$, uma vez que, depois de $t = 6$ a $t = 9$, a região fica abaixo do eixo x.
(e) Em $t = 4$ e $t = 7$, já que existem tangentes horizontais nesses pontos.
(f) Na direção da origem entre $t = 6$ e $t = 9$, pois a velocidade é negativa nesse intervalo. Para longe da origem entre $t = 0$ e $t = 6$, pois a velocidade é positiva aí.
(g) Lado direito ou positivo, porque a integral de f de 0 a 9 é positiva, havendo mais área acima do eixo x do que abaixo.
77. $2x - 2$ 79. $-3x + 5$
81. (a) Verdadeira. Como f é contínua, g é derivável de acordo com a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo.
(b) Verdadeira: g é contínua porque é derivável.
(c) Verdadeira, uma vez que $g'(1) = F(1) = 0$.
(d) Falsa, uma vez que $g \to (1) = f'(1) > 0$.
(e) Verdadeira, uma vez que $g'(1) = 0$ e $g \to (1) = f'(1) > 0$.
(f) Falsa: $g \to (x) = f'(x) > 0$, logo $g \to$ nunca muda de sinal.
(g) Verdadeira, pois $g'(1) = f(1) = 0$ e $g'(x) = f(x)$ é uma função crescente de x (pois $f'(x) > 0$).

Seção 5.5

1. $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$ 3. $\frac{1}{2}\sec 2t + C$ 5. $-(7x - 2)^{-4} + C$
7. $-6(1 - r^3)^{1/2} + C$
9. $\frac{1}{3}(x^{3/2} - 1) - \frac{1}{6}\operatorname{sen}(2x^{3/2} - 2) + C$
11. (a) $-\frac{1}{4}(\operatorname{cotg}^2 2\theta) + C$ (b) $-\frac{1}{4}(\operatorname{cosec}^2 2\theta) + C$
13. $-\frac{1}{3}(3 - 2s)^{3/2} + C$ 15. $\frac{2}{5}(5s + 4)^{1/2} + C$
17. $-\frac{2}{5}(1 - \theta^2)^{5/4} + C$ 19. $(-2/(1 + \sqrt{x})) + C$
21. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3z + 4) + C$ 23. $\ln|\sec x| + C$
25. $\left(\frac{r^3}{18} - 1\right)^6 + C$ 27. $-\frac{2}{3}\cos(x^{3/2} + 1) + C$
29. $\frac{1}{2\cos(2t + 1)} + C$ 31. $-\frac{\operatorname{sen}^2(1/\theta)}{2} + C$
33. $-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t} - 1\right) + C$ 35. $\frac{(s^3 + 2s^2 - 5s + 5)^2}{2} + C$
37. $\frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{3/2} + C$ 39. $e^{\operatorname{sen} x} + C$
41. $2\operatorname{tg}\left(e^{\sqrt{x}} + 1\right) + C$ 43. $\ln|\ln x| + C$
45. $z - \ln(1 + e^z) + C$ 47. $\frac{5}{6}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2r}{3}\right) + C$

49. $e^{\text{sen}^{-1}x} + C$ **51.** $\frac{1}{3}(\text{sen}^{-1}x)^3 + C$ **53.** $\ln|\text{tg}^{-1}y| + C$

55. (a) $-\dfrac{6}{2 + \text{tg}^3 x} + C$ (b) $-\dfrac{6}{2 + \text{tg}^3 x} + C$

(c) $-\dfrac{6}{2 + \text{tg}^3 x} + C$

57. $\frac{1}{6}\text{sen}\sqrt{3(2r-1)^2 + 6} + C$ **59.** $s = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)^4 - 5$

61. $s = 4t - 2\,\text{sen}\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) + 9$

63. $s = \text{sen}\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) + 100t + 1$ **65.** 6 m **69.** b) 399 Volts

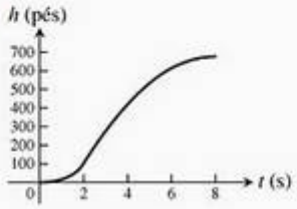
Seção 5.6

1. (a) 14/3 (b) 2/3 **3.** (a) 1/2 (b) −1/2
5. (a) 15/16 (b) 0 **7.** (a) 0 (b) 1/8 **9.** (a) 4 (b) 0
11. (a) 1/6 (b) 1/2 **13.** (a) 0 (b) 0 **15.** $2\sqrt{3}$
17. 3/4 **19.** $3^{5/2} - 1$ **21.** 3 **23.** $\pi/3$ **25.** e
27. ln 3 **29.** $(\ln 2)^2$ **31.** $\dfrac{1}{\ln 4}$ **33.** ln 2 **35.** ln 27 **37.** π
39. $\pi/12$ **41.** $2\pi/3$ **43.** $\sqrt{3} - 1$ **45.** $-\pi/12$
47. 16/3 **49.** $2^{5/2}$ **51.** $\pi/2$ **53.** 128/15 **55.** 4/3
57. 5/6 **59.** 38/3 **61.** 49/6 **63.** 32/3 **65.** 48/5
67. 8/3 **69.** 8 **71.** 5/3 (Há três pontos de interseção.)
73. 18 **75.** 243/8 **77.** 8/3 **79.** 2 **81.** 104/15
83. 56/15 **85.** 4 **87.** $\frac{4}{3} - \frac{4}{\pi}$ **89.** $\pi/2$ **91.** 2 **93.** 1/2
95. 1 **97.** ln 16 **99.** 2 **101.** 2 ln 5
103. (a) $(\pm\sqrt{c}, c)$ (b) $c = 4^{2/3}$ (c) $c = 4^{2/3}$
105. 11/3 **107.** 3/4 **109.** Nenhuma delas. **111.** $F(6) - F(2)$
113. (a) −3 (b) 3 **115.** $I = a/2$

Exercícios práticos

1. (a) cerca de 680 pés

(b)



3. (a) −1/2 (b) 31 (c) 13 (d) 0
5. $\int_1^5 (2x-1)^{-1/2}\,dx = 2$ **7.** $\int_{-\pi}^0 \cos\frac{x}{2}\,dx = 2$
9. (a) 4 (b) 2 (c) −2 (d) -2π (e) 8/5
11. 8/3 **13.** 62 **15.** 1 **17.** 1/6 **19.** 18 **21.** 9/8
23. $\frac{\pi^2}{32} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ **25.** 4 **27.** $\dfrac{8\sqrt{2} - 7}{6}$
29. Min: −4, max.: 0; área: 27/4 **31.** 6/5 **33.** 1
37. $y = \int_5^x \left(\frac{\text{sen}\,t}{t}\right)dt - 3$ **39.** $y = \text{sen}^{-1}x$
41. $y = \sec^{-1}x + \frac{2\pi}{3}, x > 1$ **43.** $-4(\cos x)^{1/2} + C$
45. $\theta^2 + \theta + \text{sen}(2\theta + 1) + C$ **47.** $\frac{t^3}{3} + \frac{4}{t} + C$
49. $-\frac{1}{3}\cos(2t^{3/2}) + C$ **51.** $\text{tg}(e^x - 7) + C$ **53.** $e^{\text{tg}\,x} + C$
55. $\dfrac{-\ln 7}{3}$ **57.** ln (9/25) **59.** $-\frac{1}{2}(\ln x)^{-2} + C$

55. $\dfrac{-\ln 7}{3}$ **57.** ln (9/25) **59.** $-\frac{1}{2}(\ln x)^{-2} + C$

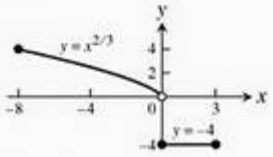
61. $\dfrac{1}{2\ln 3}\left(3^{x^2}\right) + C$ **63.** $\frac{3}{2}\text{sen}^{-1}2(r-1) + C$
65. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{tg}^{-1}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C$ **67.** $\frac{1}{4}\sec^{-1}\dfrac{2x-1}{2} + C$
69. $e^{\text{sen}^{-1}\sqrt{x}} + C$ **71.** $2\sqrt{\text{tg}^{-1}y} + C$ **73.** 16
75. 2 **77.** 1 **79.** 8 **81.** $27\sqrt{3}/160$ **83.** $\pi/2$
85 $\sqrt{3}$ **87.** $6\sqrt{3} - 2\pi$ **89.** −1 **91.** 2 **93.** 1
95. 15/16 + ln 2 **97.** $e - 1$ **99.** 1/6 **101.** 9/14
103. $\dfrac{9\ln 2}{4}$ **105.** π **107.** $\pi/\sqrt{3}$ **109.** $\sec^{-1}|2y| + C$
111. $\pi/12$ **113.** (a) b (b) b
117. (a) $\dfrac{d}{dx}(x\ln x - x + C) = x\cdot\dfrac{1}{x} + \ln x - 1 + 0 = \ln x$

(b) $\dfrac{1}{e-1}$

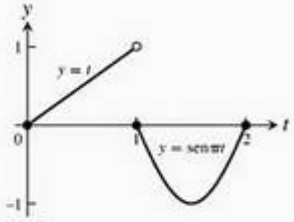
119. 25°F **121.** $\sqrt{2 + \cos^3 x}$ **123.** $\dfrac{-6}{3 + x^4}$
125. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2}{x}e^{\cos(2\ln x)}$ **127.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1 - 2(\text{sen}^{-1}x)^2}}$
129. Sim. **131.** $-\sqrt{1 + x^2}$
133. Custo ≈ \$ 10.899, usando-se uma estimativa de soma inferior.

Exercícios adicionais

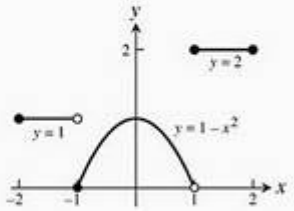
1. (a) Sim. (b) Não.
5. (a) 1/4 (b) $\sqrt[3]{12}$
7. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **9.** $y = x^3 + 2x - 4$
11. 36/5



13. $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}$



15. 13/3



17. $1/2$ **19.** $\pi/2$ **21.** $\ln 2$ **23.** $1/6$ **25.** $\int_0^1 f(x)\,dx$

27. (b) πr^2 **29.** $\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{2\ln 2}, 2:1$ **31.** $2/17$

33. (a) 0 (b) -1 (c) $-\pi$ (d) $x = 1$
(e) $y = 2x + 2 - \pi$ (f) $x = -1, x = 2$ (g) $[-2\pi, 0]$

37. $2/x$ **39.** $\frac{\operatorname{sen} 4y}{\sqrt{y}} - \frac{\operatorname{sen} y}{2\sqrt{y}}$ **41.** $2x\ln|x| - x\ln\frac{|x|}{\sqrt{2}}$

43. $(\operatorname{sen} x)/x$ **45.** 1

CAPÍTULO 6

Seção 6.1

1. (a) $A(x) = \pi(1 - x^2)$ (b) $A(x) = 4(1 - x^2)$
(c) $A(x) = 2(1 - x^2)$ (d) $A(x) = \sqrt{3}(1 - x^2)$

3. 16 **5.** $\frac{16}{3}$ **7.** (a) $2\sqrt{3}$ (b) 8 **9.** 8π

11. (a) $\pi^2/2$ (b) 2π **13.** (a) s^2h (b) s^2h **15.** $\frac{2\pi}{3}$

17. $4 - \pi$ **19.** $\frac{32\pi}{5}$ **21.** 36π **23.** π **25.** $\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$

27. $\frac{\pi}{2}\ln 4$ **29.** $\pi\left(\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} - \frac{11}{3}\right)$ **31.** 2π **33.** 2π

35. $4\pi\ln 4$ **37.** $\pi^2 - 2\pi$ **39.** $\frac{2\pi}{3}$ **41.** $\frac{117\pi}{5}$

43. $\pi(\pi - 2)$ **45.** $\frac{4\pi}{3}$ **47.** 8π **49.** $\frac{7\pi}{6}$

51. (a) 8π (b) $\frac{32\pi}{5}$ (c) $\frac{8\pi}{3}$ (d) $\frac{224\pi}{15}$

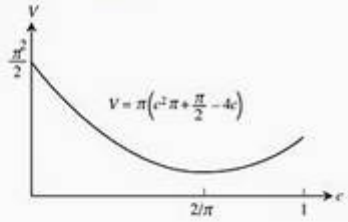
53. (a) $\frac{16\pi}{15}$ (b) $\frac{56\pi}{15}$ (c) $\frac{64\pi}{15}$

55. $V = 2a^2b\pi^2$

57. (a) $V = \frac{\pi h^2(3a - h)}{3}$ (b) $\frac{1}{120\pi}$ m/s

59. $\pi^2/2$ **61.** $V = 3.308\ \text{cm}^3$

63. (a) $c = \frac{2}{\pi}$ (b) $c = 0$
(c)



Seção 6.2

1. 6π **3.** 2π **5.** $\frac{14\pi}{3}$ **7.** 8π **9.** $\frac{5\pi}{6}$ **11.** $\frac{7\pi}{15}$

13. (b) 4π **15.** $\frac{16\pi}{15}(3\sqrt{2} + 5)$ **17.** $\frac{8\pi}{3}$

19. $\frac{4\pi}{3}$ **21.** $\frac{16\pi}{3}$

23. (a) $\frac{6\pi}{5}$ (b) $\frac{4\pi}{5}$ (c) 2π (d) 2π

25. (a) Em torno do eixo x: $V = \frac{2\pi}{15}$; em torno do eixo y: $V = \frac{\pi}{6}$.
(b) Em torno do eixo x: $V =$; em torno do eixo y: $V = \frac{\pi}{6}$.

27. (a) $\frac{5\pi}{3}$ (b) $\frac{4\pi}{3}$ (c) 2π (d) $\frac{2\pi}{3}$

29. (a) $\frac{4\pi}{15}$ (b) $\frac{7\pi}{30}$

31. (a) $\frac{24\pi}{5}$ (b) $\frac{48\pi}{5}$

33. (a) $\frac{9\pi}{16}$ (b) $\frac{9\pi}{16}$

35. Disco: 2 integrais; arruela: 2 integrais; casca: 1 integral

39. $\pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

Seção 6.3

1. $\frac{5\sqrt{10}}{3}$ **3.** 7 **5.** $\frac{21}{2}$ **7.** $e^3 + 2$ **9.** 12 **11.** $\frac{53}{6}$

13. $\frac{123}{32}$ **15.** $\frac{99}{8}$ **17.** $\pi/3$

19. (a) $\int_{-1}^{2}\sqrt{1 + 4x^2}\,dx$ (c) $\approx 6{,}13$

21. (a) $\int_0^{\pi}\sqrt{1 + \cos^2 y}\,dy$ (c) $\approx 3{,}82$

23. (a) $\int_{-1}^{3}\sqrt{1 + (y + 1)^2}\,dy$ (c) $\approx 9{,}29$

25. (a) $\int_0^{\pi/6}\sec x\,dx$ (c) $\approx 0{,}55$

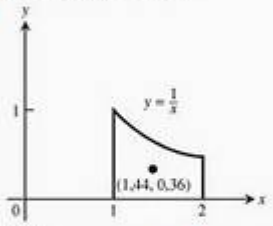
27. Sim, $f(x) = \pm x + C$, onde C é qualquer número real.

29. (a) $y = \sqrt{x}$ de $(1, 1)$ a $(4, 2)$.
(b) Apenas uma. Conhecemos a derivada da função e o valor da função em um único valor de x.

31. $y = e^{x/2} - 1$ **33.** $-\ln(2)$ **35.** $e^3 - \frac{1}{e^3}$

Seção 6.4

1. 4 pés **3.** $(L/4, L/4)$ **5.** $M_0 = 8, M = 8, \bar{x} = 1$
7. $M_0 = 15/2, M = 9/2, \bar{x} = 5/3$
9. $M_0 = 73/6, M = 5, \bar{x} = 73/30$ **11.** $M_0 = 3, M = 3, \bar{x} = 1$
13. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 12/5$ **15.** $\bar{x} = 1, \bar{y} = -3/5$
17. $\bar{x} = 16/105, \bar{y} = 8/15$ **19.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \pi/8$
21. (a) $\bar{x} \approx 1{,}44, \bar{y} \approx 0{,}36$
(b)



23. $\bar{x} = \frac{\ln 4}{\pi}, \bar{y} = 0$ **25.** $\bar{x} = 7, \bar{y} = \frac{\ln 16}{12}$

27. $\bar{x} = 3/2, \bar{y} = 1/2$ **29.** $\bar{x} = \frac{15}{\ln 16}, \bar{y} = \frac{3}{4\ln 16}$

31. (a) $\frac{224\pi}{3}$ (b) $\bar{x} = 2, \bar{y} = 0$

35. $\bar{x} = \bar{y} = 1/3$ 37. $\bar{x} = a/3, \bar{y} = b/3$ 39. $13\delta/6$
41. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{a\pi}{4}$

Seção 6.5

1. (a) $2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\sqrt{1 + \sec^4 x}\, dx$ (c) $\approx 3{,}84$
3. (a) $2\pi \int_1^2 \frac{1}{y}\sqrt{1 + y^{-4}}\, dy$ (c) $\approx 5{,}02$
5. (a) $2\pi \int_1^4 (3 - \sqrt{x})^2\sqrt{1 + (1 - 3x^{-1/2})^2}\, dx$ (c) $\approx 63{,}37$
7. (a) $2\pi \int_0^{\pi/3} \left(\int_0^y \operatorname{tg} t\, dt\right) \sec y\, dy$ (c) $\approx 2{,}08$
9. $4\pi\sqrt{5}$ 11. $3\pi\sqrt{5}$ 13. $98\pi/81$ 15. 2π
17. $\pi(\sqrt{8} - 1)/9$ 19. $35\pi\sqrt{5}/3$ 21. $\pi\left(\frac{15}{16} + \ln 2\right)$
23. $253\pi/20$
27. Deve-se encomendar 226,2 litros de cada cor.
31. (a) $5\sqrt{2}\,\pi$ (b) $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$
33. $8\pi^2$ 35. $52\pi/3$
37. $\frac{16}{3}\pi\,(e^{3/2} + 3e^{1/2} - 4)$ 39. $3\pi\sqrt{5}$
43. $V = 32\pi, S = 32\sqrt{2}\pi$ 45. $4\pi^2$ 47. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{2a}{\pi}$
49. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$ 51. $\sqrt{2}\pi a^3(4 + 3\pi)/6$ 53. $\frac{2a^3}{3}$

Seção 6.6

1. 400 N · m 3. 4 cm, 0.08 J
5. (a) 7.238 lb/pol. (b) 905 pol.·lb, 2.714 pol.·lb
7. 780 J 9. 72,900 pés·lb 13. 160 pés·lb
15. (a) 1,497,600 pés·lb (b) 1 h, 40 min
(d) At 62.26 lb/pés^3: a) 1,494,240 pés·lb b) 1 hr, 40 min
At 62.59 lb/pés^3: a) 1,502,160 pés·lb b) 1 hr, 40.1 min
17. 37,306 pés·lb 19. 7,238,229.47 pés·lb
21. (a) 34,583 pés·lb (b) 53,483 pés·lb
23. 15,073,099.75 J
27. 85.1 pés·lb 29. 64.6 pés·lb 31. 110.6 pés·lb
33. (a) $r(y) = 60 - \sqrt{50^2 - (y - 325)^2}$ para $325 \le y \le 375$ pés
(b) $\Delta V \approx \pi[60 - \sqrt{2.500 - (y - 325)^2}]^2\, \Delta y$
(c) $W = 6.3358 \cdot 10^7$ pés·lb
35. 91.32 pol.·onça 37. 5.144×10^{10} J

Seção 6.7

1. 1.684,8 lb 3. 2.808 lb 5. (a) 1.164,8 lb (b) 1.194,7 lb
7. 1.309 lb 9. 41,6 lb 11. (a) 93,33 lb (b) 3 pés
13. 1.035 pés^3 15. $wb/2$
17. Não. O tanque transbordará, pois a extremidade móvel terá se movido apenas $3\frac{1}{3}$ pés no momento em que o tanque estiver cheio.
19. 4,2 lb 21. (a) 374,4 lb (b) 7,5 pol (c) Não.

Exercícios práticos

1. $\frac{9\pi}{280}$ 3. π^2 5. $\frac{72\pi}{35}$
7. (a) 2π (b) π (c) $12\pi/5$ (d) $26\pi/5$
9. (a) 8π (b) $1.088\pi/15$ (c) $512\pi/15$
11. $\pi(3\sqrt{3} - \pi)/3$ 13. $\pi(e - 1)$ 15. $\frac{28\pi}{3}$ pés^3 17. $\frac{10}{3}$
19. $3 + \frac{1}{8}\ln 2$ 21. 10 23. $\frac{9\pi}{2}$ 25. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 8/5$
27. $\bar{x} = 3/2, \bar{y} = 12/5$ 29. $\bar{x} = 9/5, \bar{y} = 11/10$
31. $28\pi\sqrt{2}/3$ 33. 4π 35. $76\pi/3$ 37. 4.640 J
39. 10 pés·lb, 30 pés·lb 41. 418,208.81 pés·lb
43. $22{,}500\pi$ pés·lb, 257 s 45. 3.32,8 lb 47. 2.196,48 lb
49. $216w_1 + 360w_2$

Exercícios adicionais

1. $f(x) = \sqrt{\frac{2x - a}{\pi}}$ 3. $f(x) = \sqrt{C^2 - 1}\,x + a$, onde $C \ge 1$
5. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{n}{2n + 1}$, $(0, 1/2)$
9. (a) $\bar{x} = \bar{y} = 4(a^2 + ab + b^2)/(3\pi(a + b))$
(b) $(2a/\pi, 2a/\pi)$
11. $28/3$ 13. $\frac{4h\sqrt{3mh}}{3}$ 15. ≈ 2329.6 lb
17. (a) $2h/3$ (b) $(6a^2 + 8ah + 3h^2)/(6a + 4h)$

CAPÍTULO 7

Seção 7.1

1. $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ 3. $\ln|y^2 - 25| + C$ 5. $\ln|6 + 3\operatorname{tg} t| + C$
7. $\ln(1 + \sqrt{x}) + C$ 9. 1 11. $8e^{(x+1)} + C$ 13. 2
15. $2e^{\sqrt{r}} + C$ 17. $-e^{-t^2} + C$ 19. $-e^{1/x} + C$
21. $\frac{1}{\pi}e^{\sec \pi t} + C$ 23. 1 25. $\ln(1 + e^r) + C$ 27. $\frac{1}{2\ln 2}$
29. $\frac{1}{\ln 2}$ 31. $\frac{6}{\ln 7}$ 33. 32760 35. $3^{\sqrt{2}+1}$
37. $\frac{1}{\ln 10}\left(\frac{(\ln x)^2}{2}\right) + C$ 39. $2(\ln 2)^2$ 41. $\frac{3\ln 2}{2}$ 43. $\ln 10$
45. $(\ln 10)\ln|\ln x| + C$ 47. $y = 1 - \cos(e^t - 2)$
49. $y = 2(e^{-x} + x) - 1$ 51. $y = x + \ln|x| + 2$ 53. $\pi \ln 16$
55. $6 + \ln 2$ 57. (b) 0,00469
69. (a) 1,89279 (b) −0,35621 (c) 0,94575 (d) −2,80735
(e) 5,29595 (f) 0,97041 (g) −1,03972 (h) −1,61181

Seção 7.2

1. (a) −0,00001 (b) 10,536 anos (c) 82%
3. 54,88 g 5. 59,8 pés 7. $2{,}8147498 \times 10^{14}$
9. (a) 8 anos (b) 32,02 anos
11. 15,28 anos
13. (a) $A_0e^{0,2}$ (b) 17,33 anos; 27,47 anos
15. 4,50% 17. 0,585 dias
21. (a) 17,5 min. (b) 13,26 min.
23. −3°C 25. Cerca de 6.659 anos. 27. 41 anos.

Seção 7.3

1. (a) mais devagar (b) mais devagar (c) mais devagar (d) mais rápido (e) mais devagar (f) mais devagar (g) à mesma taxa (h) mais devagar

3. (a) à mesma taxa (b) mais rápido (c) à mesma taxa (d) à mesma taxa (e) mais devagar (f) mais rápido (g) mais devagar (h) à mesma taxa

5. (a) à mesma taxa (b) à mesma taxa (c) à mesma taxa (d) mais rápido (e) mais rápido (f) à mesma taxa (g) mais devagar (h) mais rápido

7. d, a, c, b

9. (a) falso (b) falso (c) verdadeiro (d) verdadeiro (e) verdadeiro (f) verdadeiro (g) falso (h) verdadeiro

13. Quando o grau de f é menor ou igual ao de g

15. 1, 1

21. (b) $\ln(e^{17000000}) = 17.000.000 < (e^{17\times10^6})^{1/10^6}$
$= e^{17} \approx 24,154,952.75$
(c) $x \approx 3{,}4306311 \times 10^{15}$
(d) Elas se cruzam em $x \approx 3{,}4306311 \times 10^{15}$.

23. (a) O logaritmo que dá $O(n \log_2 n)$ passos.

25. Seriam necessários um milhão de passos com uma busca seqüencial e no máximo 20 passos com uma busca binária.

Seção 7.4

1. $\cosh x = 5/4$, $\operatorname{tgh} x = -3/5$, $\operatorname{cotgh} x = -5/3$, $\operatorname{sech} x = 4/5$, $\operatorname{cosech} x = -4/3$

3. $\operatorname{senh} x = 8/15$, $\operatorname{tgh} x = 8/17$, $\operatorname{cotgh} x = 17/8$, $\operatorname{sech} x = 15/17$, $\operatorname{cosech} x = 15/8$

5. $x + \frac{1}{x}$ 7. e^{5x} 9. e^{4x} 13. $2\cosh\frac{x}{3}$

15. $\operatorname{sech}^2\sqrt{t} + \frac{\operatorname{tgh}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ 17. $\operatorname{cotgh} z$

19. $(\ln \operatorname{sech}\theta)(\operatorname{sech}\theta \operatorname{tgh}\theta)$ 21. $\operatorname{tgh}^3 v$ 23. 2

25. $\frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$ 27. $\frac{1}{1+\theta} - \operatorname{tgh}^{-1}\theta$

29. $\frac{1}{2\sqrt{t}} - \operatorname{cotgh}^{-1}\sqrt{t}$ 31. $-\operatorname{sech}^{-1} x$ 33. $\frac{\ln 2}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2\theta}}}$

35. $|\sec x|$ 41. $\frac{\cosh 2x}{2} + C$ 43. $12\operatorname{senh}\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right) + C$

45. $7\ln|e^{x/7} + e^{-x/7}| + C$ 47. $\operatorname{tgh}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$

49. $-2\operatorname{sech}\sqrt{t} + C$ 51. $\ln\frac{5}{2}$ 53. $\frac{3}{32} + \ln 2$ 55. $e - e^{-1}$

57. $3/4$ 59. $\frac{3}{8} + \ln\sqrt{2}$ 61. $\ln(2/3)$ 63. $\frac{-\ln 3}{2}$ 65. $\ln 3$

67. (a) $\operatorname{senh}^{-1}(\sqrt{3})$ (b) $\ln(\sqrt{3}+2)$

69. (a) $\operatorname{cotgh}^{-1}(2) - \operatorname{cotgh}^{-1}(5/4)$ (b) $\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

71. (a) $-\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$
(b) $-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-(12/13)^2}}{(12/13)}\right) + \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-(4/5)^2}}{(4/5)}\right) =$
$-\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln(2) = \ln(4/3)$

73. (a) 0 (b) 0

75. (b) i. $f(x) = \frac{2f(x)}{2} + 0 = f(x)$, ii. $f(x) = 0 + \frac{2f(x)}{2} = f(x)$

77. (b) $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ (c) $80\sqrt{5} \approx 178{,}89$ pés/s

79. $y = \operatorname{sech}^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2}$ 81. 2π 83. $\frac{6}{5}$

85. $16\pi\ln 6 + \frac{455\pi}{9}$

89. (c) $a \approx 0{,}0417525$ (d) $\approx 47{,}90$ lb

Exercícios práticos

1. $-\cos e^x + C$ 3. $\ln 8$ 5. $2\ln 2$ 7. $\frac{1}{2}(\ln(x-5))^2 + C$

9. $3\ln 7$ 11. $2(\sqrt{2}-1)$ 13. $y = \frac{\ln 2}{\ln(3/2)}$

15. $y = \ln x - \ln 3$

17. (a) à mesma taxa (b) à mesma taxa (c) mais rápido (d) mais rápido (e) à mesma taxa (f) à mesma taxa

19. (a) verdadeiro (b) falso (c) falso (d) verdadeiro (e) verdadeiro (f) verdadeiro

21. $1/3$ 23. $1/e$ m/s 25. $\ln 5x - \ln 3x = \ln(5/3)$

27. $1/2$ 29. 18.935 anos

Exercícios adicionais

1. (a) 1 (b) $\pi/2$ (c) π 3. $2/17$ 7. $\bar{x} = \frac{\ln 4}{\pi}$, $\bar{y} = 0$

CAPÍTULO 8

Seção 8.1

1. $2\sqrt{8x^2+1} + C$ 3. $2(\operatorname{sen} v)^{3/2} + C$ 5. $\ln 5$

7. $2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C$ 9. $-\frac{1}{7}\ln|\operatorname{sen}(3-7x)| + C$

11. $-\ln|\operatorname{cosec}(e^\theta+1) + \operatorname{cotg}(e^\theta+1)| + C$

13. $3\ln\left|\sec\frac{t}{3} + \operatorname{tg}\frac{t}{3}\right| + C$

15. $-\ln|\operatorname{cosec}(s-\pi) + \operatorname{cotg}(s-\pi)| + C$ 17. 1

19. $e^{\operatorname{tg} v} + C$ 21. $\frac{3^{(x+1)}}{\ln 3} + C$ 23. $\frac{2^{\sqrt{w}}}{\ln 2} + C$

25. $3\operatorname{tg}^{-1} 3u + C$ 27. $\pi/18$ 29. $\operatorname{sen}^{-1} s^2 + C$

31. $6\sec^{-1}|5x| + C$ 33. $\operatorname{tg}^{-1} e^x + C$ 35. $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

37. 2π 39. $\operatorname{sen}^{-1}(t-2) + C$

41. $\sec^{-1}|x+1| + C$, quando $|x+1| > 1$

43. $\operatorname{tg} x - 2\ln|\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x| - \operatorname{cotg} x - x + C$

45. $x + \operatorname{sen} 2x + C$ 47. $x - \ln|x+1| + C$ 49. $7 + \ln 8$

51. $2t^2 - t + 2\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) + C$ 53. $\operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$

55. $\sqrt{2}$ 57. $\operatorname{tg} x - \sec x + C$ 59. $\ln|1 + \operatorname{sen}\theta| + C$

61. $\operatorname{cotg} x + x + \operatorname{cosec} x + C$ 63. 4 65. $\sqrt{2}$ 67. 2

69. $\ln\left|\sqrt{2}+1\right| - \ln\left|\sqrt{2}-1\right|$ 71. $4 - \frac{\pi}{2}$

73. $-\ln|\operatorname{cosec}(\operatorname{sen}\theta) + \operatorname{cotg}(\operatorname{sen}\theta)| + C$

75. $\ln|\operatorname{sen} x| + \ln|\cos x| + C$ 77. $12\operatorname{tg}^{-1}\left(\sqrt{y}\right) + C$

79. $\sec^{-1}\left|\frac{x-1}{7}\right| + C$ 81. $\ln|\sec(\operatorname{tg} t)| + C$

83. (a) $\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\theta + C$

(b) $\operatorname{sen}\theta - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\theta + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5\theta + C$

(c) $\int \cos^9\theta\, d\theta = \int \cos^8\theta(\cos\theta)\, d\theta$

$= \int (1 - \operatorname{sen}^2\theta)^4(\cos\theta)\, d\theta$

85. (a) $\int \operatorname{tg}^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\theta - \int \operatorname{tg}\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\theta + \ln|\cos\theta| + C$

(b) $\int \operatorname{tg}^5\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4\theta - \int \operatorname{tg}^3\theta\, d\theta$

(c) $\int \operatorname{tg}^7\theta\, d\theta = \frac{1}{6}\operatorname{tg}^6\theta - \int \operatorname{tg}^5\theta\, d\theta$

(d) $\int \operatorname{tg}^{2k+1}\theta\, d\theta = \frac{1}{2k}\operatorname{tg}^{2k}\theta - \int \operatorname{tg}^{2k-1}\theta\, d\theta$

87. $2\sqrt{2} - \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$ **89.** π^2

91. $\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$ **93.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \dfrac{1}{\ln\left(2\sqrt{2} + 3\right)}$

Seção 8.2

1. $-2x\cos(x/2) + 4\operatorname{sen}(x/2) + C$

3. $t^2\operatorname{sen} t + 2t\cos t - 2\operatorname{sen} t + C$ **5.** $\ln 4 - \frac{3}{4}$

7. $y\operatorname{tg}^{-1}(y) - \ln\sqrt{1 + y^2} + C$

9. $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$

11. $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$

13. $(x^2 - 7x + 7)e^x + C$

15. $(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)e^x + C$

17. $\dfrac{\pi^2 - 4}{8}$ **19.** $\dfrac{5\pi - 3\sqrt{3}}{9}$

21. $\frac{1}{2}(-e^\theta\cos\theta + e^\theta\operatorname{sen}\theta) + C$

23. $\dfrac{e^{2x}}{13}(3\operatorname{sen} 3x + 2\cos 3x) + C$

25. $\frac{2}{3}\left(\sqrt{3s + 9}\, e^{\sqrt{3s+9}} - e^{\sqrt{3s+9}}\right) + C$

27. $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln(2) - \dfrac{\pi^2}{18}$

29. $\frac{1}{2}[-x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x)] + C$

31. (a) π (b) 3π (c) 5π (d) $(2n + 1)\pi$

33. $2\pi(1 - \ln 2)$ **35.** (a) $\pi(\pi - 2)$ (b) 2π

37. $\frac{1}{2\pi}(1 - e^{-2\pi})$ **39.** $u = x^n, dv = \cos x\, dx$

41. $u = x^n, dv = e^{ax}\, dx$ **43.** $x\operatorname{sen}^{-1}x + \cos(\operatorname{sen}^{-1}x) + C$

45. $x\sec^{-1}x - \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C$ **47.** Sim

49. (a) $x\operatorname{senh}^{-1}x - \cosh(\operatorname{senh}^{-1}x) + C$

(b) $x\operatorname{senh}^{-1}x - (1 + x^2)^{1/2} + C$

Seção 8.3

1. $\dfrac{2}{x - 3} + \dfrac{3}{x - 2}$ **3.** $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{3}{(x + 1)^2}$

5. $\dfrac{-2}{z} + \dfrac{-1}{z^2} + \dfrac{2}{z - 1}$ **7.** $1 + \dfrac{17}{t - 3} + \dfrac{-12}{t - 2}$

9. $\frac{1}{2}[\ln|1 + x| - \ln|1 - x|] + C$

11. $\frac{1}{7}\ln|(x + 6)^2(x - 1)^5| + C$ **13.** $(\ln 15)/2$

15. $-\frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{6}\ln|t + 2| + \frac{1}{3}\ln|t - 1| + C$ **17.** $3\ln 2 - 2$

19. $\frac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x + 1}{x - 1}\right| - \dfrac{x}{2(x^2 - 1)} + C$ **21.** $(\pi + 2\ln 2)/8$

23. $\operatorname{tg}^{-1}y - \dfrac{1}{y^2 + 1} + C$

25. $-(s - 1)^{-2} + (s - 1)^{-1} + \operatorname{tg}^{-1}s + C$

27. $\dfrac{-1}{\theta^2 + 2\theta + 2} + \ln(\theta^2 + 2\theta + 2) - \operatorname{tg}^{-1}(\theta + 1) + C$

29. $x^2 + \ln\left|\dfrac{x - 1}{x}\right| + C$

31. $9x + 2\ln|x| + \frac{1}{x} + 7\ln|x - 1| + C$

33. $\dfrac{y^2}{2} - \ln|y| + \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) + C$ **35.** $\ln\left(\dfrac{e^t + 1}{e^t + 2}\right) + C$

37. $\frac{1}{5}\ln\left|\dfrac{\operatorname{sen} y - 2}{\operatorname{sen} y + 3}\right| + C$

39. $\dfrac{(\operatorname{tg}^{-1}2x)^2}{4} - 3\ln|x - 2| + \dfrac{6}{x - 2} + C$

41. $x = \ln|t - 2| - \ln|t - 1| + \ln 2$ **43.** $x = \dfrac{6t}{t + 2} - 1$

45. $3\pi\ln 25$ **47.** 1.10

49. (a) $x = \dfrac{1000e^{4t}}{499 + e^{4t}}$ (b) 1,55 dias

51. (a) $\dfrac{22}{7} - \pi$ (b) 0,04%

(c) A área é inferior a 0,003.

Seção 8.4

1. 8/15 **3.** 4/3 **5.** 16/35 **7.** 3π **9.** π **11.** 2

13. 1 **15.** 4 **17.** 2 **19.** $2\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$ **21.** $\sqrt{2}$

23. $2\sqrt{3} + \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$ **25.** 4/3 **27.** 4/3

29. $2(1 - \ln 2)$ **31.** $\frac{4}{3} - \ln\sqrt{3}$ **33.** $-6/5$ **35.** π

37. 0 **39.** $\dfrac{2\pi\left(\left(9\sqrt[3]{4} + 1\right)^{3/2} - 1\right)}{27}$ **41.** $\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$

43. $\pi^2/2$

Seção 8.5

1. $\ln\left|\sqrt{9 + y^2} + y\right| + C$ **3.** $\pi/4$ **5.** $\pi/6$

7. $\dfrac{25}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{t}{5}\right) + \dfrac{t\sqrt{25 - t^2}}{2} + C$

9. $\frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{2x}{7} + \dfrac{\sqrt{4x^2 - 49}}{7}\right| + C$

11. $7\left[\dfrac{\sqrt{y^2 - 49}}{7} - \sec^{-1}\left(\dfrac{y}{7}\right)\right] + C$ **13.** $\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C$

15. $\frac{1}{3}(x^2 + 4)^{3/2} - 4\sqrt{x^2 + 4} + C$ **17.** $\dfrac{-2\sqrt{4 - w^2}}{w} + C$

19. $4\sqrt{3} - 4\pi/3$ **21.** $-\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + C$

23. $-\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5 + C$ 25. $2\,\text{tg}^{-1} 2x + \frac{4x}{(4x^2+1)} + C$

27. $\frac{1}{3}\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right)^3 + C$ 29. $\ln 9 - \ln\left(1+\sqrt{10}\right)$

31. $\pi/6$ 33. $\sec^{-1}|x| + C$ 35. $\sqrt{x^2-1} + C$

37. $y = 2\left[\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} - \sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

39. $y = \frac{3}{2}\text{tg}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3\pi}{8}$ 41. $3\pi/4$

43. $\frac{2}{1-\text{tg}\,(x/2)} + C$ 45. 1 47. $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

49. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\text{tg}\,(t/2)+1-\sqrt{2}}{\text{tg}\,(t/2)+1+\sqrt{2}}\right| + C$

51. $\ln\left|\frac{1+\text{tg}\,(\theta/2)}{1-\text{tg}\,(\theta/2)}\right| + C$

Seção 8.6

1. $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\text{tg}^{-1}\sqrt{\frac{x-3}{3}}\right) + C$

3. $\sqrt{x-2}\left(\frac{2(x-2)}{3} + 4\right) + C$

5. $\frac{(2x-3)^{3/2}(x+1)}{5} + C$

7. $\frac{-\sqrt{9-4x}}{x} - \frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9-4x}-3}{\sqrt{9-4x}+3}\right| + C$

9. $\frac{(x+2)(2x-6)\sqrt{4x-x^2}}{6} + 4\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$

11. $-\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{7+x^2}}{x}\right| + C$

13. $\sqrt{4-x^2} - 2\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + C$

15. $\frac{p}{2}\sqrt{25-p^2} + \frac{25}{2}\text{sen}^{-1}\frac{p}{5} + C$

17. $2\,\text{sen}^{-1}\frac{r}{2} - \frac{1}{2}r\sqrt{4-r^2} + C$

19. $-\frac{1}{3}\text{tg}^{-1}\left[\frac{1}{3}\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right] + C$

21. $\frac{e^{2t}}{13}(2\cos 3t + 3\,\text{sen}3t) + C$

23. $\frac{x^2}{2}\cos^{-1}(x) + \frac{1}{4}\text{sen}^{-1}(x) - \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$

25. $\frac{s}{18(9-s^2)} + \frac{1}{108}\ln\left|\frac{s+3}{s-3}\right| + C$

27. $-\frac{\sqrt{4x+9}}{x} + \frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4x+9}-3}{\sqrt{4x+9}+3}\right| + C$

29. $2\sqrt{3t-4} - 4\,\text{tg}^{-1}\sqrt{\frac{3t-4}{4}} + C$

31. $\frac{x^3}{3}\text{tg}^{-1}x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$

33. $-\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} + C$ 35. $8\left[\frac{\text{sen}(7t/2)}{7} - \frac{\text{sen}(9t/2)}{9}\right] + C$

37. $6\,\text{sen}(\theta/12) + \frac{6}{7}\text{sen}(7\theta/12) + C$

39. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\text{tg}^{-1}x + C$

41. $\left(x-\frac{1}{2}\right)\text{sen}^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + C$

43. $\text{sen}^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + C$

45. $\sqrt{1-\text{sen}^2 t} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\text{sen}^2 t}}{\text{sen}\,t}\right| + C$

47. $\ln\left|\ln y + \sqrt{3+(\ln y)^2}\right| + C$

49. $\ln\left|3r + \sqrt{9r^2-1}\right| + C$

51. $x\cos^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\text{sen}^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + C$

53. $-\frac{\text{sen}^4 2x\cos 2x}{10} - \frac{2\,\text{sen}^2 2x\cos 2x}{15} - \frac{4\cos 2x}{15} + C$

55. $\frac{\cos^3 2\pi t\,\text{sen}2\pi t}{\pi} + \frac{3}{2}\frac{\cos 2\pi t\,\text{sen}2\pi t}{\pi} + 3t + C$

57. $\frac{\text{sen}^3 2\theta\cos^2 2\theta}{10} + \frac{\text{sen}^3 2\theta}{15} + C$ 59. $\frac{2}{3}\text{tg}^3 t + C$

61. $\text{tg}^2 2x - 2\ln|\sec 2x| + C$

63. $8\left[-\frac{1}{3}\text{cotg}^3 t + \text{cotg}\,t + t\right] + C$

65. $\frac{(\sec\pi x)(\text{tg}\,\pi x)}{\pi} + \frac{1}{\pi}\ln|\sec\pi x + \text{tg}\,\pi x| + C$

67. $\frac{\sec^2 3x\,\text{tg}\,3x}{3} + \frac{2}{3}\text{tg}\,3x + C$

69. $\frac{-\text{cosec}^3 x\,\text{cotg}\,x}{4} - \frac{3\,\text{cosec}\,x\,\text{cotg}\,x}{8} - \frac{3}{8}\ln|\text{cosec}\,x + \text{cotg}\,x| + C$

71. $4x^4(\ln x)^2 - 2x^4(\ln x) + \frac{x^2}{2} + C$ 73. $\frac{e^{3x}}{9}(3x-1) + C$

75. $2x^3e^{x/2} - 12x^2e^{x/2} + 96e^{x/2}\left(\frac{x}{2}-1\right) + C$

77. $\frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left[\frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\right] + C$ 79. $\frac{x\pi^x}{\ln\pi} - \frac{\pi^x}{(\ln\pi)^2} + C$

81. $\frac{1}{2}[\sec(e^t-1)\,\text{tg}(e^t-1) + \ln|\sec(e^t-1) + \text{tg}(e^t-1)|] + C$

83. $\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ 85. $\pi/3$

87. $\frac{1}{120}\text{senh}^4 3x\cosh 3x - \frac{1}{90}\text{senh}^2 3x\cosh 3x + \frac{1}{45}\cosh 3x + C$

89. $\frac{x^2}{3}\text{senh}\,3x - \frac{2x}{9}\cosh 3x + \frac{2}{27}\text{senh}\,3x + C$

91. $-\frac{\text{sech}^7 x}{7} + C$ 101. $2\pi\sqrt{3} + \pi\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

103. $\bar{x} = 4/3, \bar{y} = \ln\sqrt{2}$ 105. 7,62 107. $\pi/8$ 111. $\pi/4$

Seção 8.7

1. I: (a) 1,5, 0 (b) 1,5, 0 (c) 0%
   II: (a) 1,5, 0 (b) 1,5, 0 (c) 0%
3. I: (a) 2,75, 0,08 (b) 2,67, 0,08 (c) 0,0312 ≈ 3%
   II: (a) 2,67, 0 (b) 2,67, 0 (c) 0%
5. I: (a) 6,25, 0,5 (b) 6, 0,25 (c) 0,0417 ≈ 4%
   II: (a) 6, 0 (b) 6, 0 (c) 0%

7. I: (a) 0,509, 0,03125 (b) 0,5, 0,009 (c) 0,018 ≈ 2%
II: (a) 0,5, 0,002604 (b) 0,5, 0,0004 (c) 0%
9. I: (a) 1,8961, 0,161 (b) 2, 0,1039 (c) 0,052 ≈ 5%
II: (a) 2,0045, 0,0066 (b) 2, 0,00454 (c) 0%
11. (a) 0,31929 (b) 0,32812 (c) 1/3, 0,01404, 0,00521
13. (a) 1,95643 (b) 2,00421 (c) 2, 0,04357, −0,00421
15. (a) 1 (b) 2
17. (a) 116 (b) 2
19. (a) 283 (b) 2
21. (a) 71 (b) 10
23. (a) 76 (b) 12
25. (a) 82 (b) 8
27. 15,990 pés^3 **29.** 5.166,346 pés≈ 0,9785 mi **31.** ≈10,63 pés
33. (a) ≈0,00021 (b) ≈1,37079 (c) ≈0,015%
35. (a) 3,11571 (b) 0,2588
(c) Com $M = 3.11$, temos $|E_T| \le (\pi^3/1200)(3.11) < 0.081$
39. 1,08943 **41.** 0,82812
43. (a) $T_{10} \approx 1{,}983523538$, $T_{100} \approx 1{,}999835504$, $T_{1.000} \approx 1{,}999998355$
(b)

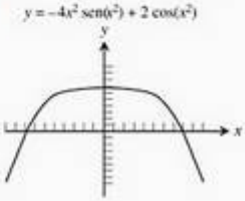
n	$\lvert E_T\rvert = 2 - T_n$
10	$0{,}016476462 = 1{,}6476462 \times 10^{-2}$
100	$1{,}64496 \times 10^{-4}$
1.000	$1{,}645 \times 10^{-6}$

(c) $|E_{10n}| \approx 10^{-2}|E_n|$
(d) $b - a = \pi, h^2 = \dfrac{\pi^2}{n^2}, M = 1$

$$|E_n| \le \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right) = \frac{\pi^3}{12n^2}$$

$$|E_{10n}| \le \frac{\pi^3}{12(10n)^2} = 10^{-2}|E_n|$$

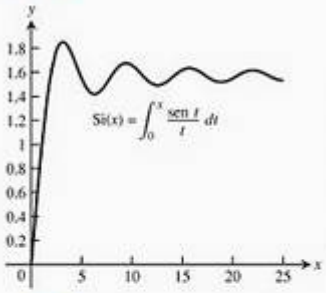
45. (a) $f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\,\mathrm{sen}(x^2)$
(b)

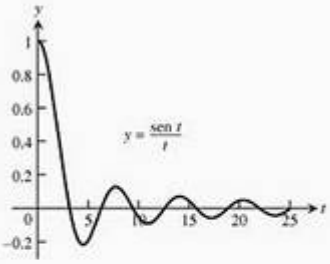


(c) O gráfico mostra que $-3 \le f\to(x) \le 2$ para $-1 \le x \le 1$.
(d) $|E_T| \le \dfrac{1-(-1)}{12}(\Delta x^2)(3) = \dfrac{\Delta x^2}{2}$
(e) $|E_T| \le \dfrac{\Delta x^2}{2} \le \dfrac{0{,}1^2}{2} < 0{,}01$ (f) $n \ge 20$
47. (a) 2,3; 1,6; 1,5; 2,1; 3,2; 4,8; 7,0; 9,3; 10,7; 10,7; 9,3; 6,4; 3,2
(b) $\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^6 (C(y))^2\,dy$ (c) ≈34,7 pol^3
(d) $V \approx 34{,}79$ pol^3, de acordo com a regra de Simpson. A estimativa pela regra de Simpson deve ser mais acurada do que a trapezoidal. O erro na estimativa da regra de Simpson é proporcional a $\Delta x^4 = 0{,}0625$, enquanto o erro na estimativa trapezoidal é proporcional a $\Delta x^2 = 0{,}25$, um número maior quando $\Delta x = 0{,}5$ pol.
49. (a) ≈5,870 (b) $|E_T| \le 0{,}0032$
51. 21,07 pol. **53.** 14,4 **55.** 54,9

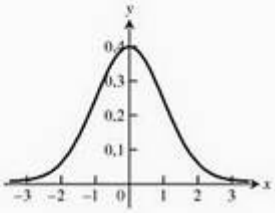
Seção 8.8

1. $\pi/2$ **3.** 2 **5.** 6 **7.** $\pi/2$ **9.** ln 3 **11.** ln 4 **13.** 0
15. $\sqrt{3}$ **17.** π **19.** $\ln\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)$ **21.** −1 **23.** 1
25. −1/4 **27.** $\pi/2$ **29.** $\pi/3$ **31.** 6 **33.** ln 2
35. Diverge. **37.** Converge. **39.** Converge. **41.** Converge.
43. Diverge. **45.** Converge. **47.** Converge. **49.** Diverge.
51. Converge. **53.** Converge. **55.** Diverge. **57.** Converge.
59. Diverge. **61.** Converge. **63.** Converge.
65. (a) Converge quando $p < 1$. (b) Converge quando $p > 1$.
67. 1 **69.** 2π **71.** ln 2 **73.** (b) ≈0,88621
75. (a)





(b) $\pi/2$
77. (a)



(b) ≈0,683, ≈0,954, ≈0,997
81. Diverge. **83.** Converge. **85.** Converge. **87.** Diverge.

Exercícios práticos

1. $\dfrac{1}{12}(4x^2 - 9)^{3/2} + C$ **3.** $\dfrac{(2x+1)^{5/2}}{10} - \dfrac{(2x+1)^{3/2}}{6} + C$
5. $\dfrac{\sqrt{8x^2+1}}{8} + C$ **7.** $\dfrac{1}{2}\ln(25 + y^2) + C$
9. $\dfrac{-\sqrt{9-4t^4}}{8} + C$ **11.** $\dfrac{9}{25}(z^{5/3} + 1)^{5/3} + C$
13. $-\dfrac{1}{2(1-\cos 2\theta)} + C$ **15.** $-\dfrac{1}{4}\ln|3 + 4\cos t| + C$
17. $-\dfrac{1}{2}e^{\cos 2x} + C$ **19.** $-\dfrac{1}{3}\cos^3(e^\theta) + C$ **21.** $\dfrac{2^{x-1}}{\ln 2} + C$
23. $\ln|\ln v| + C$ **25.** $\ln|2 + \mathrm{tg}^{-1}x| + C$
27. $\mathrm{sen}^{-1}(2x) + C$ **29.** $\dfrac{1}{3}\mathrm{sen}^{-1}\left(\dfrac{3t}{4}\right) + C$

31. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) + C$ **33.** $\frac{1}{5}\sec^{-1}\left|\frac{5x}{4}\right| + C$

35. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$ **37.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y-2}{2}\right) + C$

39. $\sec^{-1}|x-1| + C$ **41.** $\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}2x}{4} + C$

43. $\frac{2}{3}\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + C$

45. $\frac{\operatorname{tg}^2(2t)}{4} - \frac{1}{2}\ln|\sec 2t| + C$

47. $-\frac{1}{2}\ln|\operatorname{cosec}(2x) + \operatorname{cotg}(2x)| + C$ **49.** $\ln\sqrt{2}$ **51.** 2

53. $2\sqrt{2}$ **55.** $x - 2\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

57. $x + x^2 + 2\ln|2x-1| + C$

59. $\ln(y^2+4) - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) + C$

61. $-\sqrt{4-t^2} + 2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) + C$ **63.** $x - \operatorname{tg}x + \sec x + C$

65. $-\frac{1}{3}\ln|\sec(5-3x) + \operatorname{tg}(5-3x)| + C$

67. $4\ln\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)\right| + C$

69. $-2\left(\frac{(\sqrt{1-x})^3}{3} - \frac{(\sqrt{1-x})^5}{5}\right) + C$

71. $\frac{1}{2}\left(z\sqrt{z^2+1} + \ln|z + \sqrt{z^2+1}|\right) + C$

73. $\ln|y + \sqrt{25+y^2}| + C$ **75.** $\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x} + C$

77. $\frac{\operatorname{sen}^{-1}x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$ **79.** $\ln\left|\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right| + C$

81. $\sqrt{w^2-1} - \sec^{-1}(w) + C$

83. $(x+1)(\ln(x+1)) - (x+1) + C$

85. $x\operatorname{tg}^{-1}(3x) - \frac{1}{6}\ln(1+9x^2) + C$

87. $(x+1)^2e^x - 2(x+1)e^x + 2e^x + C$

89. $\frac{2e^x\operatorname{sen}2x}{5} + \frac{e^x\cos 2x}{5} + C$

91. $2\ln|x-2| - \ln|x-1| + C$

93. $\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$

95. $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 2}\right| + C$

97. $4\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4\operatorname{tg}^{-1}x + C$

99. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{(v-2)^5(v+2)}{v^6}\right| + C$

101. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}t - \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}} + C$

103. $\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + C$

105. $\frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}\ln|x+3| + \frac{3}{2}\ln|x+1| + C$

107. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$ **109.** $\ln|1-e^{-x}| + C$

103. $\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + C$

105. $\frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}\ln|x+3| + \frac{3}{2}\ln|x+1| + C$

107. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$ **109.** $\ln|1-e^{-x}| + C$

111. $-\sqrt{16-y^2} + C$ **113.** $-\frac{1}{2}\ln|4-x^2| + C$

115. $\ln\frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + C$ **117.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + C$

119. $-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$ **121.** $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C$

123. $\frac{\cos\theta}{2} - \frac{\cos 11\theta}{22} + C$ **125.** $4\sqrt{1-\cos(t/2)} + C$

127. Pelo menos 16 **129.** $T = \pi, S = \pi$ **131.** 25 °F

133. (a) ≈2,42 gal (b) ≈24,83 mi/gal

135. $\pi/2$ **137.** 6 **139.** $\ln 3$ **141.** 2 **143.** $\pi/6$

145. Diverge **147.** Diverge **149.** Converge

151. $\frac{2x^{3/2}}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$

153. $\ln\left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}}\right| - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 + C$

155. $\operatorname{sen}^{-1}(x+1) + C$ **157.** $\ln|u + \sqrt{1+u^2}| + C$

159. $-2\operatorname{cotg}x - \ln|\operatorname{cosec}x + \operatorname{cotg}x| + \operatorname{cosec}x + C$

161. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3+v}{3-v}\right| + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^{-1}\frac{v}{3} + C$

163. $\frac{\theta\operatorname{sen}(2\theta+1)}{2} + \frac{\cos(2\theta+1)}{4} + C$

165. $\frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$

167. $-\cos(2\sqrt{x}) + C$ **169.** $-\ln|\operatorname{cosec}(2y) + \operatorname{cotg}(2y)| + C$

171. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C$ **173.** $-\sqrt{4-(r+2)^2} + C$

175. $\frac{1}{4}\sec^2\theta + C$ **177.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

179. $2\left(\frac{(\sqrt{2-x})^3}{3} - 2\sqrt{2-x}\right) + C$ **181.** $\operatorname{tg}^{-1}(y-1) + C$

183. $\frac{1}{3}\ln|\sec\theta^3| + C$

185. $\frac{1}{4}\ln|z| - \frac{1}{4z} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln(z^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)\right] + C$

187. $-\frac{1}{4}\sqrt{9-4t^2} + C$ **189.** $\ln|\operatorname{sen}\theta| - \frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{sen}^2\theta) + C$

191. $\ln|\sec\sqrt{y}| + C$ **193.** $-\theta\ln\left|\frac{\theta+2}{\theta-2}\right| + C$ **195.** $x + C$

197. $-\frac{\cos x}{2} + C$ **199.** $\ln(1+e^t) + C$ **201.** 1/4

203. $\ln|\ln\operatorname{sen}v| + C$ **205.** $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$

207. $-\frac{1}{5}\operatorname{tg}^{-1}\cos(5t) + C$ **209.** $\frac{1}{3}\left(\frac{27^{3\theta+1}}{\ln 27}\right) + C$

211. $2\sqrt{r} - 2\ln(1+\sqrt{r}) + C$

213. $\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| + \frac{2}{y} - \frac{2}{y^2} + C$ **215.** $4\sec^{-1}\left(\frac{7m}{2}\right) + C$

217. $\frac{\sqrt{8}-1}{6}$ **219.** $\frac{\pi}{2}(3b-a) + 2$

Exercícios adicionais

1. $x(\text{sen}^{-1} x)^2 + 2(\text{sen}^{-1} x)\sqrt{1 - x^2} - 2x + C$

3. $\dfrac{x^2 \,\text{sen}^{-1} x}{2} + \dfrac{x\sqrt{1 - x^2} - \text{sen}^{-1} x}{4} + C$

5. $\dfrac{\ln|\sec 2\theta + \text{tg}\, 2\theta| + 2\theta}{4} + C$

7. $\dfrac{1}{2}\left(\ln\left(t - \sqrt{1 - t^2}\right) - \text{sen}^{-1} t\right) + C$

9. $\dfrac{1}{16}\ln\left|\dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}\right| + \dfrac{1}{8}(\text{tg}^{-1}(x + 1) + \text{tg}^{-1}(x - 1)) + C$

11. 0 13. $\ln(4) - 1$ 15. 1 17. $32\pi/35$ 19. 2π

21. (a) π (b) $\pi(2e - 5)$

23. (b) $\pi\left(\dfrac{8(\ln 2)^2}{3} - \dfrac{16(\ln 2)}{9} + \dfrac{16}{27}\right)$ 25. $\left(\dfrac{e^2 + 1}{4}, \dfrac{e - 2}{2}\right)$

27. $\sqrt{1 + e^2} - \ln\left(\dfrac{\sqrt{1 + e^2}}{e} + \dfrac{1}{e}\right) - \sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$

29. 6 31. $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$ 33. (b) 1

37. $a = \dfrac{1}{2}, -\dfrac{\ln 2}{4}$ 39. $\dfrac{1}{2} < p \le 1$

41. $\dfrac{e^{2x}}{13}(3 \,\text{sen}\, 3x + 2\cos 3x) + C$

43. $\dfrac{\cos x \,\text{sen}\, 3x - 3 \,\text{sen}\, x \cos 3x}{8} + C$

45. $\dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \,\text{sen}\, bx - b\cos bx) + C$ 47. $x\ln(ax) - x + C$

CAPÍTULO 9

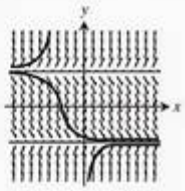
Seção 9.1

9. $\dfrac{2}{3}y^{3/2} - x^{1/2} = C$ 11. $e^y - e^x = C$

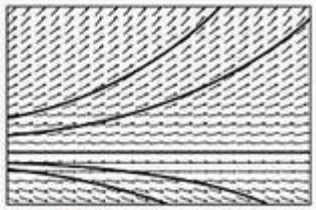
13. $-x + 2\,\text{tg}\sqrt{y} = C$ 15. $e^{-y} + 2e^{\sqrt{x}} = C$

17. $y = \text{sen}(x^2 + C)$ 19. (d) 21. (a)

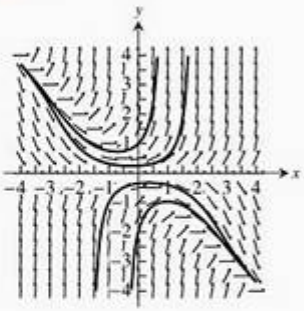
23.



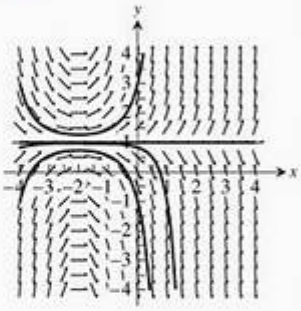
25.



27.



29.



Seção 9.2

1. $y = \dfrac{e^x + C}{x}$, $x > 0$ 3. $y = \dfrac{C - \cos x}{x^3}$, $x > 0$

5. $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{C}{x^2}$, $x > 0$ 7. $y = \dfrac{1}{2}xe^{x/2} + Ce^{x/2}$

9. $y = x(\ln x)^2 + Cx$

11. $s = \dfrac{t^3}{3(t - 1)^4} - \dfrac{t}{(t - 1)^4} + \dfrac{C}{(t - 1)^4}$

13. $r = (\text{cosec}\,\theta)(\ln|\sec\theta| + C)$, $0 < \theta < \pi/2$

15. $y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-2t}$ 17. $y = -\dfrac{1}{\theta}\cos\theta + \dfrac{\pi}{2\theta}$

19. $y = 6e^{x^2} - \dfrac{e^{x^2}}{x + 1}$ 21. $y = y_0 e^{kt}$

23. (b) está correta, mas (a) não.

25. (a) 10 pés/min (b) $(100 + t)$ gal

(c) $4\left(\dfrac{y}{100 + t}\right)$ pés/min

(d) $\dfrac{dy}{dt} = 10 - \dfrac{4y}{100 + t}$, $y(0) = 50$,

$$y = 2(100 + t) - \frac{150}{\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^4}$$

(e) $\text{Concentração} = \dfrac{y(25)}{\text{qtde. de salmoura no tanque}} = \dfrac{188{,}6}{125} \approx 1{,}5$ lb/gal

27. $y(27{,}8) \approx 14{,}8$ lb, $t \approx 27{,}8$ min 29. $t = \dfrac{L}{R}\ln 2$ sec

31. (a) $i = \dfrac{V}{R} - \dfrac{V}{R}e^{-3} = \dfrac{V}{R}(1 - e^{-3}) \approx 0{,}95\dfrac{V}{R}$ amp (b) 86%

33. $y = \dfrac{1}{1 + Ce^{-x}}$ 35. $y^3 = 1 + Cx^{-3}$

Seção 9.3

1. $y\,(\text{exata}) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{4}{x}$, $y_1 = -0{,}25$, $y_2 = 0{,}3$, $y_3 = 0{,}75$

3. $y\,(\text{exata}) = 3e^{x(x+2)}$, $y_1 = 4{,}2$, $y_2 = 6{,}216$, $y_3 = 9{,}697$

5. $y\,(\text{exata}) = e^{x^2} + 1$, $y_1 = 2{,}0$, $y_2 = 2{,}0202$, $y_3 = 2{,}0618$

7. $y \approx 2{,}48832$, o valor exato é e.

9. $y \approx -0{,}2272$, o valor exato é $1/(1 - 2\sqrt{5}) \approx -0{,}2880$.

11.

x	z	y-aprox.	y-exato	Erro
0	1	3	3	0
0,2	4,2	4,608	4,658122	0,050122
0,4	6,81984	7,623475	7,835089	0,211614
0,6	11,89262	13,56369	14,27646	0,712777

13. O método de Euler resulta em $y \approx 3{,}45835$; a solução exata é $y = 1 + e \approx 3{,}71828$.

15. $y \approx 1{,}5000$; o valor exato é 1,5275.

17. (a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$, $y(3) = -0{,}2$

(b) $-0{,}1851$, erro $\approx 0{,}0149$ (c) $-0{,}1929$, erro $\approx 0{,}0071$

(d) $-0{,}1965$, erro $\approx 0{,}0035$

19. A solução exata é $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$, logo $y(3) = -0{,}2$. Para determinar a aproximação, considere $z_n = y_{n-1} + 2y_{n-1}(x_{n-1} - 1)dx$ e $y_n = y_{n-1} + (y_{n-1}^2\,(x_{n-1} - 1) + z_n^{\,2}\,(x_n^{\,2} - 1)dx$ com valores iniciais $x_0 = 2$ e $y_0 = -\dfrac{1}{2}$. Use uma planilha, calculadora ou SAC conforme indicado nos itens **(a)** a **(d)**.

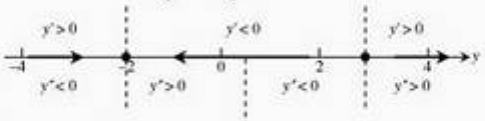
(a) $-0{,}2024$, erro $\approx 0{,}0024$
(b) $-0{,}2005$, erro $\approx 0{,}0005$
(c) $-0{,}2001$, erro $\approx 0{,}0001$
(d) Cada vez que o tamanho de passo diminui pela metade, o erro é reduzido a aproximadamente um quarto do que era no caso do tamanho de passo maior.

Seção 9.4

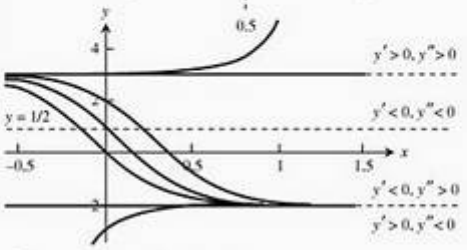
1. $y' = (y + 2)(y - 3)$

(a) $y = -2$ é um valor de equilíbrio estável e $y = 3$ é um equilíbrio inestável.

(b) $y'' = 2(y + 2)\left(y - \dfrac{1}{2}\right)(y - 3)$



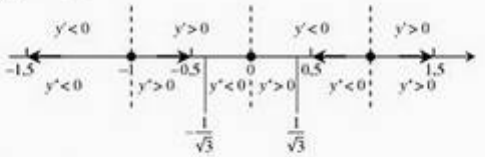
(c)



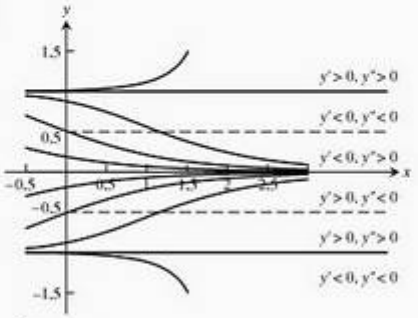
3. $y' = y^3 - y = (y + 1)y(y - 1)$

(a) $y = -1$ e $y = 1$ são equilíbrios instáveis e $y = 0$ é um equilíbrio estável.

(b) $y'' = (3y^2 - 1)y' = 3(y + 1)\left(y + 1/\sqrt{3}\right)y\left(y - 1/\sqrt{3}\right)(y - 1)$



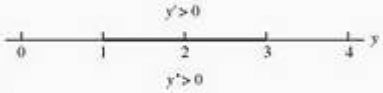
(c)



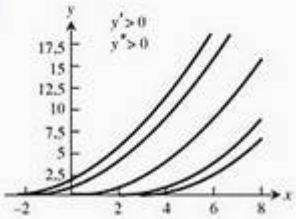
5. $y' = \sqrt{y}, y > 0$

(a) Não há valores de equilíbrio.

(b) $y'' = \dfrac{1}{2}$



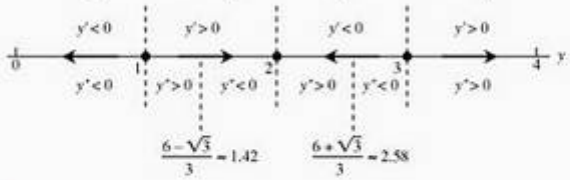
(c)



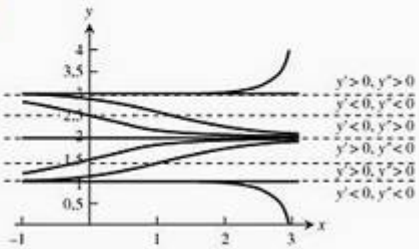
7. $y' = (y - 1)(y - 2)(y - 3)$

(a) $y = 1$ e $y = 3$ são equilíbrios instáveis e $y = 2$ é um equilíbrio estável.

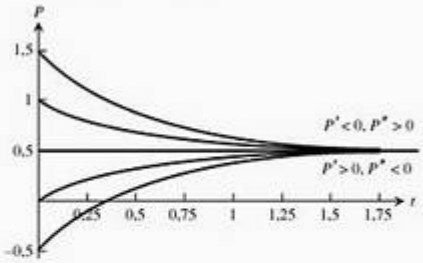
(b) $y'' = (3y^2 - 12y + 11)(y - 1)(y - 2)(y - 3) = (y - 1)\left(y - \dfrac{6 - \sqrt{3}}{3}\right)(y - 2)\left(y - \dfrac{6 + \sqrt{3}}{3}\right)(y - 3)$



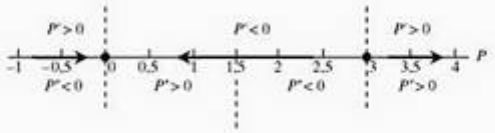
(c)

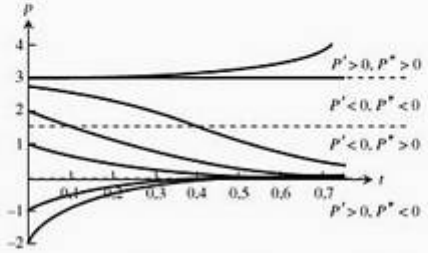


9. $\dfrac{dP}{dt} = 1 - 2P$ tem um equilíbrio estável em $P = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{d^2P}{dt^2} = -2\dfrac{dP}{dt} = -2(1 - 2P)$.

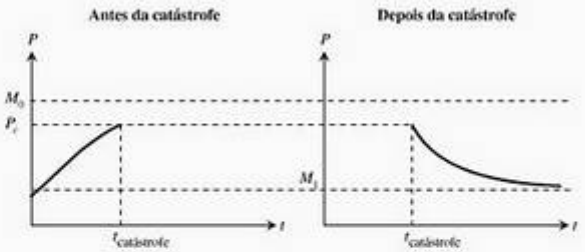


11. $\dfrac{dP}{dt} = 2P(P - 3)$ tem um equilíbrio estável em $P = 0$ e um equilíbrio instável em $P = 3$; $\dfrac{d^2P}{dt^2} = 2(2P - 3)\dfrac{dP}{dt} = 4P(2P - 3)(P - 3)$.





13. Antes da catástrofe, a população exibe crescimento logístico e $P(t)$ cresce na direção de M_0, o equilíbrio estável. Após a catástrofe, a população declina logisticamente e $P(t)$ diminui na direção de M_1, o novo equilíbrio estável.

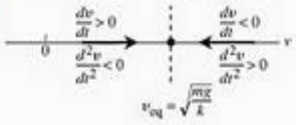


15. $\dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{k}{m}v^2, \quad g, k, m > 0$ e $v(t) \geq 0$

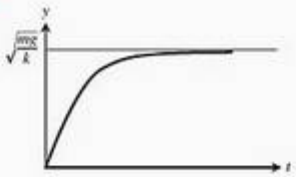
Equilibrium: $\dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{k}{m}v^2 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$

Concavity: $\dfrac{d^2v}{dt^2} = -2\left(\dfrac{k}{m}v\right)\dfrac{dv}{dt} = -2\left(\dfrac{k}{m}v\right)\left(g - \dfrac{k}{m}v^2\right)$

(a)



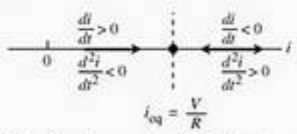
(b)



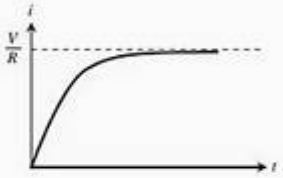
(c) $v_{\text{terminal}} = \sqrt{\dfrac{160}{0{,}005}} = 178{,}9$ pés/sec $= 122$ mph

17. $F = F_p - F_r$; $ma = 50 - 5|v|$; $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m}(50 - 5|v|)$. A velocidade máxima ocorre quando $\dfrac{dv}{dt} = 0$ ou $v = 10$ pés/s.

19. Reta de fase:



Se o interruptor foi ligado no instante $t = 0$, então $i(0) = 0$, e o gráfico da solução tem a seguinte aparência:



Quando $t \to \infty$, $i(t) \to i_{\text{estado estacionário}} = \dfrac{V}{R}$.

Seção 9.5

1. **(a)** 168,5 m **(b)** 41,13 s.

3. $s(t) = 4{,}91(1 - e^{-(22{,}36/39{,}92)t})$

5. **(a)** $P(t) = \dfrac{150}{1 + 24e^{-0{,}225t}}$

(b) Cerca de 17,21 semanas; 21,28 semanas.

7. **(a)** $y(t) = \dfrac{8 \times 10^7}{1 + 4e^{-0{,}71t}} \Rightarrow y(1) \approx 2.69671 \times 10^7$ kg

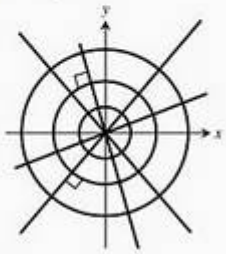
(b) $t \approx 1.95253$ anos

9. **(a)** $y = 2e^t - 1$ **(b)** $y(t) = \dfrac{400}{1 + 199e^{-200t}}$

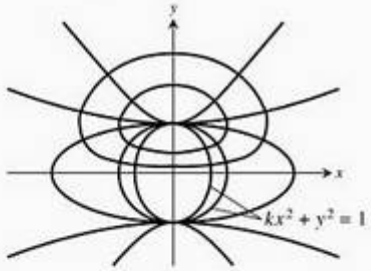
11. **(a)** $P(t) = \dfrac{P_0}{1 - kP_0t}$

(b) Assíntota vertical em $t = \dfrac{1}{kP_0}$.

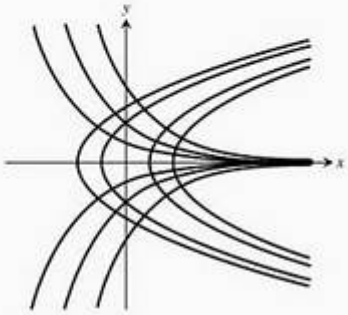
13. $x^2 + y^2 = C$



15. $\ln|y| - \dfrac{1}{2}y^2 = \dfrac{1}{2}x^2 + C$



17. $y = \pm\sqrt{2x + C}$



Exercícios práticos

1. $y = \left(\text{tg}^{-1}\left(\frac{x + C}{2}\right)\right)^2$ 3. $y^2 = \text{sen}^{-1}(2\,\text{tg}\,x + C)$

5. $y = -\ln\left(C - \frac{2}{5}(x - 2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x - 2)^{3/2}\right)$

7. $\text{tg}\,y = -x\,\text{sen}\,x - \cos x + C$ 9. $(y + 1)e^{-y} = -\ln|x| + C$

11. $y = C\frac{x - 1}{x}$ 13. $y = \frac{x^4}{4}e^{x/2} + Ce^{x/2}$

15. $y = \frac{x^2 - 2x + C}{2x^2}$ 17. $y = \frac{e^{-x} + C}{1 + e^x}$ 19. $xy + y^3 = C$

21. $y = -2 + \ln(2 - e^{-x})$ 23. $y = \frac{2x^3 + 3x^2 + 6}{6(x + 1)^2}$

25. $y = \frac{1}{3}(1 - 4e^{-x^2})$ 27. $y = 4x - 4\sqrt{x} + 1$

29. $y = e^{-x}(3x^3 - 3x^2)$

31.

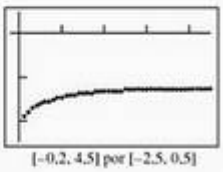
x	y
0	0
0,1	0,1000
0,2	0,2095
0,3	0,3285
0,4	0,4568
0,5	0,5946
0,6	0,7418
0,7	0,8986
0,8	1,0649
0,9	1,2411
1,0	1,4273

35.

x	y
1,1	1,6241
1,2	1,8319
1,3	2,0513
1,4	2,2832
1,5	2,5285
1,6	2,7884
1,7	3,0643
1,8	3,3579
1,9	3,6709
2,0	4,0057

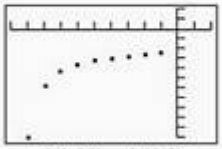
33. $y(3) \approx 0{,}9063$

(a)



[−0,2, 4,5] por [−2,5, 0,5]

(b) Observe que escolhemos um pequeno intervalo de valores de x, pois os valores de y diminuem muito rapidamente e nossa calculadora não consegue manejar os cálculos para $x \leq -1$. (Isso ocorre porque a solução analítica é $y = -2 + \ln(2 - e^{-x})$, que tem uma assíntota em $x = -\ln 2 \approx -0{,}69$. Obviamente, as aproximações de Euler levam erroneamente a $x \leq -0{,}7$.)



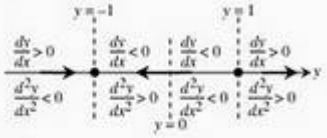
[−1, 0,2] por [−10, 2]

37. $y(\text{exato}) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$; $y(2) \approx 0{,}4$; o valor exato é $\frac{1}{2}$.

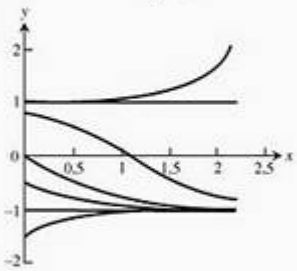
39. $y(\text{exato}) = -e^{(x^2-1)/2}$; $y(2) \approx -3{,}4192$; o valor exato é $-e^{3/2} \approx -4{,}4817$.

41. (a) $y = -1$ é estável e $y = 1$ é instável.

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\frac{dy}{dx} = 2y(y^2 - 1)$



(c)



Exercícios adicionais e avançados

1. $y = c = (y_0 - e)e^{-k(A/V)t}$

(b) Solução de estado estacionário: $y_\infty = c$.

3. 0,179%.

Índice remissivo

A

Aceleração
- determinando a velocidade e a posição a partir da, 283
- explicação de, 171

Água, volume da, 442
Algoritmos, eficiência de um, 528
Altitude de um projétil
- estimando, 358-359

Análises de regressão, 34, 36, 37, 61
- explicação de, 34

Ângulos para ramificação de vasos sanguíneos, 352
Antiderivada, 281, 333
Aplicações de integrais, 429-501
- áreas de superfície de revolução e os teoremas de Pappus, 468-476
- comprimento de curvas planas e, 449-455
- forças e pressões de fluido, 489-492
- momentos e centro de massa, 457-466
- trabalho, 480-485
- volume por cascas cilíndricas, 441-446
- volume por fatiamento e rotação em torno de um eixo, 429-441

Aproximação de Stirling, 633
Aproximação linear padrão, 241, 242, 249, 251, 259, 513
Aproximações
- convertendo massa em energia, 248-249
- de Simpson, 581
- lineares comum, 249

Assíntotas oblíquas, 105
Assíntotas verticais, 109-115, 298, 615

B

Balão
- em ascensão, jogando um pacote de um, 337-338
- subindo, 233-234

Barras finas, 459-461

C

Cálculo. *Veja também* teorema fundamental do cálculo
- diferencial, 73, 303, 317
- integral, 265, 387, 454

Campos de direção, 638
Capacidade térmica, 422, 628
Cascas cilíndricas, 441-446
Catalisador, 315
Catenária, 14, 541, 542, 545
Centro de massa
- de fios e barras finas, 459-461
- explicação de, 457

Centróides, 465-466, 467, 475, 491, 492, 495, 496, 498
Circuitos RL, 647
Coeficiente angular
- da curva, 131, 132, 133, 135, 147, 161, 167, 199, 205, 208, 215, 220, 256, 320, 337
- de reta, 8, 37, 41, 62, 64, 68, 211
- de retas tangente, 192, 228, 672

Coeficiente de permeabilidade, 677
Coeficiente indeterminado, 565
Comportas, 354
Compostas de funções contínuas, 122, 123
Comprimento de curvas planas, 449-455

Concavidade
explicação de, 292-293
Conectividade, 126
Constante arbitrária, 334, 335, 336, 339, 399, 546, 565, 592, 635, 636, 672, 674
Constante de força, 481, 482, 485, 488
Constante de integração, 339, 393, 541, 575, 632, 645
Constantes de tempo, 647, 651. *Veja também* Meia-vida de um elemento radioativo
Continuidade
das funções trigonométricas, 137
de funções racionais, 122
diferenciabilidade e, 155
em um ponto, 118
Convergência
do método de Newton, 329-330
testes para, 619-620
Crescimento exponencial, 42, 516, 522, 668
Crescimento logístico, 663, 664, 669, 670
Crescimento populacional em um ambiente limitado, 663-664
Curva integral, 634, 652, 653, 659, 661, 666, 676
Curva lisa, 35, 450, 451, 456, 472, 500
Curvas parametrizadas, 195, 196, 200, 202, 257, 455, 472
Equação ponto/coeficiente angular, 131, 132, 279
Curvas *Veja também* Retas curvas
área entre, 407-414, 416, 418
de regressão, 34
lisa, 35, 450, 451, 456, 472, 500
parametrizada, 193, 194, 195, 196, 254, 473, 495
tangente à, 70, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 147, 155, 167, 168, 168, 186, 192, 195, 199, 202, 215, 228, 240, 241, 256, 320, 327, 479, 637
Custo da produção, 169, 174, 307
Custo diário médio de estocagem, 423
Custo marginal, 174, 179, 301, 307, 308, 315, 397

D

Débito cardíaco, 238
Decaimento exponencial, 42, 51, 515-521, 635, 643, 650
Decaimento radioativo, 43, 44, 58, 518, 640
Densidade constante
faixas e barras de, 460, 468
fio de, 465, 467
placa de, 462, 464
Derivação implícita
derivadas de ordem superior, 206
explicação de, 202-203
potências racionais e, 206-207
Regra da Cadeira e, 226, 537
Derivação
fórmula paramétrica, 195, 196, 451
implícita, 202-208, 210, 214, 225, 226, 254, 537, 635, 660
logarítmica, 217, 220, 221, 254, 258, 510
Derivada à esquerda, 150
Derivada
à direita, 150
à esquerda, 150
aprendendo sobre uma função a partir das, 299
como função, 145
como taxa de variação, 169-176
de função logarítmicas, 211-219
de funções exponenciais, 160-162
de funções hiperbólicas, 263, 536, 542
de funções inversas, 211-219
de funções trigonométricas inversas, 222-231
de funções trigonométricas, 180-185, 254
de segunda ordem e superior, 166
de uma função composta, 188-190
explicação de, 145
extremos de funções, 265-273
laterais, 150
linearização e diferenciais e, 240-249
Método de Newton e, 327-331
na economia, 174-175
notações, 147-148
potências inteiras negativas de x e, 165
propriedade do valor intermediário para, 152-153
Regra da Diferença e, 181
soluções gráficas de equações diferenciais autônomas e, 658-664
taxas relacionadas e, 231-235
Teorema do valor médio e equações diferenciais e, 277-284
Derivadas de segunda ordem, 166, 198
Derivadas laterais, 150, 151, 155, 253, 264
Derivável em um intervalo, 150-151, 253, 293
Descontinuidade oscilante, 120
Descontinuidade removível, 129, 137
Descontinuidade
em dy/dx, 453
infinita, 120, 615

oscilante, 120
ponto de, 119, 121, 125, 267, 424
removível, 129, 137
Desigualdade de Schwartz, 352
Desigualdade max-min, 377, 378, 379, 384, 387
Desigualdade satisfeita pelas médias geométrica, logarítmica e aritmética, 513
Deslocamento, 5, 25, 29, 170, 176, 183, 194, 195, 199, 200, 281, 294, 301, 342, 343, 348, 348, 359, 480, 540, 610
Diferenciabilidade, 151, 152, 155, 156, 185, 207, 516
Diferenciais
erro na aproximação e, 245-246
estimando com, 244-245
explicação de, 243
linearização e, 240-249
sensibilidade à variação e, 247-248
Difusão social, 572, 665
Diminuição dos dentes, 521
Distância de reação, 19
Distância percorrida, 66, 67, 77, 118, 180, 354, 357-359, 360, 362, 363, 364, 418, 475, 476
Divergência de integrais impróprias, 626
Domínio natural, 2
Domínio
de uma função, 2, 6, 12, 59, 119, 150, 265, 269
natural, 2

E

Economia, derivadas na, 174-175
Elementos radiativos, 519
Eletricidade doméstica, 405
Energia cinética
convertendo massa em, 248-249
trabalho e, 488, 499
Energia elétrica, 315
Energia, convertendo massa em, 248-249
Equação de contração de Lorentz, 139
Equação reduzida da reta, 7
Equação-pressão profundidade, 489
Equações diferenciais de primeira ordem
separáveis, 674-675
Equações diferenciais
autônoma, 658-664
autônomas, soluções gráficas de, 658-664
de primeira ordem separáveis, 674
explicação de, 247
lineares de primeira ordem, 643-649
separáveis, 635-641
teorema do valor médio e, 277-284
Equações lineares, 565, 643
de primeira ordem, 650
Equilíbrio
estável, 660-664, 675
instável, 660-664, 675
Esferas, 354, 468
Estado estacionário, 666-667
Estimando com somas finitas, 354-362
Estoque diário médio, 422-423
Euler, Leonhard, 652
Exames de sangue, 352
Extensão contínua, 124, 125, 128, 139, 141, 325, 326, 424, 608
Extremos de funções. *Veja também* Valores de funções máximo e mínimo
absolutos, 265, 266, 267, 270, 271, 274, 276, 277, 290, 292, 297, 299, 344
determinando, 268-273
locais (relativos), 267-268
ponto crítico e, 269
Extremos locais
teste de primeira derivada para, 288-290
teste de segunda derivada para, 295-298
Extremos relativos (locais), 267-268

F

Fatiamento, volumes por, 429-436
Fator
comum, 78, 80, 81, 124
de proporcionalidade, 263
Fios
centro de massa de, 459-461
Fluidos, peso específico, 492
Força constante, 480, 499, 665
Força variável, 481, 485, 495, 499
Forças de fluido
determinando a, 492
explicação de, 373
fórmula da profundidade variável, 490-491
fórmula de profundidade constante para, 490

Forma indeterminada, 318, 321, 322, 323, 324, 617
Fórmula da área de superfície, 470, 473, 478, 479
Fórmula da profundidade variável para a força do fluido, 490-491
Fórmula de Galileu para queda livre, 177
Fórmula de profundidade constante para força de fluído, 490
Fórmula de Stirling, 632, 633
Fórmula diferencial, 250, 253, 454
Fórmula para mudança de base, 51, 216
Fórmula paramétrica
    para d^2y/d^2x, 196
    para dy/dx, 195
    para o comprimento de uma curva, 451-452
Fórmulas para gerenciamento de almoxarifado, 315
Fórmulas para soma dos ângulos, 577
Frações parciais
    determinar os coeficientes, 570
    explicação de, 563-564
    Método de Heaviside, 568-569
        método de, 564
    Frações
        imprópria, 552, 571
        parciais, 563-570, 571, 583, 617, 626, 627, 671
        separando, 552
Função constante
    derivada de uma, 157
    limites, 72
Função contínua arbitrária, 391
Função da densidade da probabilidade normal, 625
Função erro, 608, 624
Função exponencial natural, 41, 50, 113, 122, 161 ,162, 211, 283, 507
Função gama, 632, 633
Função identidade, 48, 50, 72, 121, 123, 167, 221, 511
Função integrável, 384, 388, 410, 418, 422, 428, 430
Função inversas, 46, 47, 48, 49, 52, 53, 54, 58, 122, 211, 213, 221, 224, 226, 227, 502, 511
Função logarítmica de base, 48
Função logarítmica natural, 45, 60
Função periódica, 263, 292
Função salto unitário, 153, 253
Função valor absoluto, 6, 61, 122, 123
Funções compostas, 21, 26, 128, 137,199, 201, 231
    explicação das, 21
Funções contínuas por partes, 376, 424
Funções contínuas
    compostas, 122-123
    identificando, 121
    por partes, 376, 424
    propriedades, 121
    teorema do valor extremo para, 346, 345
    teorema do valor intermediário para, 125-126, 387
Funções de potência, 11. 264
Funções definidas em partes, 6-7, 8, 60
Funções derivadas, 145, 147, 264, 281, 634
Funções exponenciais
    comportamento exponencial, 38-40
    crescimento e decaimento, 42
    explicação de, 13
Funções hiperbólicas
    derivadas e integrais, 533-534
    explicação de, 531
    identidade, 531-533
    inversa, 534-535
Funções ímpares, 100, 262, 276
Funções injetoras, 45-46, 56, 63
Funções inversas
    determinando, 47-48
    explicação de, 46
    parametrizando, 213
Funções logarítmicas
    análise de regressão, 61
    de base, 48
    explicação de, 48
    natural, 45, 60
Funções monotônicas, 286-290
Funções não negativas, 380, 384
Funções pares, 15-16, 19, 28, 262, 276, 409, 531
Funções polinomiais
    e racionais, 79, 97
    e trigonométricas. 72
    limites de, 79
Funções racionais
    integração de, 563-570
    limites de, 80, 107
Funções trigonométricas inversas
    definições, 223
    derivadas, 224-228
    explicação de, 223
    gráficos de, 222
Funções trigonométricas
    derivadas de, 180-185